ತರಗತಿ X

ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಭಾಗ - 1

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ
2016

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ನನ್ನ ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಎಣಿಕೆಗಳಿಂದಲೂ ಅಳತೆಗಳಿಂದಲೂ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದರೊಂದಿಗೆ ಗಣಿತವು ಆರಂಭವಾಗುವುದು. ಕೃಷಿ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ದ್ವಿಮಾನ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗುವುವು; ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆಯ ಮೂಲಕ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರವಾಗಿ ಎತ್ತರಕ್ಕೇರುವುದು. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯಾಗಿಯೂ ಬೆಳೆಯುವುದು. ನವೋತ್ಥಾನ ಯುರೋಪಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯು ನಾವಿಕ ಸಂಚಾರಗಳ ಅಡಿಪಾಯವಾಗುವುದು; ಇಂದಿನ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿ ಉಪಗ್ರಹಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಥಾನನಿರ್ಣಯಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿರುವುದು. ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಇ-ವ್ಯಾಪಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮುನ್ನೆಚ್ಚರಿಕೆಯ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುವುದು. ಗಣಿತದ ಅನಂತ ಪ್ರಯೋಗ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ತಾಳಗಳನ್ನು ಆನಂದಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿ ಎಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರೀತಿಪೂರ್ವಕ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ। ಪಿ.ಎ. ಫಾತಿಮ
ಡೈರೆಕ್ಟರ್
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Participants

T.P Prakashan
G.H.S.S Vazakkad
Malappuram

Unnikrishnan.M.V
G.H.S.S Kumbla
Kasaragod

Vijaya Kumar T.K
G.H.S.S Cherkala
Kasaragod

Ramanujam R
M.L.K.M.G.H.S.S
Palakkad, Poolapatta

Anil kumar M.K
S.K.M.J.H.S.S
Kalpetta, Wayanad

Ubaidulla K.C
S.O.H.S.S Arikkad
Malappuram

Ramesh N.K
R.G.M.H.S.S Mokeri, Kannur

Jabir.K
G.V.H.S Mogral, Kasaragod

Shrikumar .T
G.G.H.S.S Karamana
Thiruvananthapuram.

K.J Prakash
G.M.G.H.S.S Pattam
Thiruvananthapuram.

C.P.A Kareem
S.O.H.S.S Arikkad
Malappuram

Mohammadali P.P
G.M.H.S.S Calicut
University Campus, Malappuram

P.P Prabhakaran
Rtd.Teacher
Prashanth, Poonoor, Kozikkod

Cover:
Rajeevan N.T
G.H.S.S Thariod, Wayanad

Experts

Dr. E. Krishnan
Rtd. Prof University College
Thiruvananthapuram

Dr. Ramesh Kumar P
Asst. Prof. Kerala University.

Venugopal .C
Asst. Prof, Govt. College of
Teacher Eaducation,
Thiruvananthapuram

Dr. Sharachandran
Rtd. Dy. Director of collegiate
Education Kottayam

Participants (Kannada Version)

Krishna Prakash S.
S.N.H.S. Perla

Balakrishna P.
B.E.M.H.S.S. Kasaragod

Harsha Kumar M.
S.G.K.H.S. Kudlu

Raghava A.
G.H.S.S. Bellur

Rajeshchandra K.P.
B.E.M.H.S.S. Kasaragod

Prapullachandra C.H.
G.H.S.S. Adoor

Language Expert

Shridhara N.
Asst. Prof. Govt. College
Kasaragod.

Co-ordinator

Dr. Faizal Mavulladathil
Research Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

Academic Co-ordinator

Sujith Kumar G.
Research Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidyabhavan, Pujappura, Thiruvananthapuram - 695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

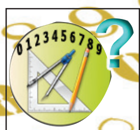
ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ICT . ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿನೋಡಿರಿ

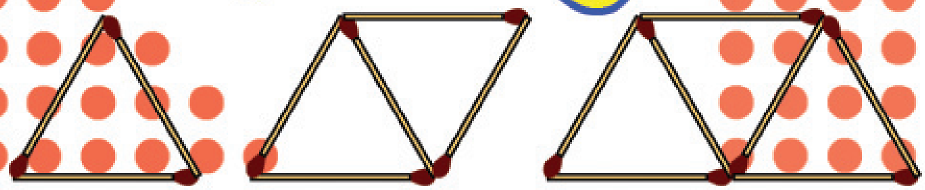
ಸಂಶೋಧನೆ

ಪುನರವಲೋಕನ

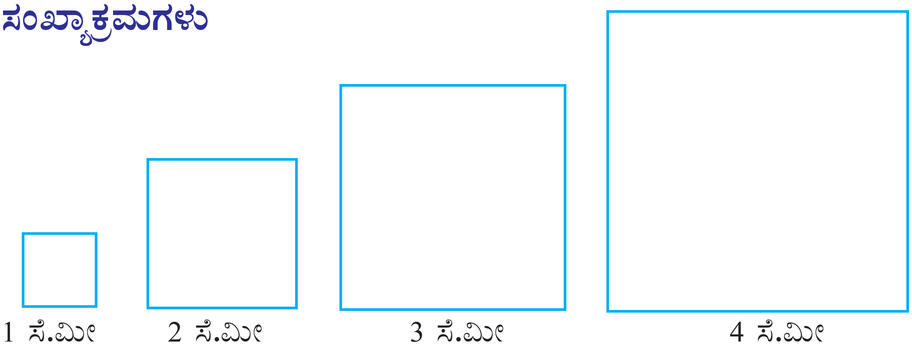


ಚರ್ಚಿಸುವ

1 ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು



ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮಗಳು



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೋ?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ,

1 ಸೆ.ಮೀ., 2 ಸೆ.ಮೀ., 3 ಸೆ.ಮೀ., 4 ಸೆ.ಮೀ., ...

ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು,

4 ಸೆ.ಮೀ., 8 ಸೆ.ಮೀ., 12 ಸೆ.ಮೀ., 16 ಸೆ.ಮೀ., ...

ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು; ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

1 ಚ.ಸೆ.ಮೀ., 4 ಚ.ಸೆ.ಮೀ., 9 ಚ.ಸೆ.ಮೀ., 16 ಚ.ಸೆ.ಮೀ., ...

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು

1, 2, 3, 4, ...

ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದಂತೆ ಇದೆ. ಸುತ್ತಳತೆಯು

4, 8, 12, 16, ...

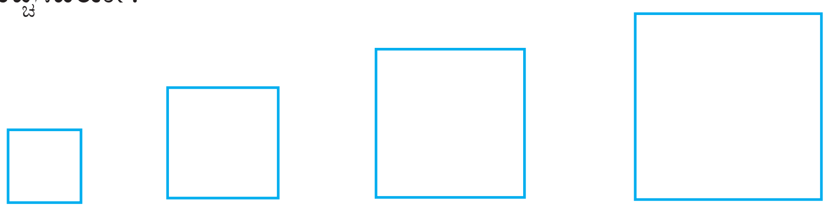
ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

1, 4, 9, 16, ...

ಎಂಬ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆ.

ಇವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವೋ? ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಬದಲು ಅರ್ಧ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೋ?

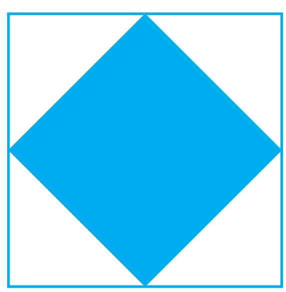


1 ಸೆ.ಮೀ $1\frac{1}{2}$ ಸೆ.ಮೀ 2 ಸೆ.ಮೀ $2\frac{1}{2}$ ಸೆ.ಮೀ

ಭುಜ	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ಸುತ್ತಳತೆ	4,	6,	8,	10,	...
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
ಕರ್ಣ	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದಾದರೂ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ ಒಂದನೆಯ, ಎರಡನೆಯ, ಮೂರನೆಯ,...........ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ **(number sequence)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಚೌಕಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ; ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಒಂದು ಮೀಟರಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕ ಸಿಗುವುದು.



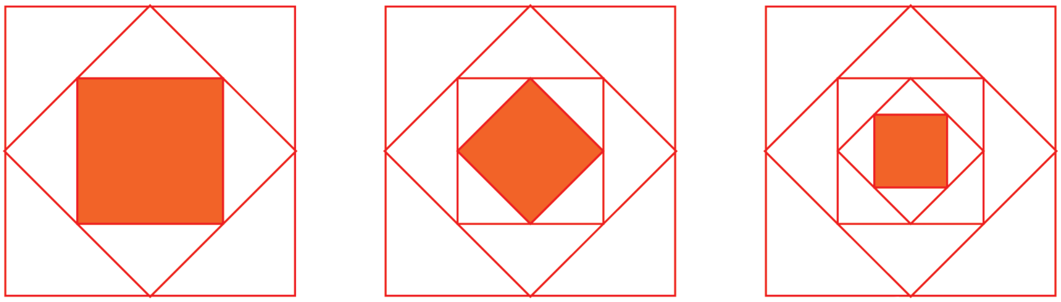
1 ಮೀಟರ್

ಈ ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಅದರ ಕರ್ಣವು ಒಂದು ಮೀಟರಾಗಿದೆ; ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕರ್ಣದ ವರ್ಗದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಚತುರ್ಭುಜ ವಿಸ್ತಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅರ್ಧ ಚದರಮೀಟರ್.

ಇದು ಮುಂದುವರಿದರೆ,



1 ಮೀಟರ್ 1 ಮೀಟರ್ 1 ಮೀಟರ್

ಪ್ರತಿ ಸಲವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅರ್ಧವಾಗುವುದು, ಈ ರೀತಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿ ಯಾವುದಾಗಿದೆ?

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು. ಮೇಲಿನಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ v ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$v = 9.8t$$

ಎಂಬುದು ಸಮಯ-ವೇಗದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ.

t ಸೆಕೆಂಡ್ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ s ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$s = 4.9t^2$$

ಎಂಬುದು ಸಮಯ-ದೂರದ ಸಮವಾಕ್ಯ.

ಆಗ ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಮಯ	1,	2,	3,	4,	...
ವೇಗ	9.8,	19.6,	29.4,	39.2,	...
ದೂರ	4.9,	19.6,	44.1,	78.4,	...

ಅಳತೆಗಳಲ್ಲದೆ ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೆಲೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು.

$\frac{21}{37}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ದಶಮಾಂಶರೂಪದಲ್ಲಿನ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಬರೆದರೆ,

$$5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \ldots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗುವುದು.

ಇದು π ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಾದರೆ,

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \ldots$$

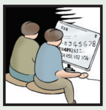
ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 1ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ,

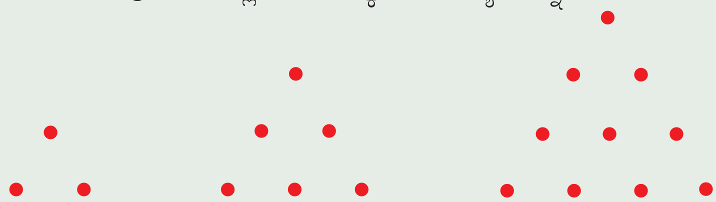
$$1, \; 11, \; 21, \; 31, \; \ldots$$

ಇದನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

?



(1) ಚುಕ್ಕಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಬಹುದು.
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಚುಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಮುಂದಿನ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಚುಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(2) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ   3, 4, 5, ...
ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ
ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ
ಒಂದು ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆ
ಒಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ

(3) 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಾಗೂ ಶೇಷ 2 ಸಿಗುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(4) 1, 6 ಎಂಬೀ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಇತರ ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಬ್ಬಿಣದ ಭಾರ 7.8 ಗ್ರಾಂ ಆಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1ಸೆ.ಮೀ, 2ಸೆ.ಮೀ, 3ಸೆ.ಮೀ..... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳ ಘನಫಲ, ಭಾರ ಇವುಗಳನ್ನು ಶ್ರೇಣಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಸೆ.ಮೀ., 2 ಸೆ.ಮೀ., 3 ಸೆ.ಮೀ., ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$4, \; 8, \; 12, \; \ldots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅದರ **ಪದಗಳು**(terms) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ಪದಗಳು 4, 8, 12, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಒಂದನೇ ಪದ 4, ಎರಡನೇ ಪದ 8, ಮೂರನೇ ಪದ 12, ...

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಸ್ಥಾನ	1,	2,	3,	...
ಪದ	4,	8,	12,	...

ಇದರ 5ನೇ ಪದ ಎಷ್ಟು? 20ನೇ ಪದವೋ?

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಪದಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವು ಸ್ಥಾನದ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನೇ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಶ್ರೇಣಿಯ nನೇ ಪದ $4n$.

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾನಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ x_1, x_2, x_3, ... ಅಥವಾ y_1, y_2, y_3, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು. ಅದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಶ್ರೇಣಿ ನಿಯಮವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚುಟುಕಾಗಿಸಬಹುದು.

$$x_n = 4n$$

ಇಲ್ಲಿ n ಆಗಿ 1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳವಾಗ

$x_1 = 4$

$x_2 = 8$

$x_3 = 12$

...

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಶ್ರೇಣಿಯ 100 ನೇ ಪದ

$$x_{100} = 400$$

ಎಂದು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬದಲಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು ಗೆರೆ ಭುಜವಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ನಂತರ, Input Bar ನಲ್ಲಿ

Sequence [Polygon [A, B, n], n, 3, 10]

ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ, 3 ರಿಂದ 10 ರವರೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಅದರೊಂದಿಗೆ AB ಒಂದು ಭುಜವಾಗಿ n ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದು ಈ ನಿರ್ದೇಶದ ಅರ್ಥ.

ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ರಚಿಸಲು m ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು Integer Slider ಮಾಡಿ, ರಚಿಸಲಿರುವ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

Sequence [Polygon [A, B, n + 2], n, m]

ಇದರ ಅರ್ಥವು Slider ಚಲಿಸಿ m ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 1, 2, 3, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ 3, 4, 5, ... ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ n + 2ರ ಬದಲಾಗಿ 2n ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಯಾವ ರೀತಿಯ ಬಹುಭುಜಗಳು ಸಿಗುವುವು?

2n + 1 ಆದರೋ?

$$1, 4, 9, 16, ...$$

ಇದರ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಪದಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವು ಸ್ಥಾನದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ?

$$x_n = n^2$$

ಈ ಚೌಕಗಳ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವೇನು? ಬರೆದುನೋಡಿರಿ.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅರ್ಧ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಶ್ರೇಣಿಗಳಾಗಿ ಬರೆದುದನ್ನು ನೋಡುವ.

ಭುಜ	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ಸುತ್ತಳತೆ	4,	6,	8,	10,	...
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
ಕರ್ಣ	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆದು ನೋಡುವ.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ \ldots$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಇವೆ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಛೇದಗಳೆಲ್ಲಾ 2 ಆಗಿದೆ. ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಛೇದ 2 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಬರೆದರೋ?

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ \ldots$$

ಅಂಶಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವೇನು? ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ.

ಹಾಗಾದರೆ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಶ್ರೇಣಿ, ಬೀಜಗಣಿತರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

n ನೇ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ s_n ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$$s_n = \frac{n+1}{2}$$

ಇದನ್ನೇ

$$s_n = \frac{1}{2}\ (n + 1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವೋ?

ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವು

$$p_n = 4 \times \frac{1}{2}\ (n + 1) = 2\ (n + 1)$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 25ನೇ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವು,

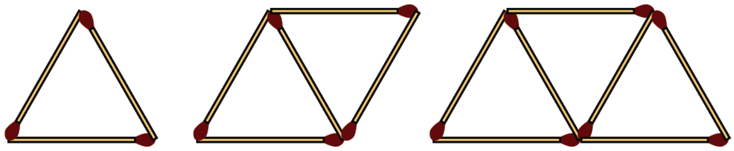
$$s_{25} = \frac{1}{2} \times (25 + 1) = 13$$

50ನೇ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ,

$$p_{50} = 2 \times (50 + 1) = 102$$

ಇದೇ ರೀತಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಶ್ರೇಣಿ, ಕರ್ಣಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಇವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ:



ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಮೂರು ಬೆಂಕಿಕಡ್ಡಿಗಳು, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಐದು ಕಡ್ಡಿಗಳು, ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಏಳು ಕಡ್ಡಿಗಳು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಬೆಂಕಿ ಕಡ್ಡಿಗಳು ಬೇಕು?

ಐದು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲೋ ?

ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಮೂರು ಕಡ್ಡಿಗಳು, ನಂತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಎರಡೆರಡು ಕಡ್ಡಿಗಳಂತೆ ಸಾಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

3, 5, 7, 9, 11, ...

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

10 ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಕಡ್ಡಿಗಳು ಬೇಕು?

ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ 3 ಕಡ್ಡಿಗಳು ಉಳಿದ 9 ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ 2 ರಂತೆ,

$9 \times 2 = 18$, ಒಟ್ಟು $3 + 18 = 21$

100 ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಕಡ್ಡಿಗಳು ಬೇಕು?

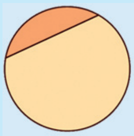
$$3 + (99 \times 2) = 201$$

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ?

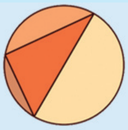
n ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

ವೃತ್ತ ವಿಭಜನೆ

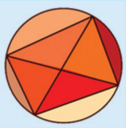
ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯಿಂದ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ, ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೇ;



ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗುತ್ತವೆ.



ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಸ್ಪರ ಜೋಡಿಸಿದರೋ? ಬಿಂದುಗಳು ಐದಾದರೋ? ಆರು



ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳಾಗುತ್ತವೆಯೆಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೀರಿ? ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಚಿತ್ರರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು 3 ಕಡ್ಡಿಗಳು, ಉಳಿದ $n-1$ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು $2(n-1) = 2n-2$ ಕಡ್ಡಿಗಳು;

ಒಟ್ಟು ಬೇಕಾಗಿರುವ ಕಡ್ಡಿಗಳು $3 + 2n - 2 = 2n + 1$

ಅಂದರೆ, n ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಕಡ್ಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$x_n = 2n + 1$$

ಅದುವೇ 3, 5, 7, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 3ರೊಂದಿಗೆ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ 500 ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಕಡ್ಡಿಗಳು ಬೇಕಾದೀತೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$x_{500} = (2 \times 500) + 1 = 1001$$

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಅದರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1ಸೆ.ಮೀ, 2 ಸೆ.ಮೀ, 3 ಸೆ.ಮೀ, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕಬ್ಬಿಣದ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳ ಭಾರವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವು

$$x_n = 7.8n^3$$

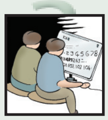
ಈ ರೀತಿಯ ನೂರು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳ ಭಾರವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು ಸಿಗಲು, ಪೈಥನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ (python 3)

```
for n in range (1,101):
print (7.8*n**3)
```

ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಸಾಕು. ಇದುವೇ `weights.py` ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಆಗಿ ಬರೆದು

```
python 3.2 weights.py > weights.txt
```

ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ weights.txt ಎಂಬ file ನಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಸಿಗುವುದು.



(1) ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

ii) 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 1 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

iii) 1 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

iv) 1 ರಲ್ಲೋ 6 ರಲ್ಲೋ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ.

(2) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ. ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ, ಒಂದು ಒಳಕೋನದ ಅಳತೆ, ಒಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಂಬೀ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದಾಗ ಲಭಿಸಿದ್ದು ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರ. ಇದರಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದ ಇದೇ ರೀತಿ ಮಧ್ಯಭಾಗದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದಾಗ ಲಭಿಸಿದ್ದು ಮೂರನೇ ಚಿತ್ರ.

i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿವೆ?

ii) ಒಂದನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

iv) ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಸಿಗುವ ಈ ಮೂರು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1, 2, 3, 4, ... ಆಗಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ

4, 8, 12, 16, ...

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಇಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ, ಸುತ್ತಳತೆ 4ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $\frac{1}{2}$ ದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರಿಂದ, ಸುತ್ತಳತೆ $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಯು

4, 6, 8, 10, ...

ಇನ್ನು ಬೆಂಕಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕ ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ 3ಕಡ್ಡಿಗಳು; ನಂತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ 2ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ 3ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಪುನ: ಪುನ: 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ

3, 5, 7, 9, ...

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನ: ಪುನ: ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಗೆ **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ(arithmetic sequence)** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಎರಡನೇ ಚೌಕ ಲೆಕ್ಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದೂ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಆಗಿದೆ. 1 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, $\frac{1}{2}$ ಆವರ್ತಿಸಿ ಕೂಡಿಸುವುದು.

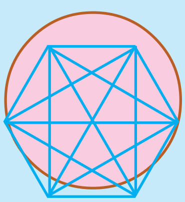
ಬಹುಭುಜಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಯು

$$360, 360, 360, \ldots$$

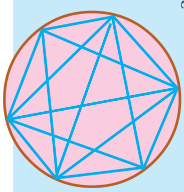
ಎಂದಲ್ಲವೇ. ಇದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. 360 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಬಿಸುವುದು ಪುನ: ಪುನ: 0 ಕೂಡಿಸುವುದು.

ನಿಗಮನಗಳ ಅಪಾಯ

ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳ ಕುರಿತು ವೃತ್ತ ವಿಭಜನೆ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2, 3, 4, 5 ಎಂಬಿ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವಾಗ ಭಾಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2, 4, 8, 16 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.



ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಆಗುವಾಗಲೋ? ಊಹೆ 32 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎಳೆದು ನೋಡಿದರೋ? ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಾದರೆ 30 ಭಾಗಗಳು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ 31 ಭಾಗಗಳು.



ಏನೇ ಆದರೂ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ 31 ಭಾಗಗಳು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ n ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗರಿಷ್ಟ ಭಾಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಈ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು 2^{n-1} ಎಂಬ ವಾಚಕದಲ್ಲಿ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ, 1, 2, 4, 8, 16 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಸಿಗುತ್ತವೆಯೆಂಬುದೇ ಸ್ವಾರಸ್ಯ. $n = 6$ ರಿಂದ ನಂತರ ಎರಡೂ ವಾಚಕಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಸಂಚರಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿನ ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯಿಂದ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಬಲವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 2 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದು. ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡ್ ಕಳೆಯುವಾಗ ವೇಗವು

$$10,\ 8,\ 6,\ \ldots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ.

ಇಲ್ಲಿ 10 ರಿಂದ 2ನ್ನು ಪುನ: ಪುನ: ಕಳೆಯುವ ಮೂಲಕ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನೂ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಇಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಒಳಪಡಿಸಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಿರ್ವಚನದಲ್ಲಿ "ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನ: ಪುನ: ಕೂಡಿಸಿರಿ" ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ "ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನ: ಪುನ: ಕೂಡಿಸಿರಿ ಅಥವಾ ಕಳೆಯಿರಿ" ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ "2 ನ್ನು ಕಳೆಯುವ ಎಂದರೆ -2ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ" ಎಂಬ ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪದದ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದೇ ಪದದಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಿಗುವುದು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಪದದಿಂದ ಅದರ ಅತಿ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ.

ಒಂದು ಪದದಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವ ಈ ಸ್ಥಿರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ **ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ (common difference)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಪದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 3ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$3,\ 6,\ 9,\ \ldots$$

3 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 1 ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

$$4,\quad 7,\quad 10,\ \ldots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು.

ಇದೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು 3ರ ಘಾತಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$3,\ 9,\ 27, \ldots$$

$9-3=6$, $27-9=18$ ಅಂದರೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿದ ಪದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

ಇದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲ.

ಇನ್ನು ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

?

(1) ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿರಿ. ಕಾರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

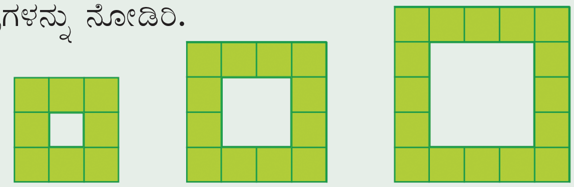
ii) ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

iii) ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

iv) 2 ರ ಘಾತಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

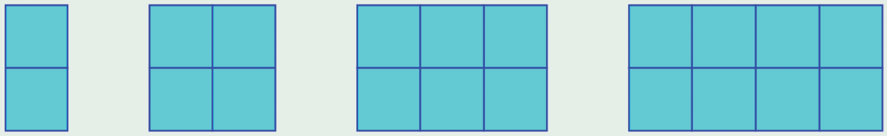
v) ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳ ಶ್ರೇಣಿ

(2) ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಸಿಗುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ನೀಡಿದ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ?

(3) ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



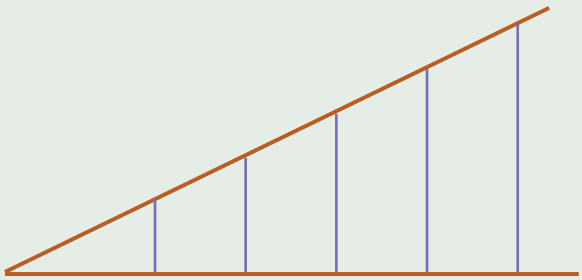
i) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯತದಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಿವೆ?

ii) ದೊಡ್ಡ ಚೌಕಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ?

iii) ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಚೌಕಗಳಿವೆ?

ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಸಿಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೇ?

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಇರುವಂತೆ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



(5) ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ

$$x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$$

ಇದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೇ?

ಸ್ಥಾನವೂ ಪದವೂ

1, 11 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಪದವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದೇ?

ಸುಲಭವಲ್ಲವೇ? 1 ರಿಂದ 11 ಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು 10 ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಪುನ: ಪುನ: 10ನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾದೀತು.

$$1,\ 11,\ 21,\ 31,\ \ldots$$

ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ : 1, 11 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪದವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೇ?

ಈ ರೀತಿಯ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

1 ರೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದೇ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ: ಅದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 11 ಸಿಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, 1 ರೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 11 ಸಿಗಬೇಕು.

ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಮಡಿ 10; ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 5 ಇನ್ನು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$1, 6, 11, 16, 21, \ldots$$

3ನೇ ಪದ 37, 7ನೇ ಪದ 73 ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೋ?

3ನೇ ಪದದಿಂದ 7ನೇ ಪದವನ್ನು ತಲುಪಲು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $7 - 3 = 4$ ಸಲ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಕೂಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ

$73 - 37 = 36$

ಅಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ 4 ಮಡಿ, 36; ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$36 \div 4 = 9$

ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು?

3 ನೇ ಪದದಿಂದ ಎರಡು ಸಲ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $37 - (2 \times 9) = 19$

ಇನ್ನು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಆರಂಭದಿಂದಲೇ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$19, 28, 37, \ldots$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 25ನೇ ಪದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

ಹಲವು ದಾರಿಗಳಿವೆ.

ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಶೇಷವೂ

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 2, 4, 6,... ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1, 3, 5,....ಇದೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. ಎರಡೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. ಎರಡೂ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2 ಆಗಿದೆ. 2ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ (ಅಥವಾ ಶೇಷ 0 ಆಗಿರುವ) ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಅಲ್ಲವೇ. ಶೇಷ 1 ಬರುವವುಗಳು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು; ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 3ರಿಂದ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಶೇಷವು 0, 1, 2 ಸಿಗುವ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು? ಭಾಗಿಸುವುದು 4ರಿಂದಾದರೋ? ಇನ್ನು ಹೀಗೂ ಆಲೋಚಿಸುವಾ. ಪದಗಳೆಲ್ಲಾ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ಪದಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

(ಯಾಕೆ?)

3 ನೇ ಪದದೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ $(25 - 3) = 22$ ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು:

$$37 + (22 \times 9) = 235$$

2 ನೇ ಪದದೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ $(25 - 2) = 23$ ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು:

$$28 + (23 \times 9) = 235$$

1 ನೇ ಪದದೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ $(25 - 1) = 24$ ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು:

$$19 + (24 \times 9) = 235$$

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎರಡು ಪದಗಳೂ, ಅವುಗಳ ಪದ ಸ್ಥಾನಗಳೂ ತಿಳಿದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ತತ್ವವೇನು?

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಮೊದಲು ಬರೆದ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ;

$$19, \quad 28, \quad 37, \ldots$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದ 9ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಶ್ರೇಣಿಯ ಒಂದು ಪದ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 9ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾದರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1000 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದ 19 ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $1000 - 19 = 981 = 109 \times 9$. ಇದು 9 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಪದ 19 ರೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ 109 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 1000 ಸಿಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ 1000 ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ 110ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಶ್ರೇಣಿ ನಿಯಮ

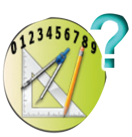
3, 5, 7, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಪದ ಯಾವುದು?

ಇಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಹೇಳಲಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಮುಂದಿನ ಪದ 9 ಆಗಲೇ ಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಉದ್ದೇಶಿಸಿದ್ದು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಮುಂದಿನ ಪದ 11 ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಆಶಯವೇನು? ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದುದರಲ್ಲಿ, ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಪದಗಳು ಯಾವುವೆಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ನಿಬಂಧನೆ ಅಥವಾ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆದ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರವೇ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳು ಯಾವುವೆಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾದೀತು.

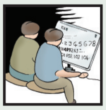
ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$x_n = 2n - 1$$
$$x_n = n^2 - n + 1$$
$$x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1$$

ಎಲ್ಲದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳು 1, 3 ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೇ?



10 ರ ಯಾವುದೇ ಘಾತವು 19, 28, 37, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ?



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ◯ ದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 24, 42, ◯, ◯, ...
ii) ◯, 24, 42 , ◯, ...
iii) ◯, ◯, 24, 42, ...
iv) 24, ◯, 42, ◯, ...
v) ◯, 24, ◯, 42, ...
vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

(2) ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) 3ನೇ ಪದ 34
6ನೇ ಪದ 67

ii) 3ನೇ ಪದ 43
6ನೇ ಪದ 76

iii) 3ನೇ ಪದ 2
5ನೇ ಪದ 3

iv) 4ನೇ ಪದ 2
7ನೇ ಪದ 3

v) 2ನೇ ಪದ 5
5ನೇ ಪದ 2

(3) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 5ನೇ ಪದ 38, 9ನೇ ಪದ 66; 25ನೇ ಪದ ಯಾವುದು?

(4) 13, 24, 35 ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ 101 ಒಂದು ಪದವೇ? 1001 ಆದರೋ?

(5) 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 3 ಶೇಷ ಸಿಗುವ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ?

(6) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚೌಕದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನೀಟಸಾಲೂ

1			4
7			28

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಖಾಲಿಯಿರುವ ಕೋಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1, 4, 28, 7 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರೋ?

(7) ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಎದುರು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯಾ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಶ್ರೇಣಿ	ಸಂಖ್ಯೆ	ಹೌದು/ಅಲ್ಲ.
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಅತಿ ಸುಲಭವಾದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ. ಇದರ ಹಲವು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಏಳು ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$$
$$2 + 3 + 4 = 9 = 3 \times 3$$
$$3 + 4 + 5 = 12 = 3 \times 4$$

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗುವುದರ ಕಾರಣವೇನು?

ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವ. ಆಗ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ $x - 1$; ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $x + 1$. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ,

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 3x.$$

ಇದು ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ.

ಈ ತತ್ವವು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾದೀತೇ?

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೋ?

ಇನ್ನು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$2, 7, 12, 17, \ldots$$

ಇದು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳು 37, 42, 47

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$37 + 42 + 47 = 126$$

ಇದು 42 ರ ಮೂರು ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ?

ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವದೇ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡುವ:

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಪದ x ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವ.

ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು y ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳುವ. ಆಗ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ $x - y$; ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ $x + y$; ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(x - y) + x + (x + y) = 3x$$

ಹಾಗಾದರೆ ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಒಂದು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವಾಗಿದೆ:

> ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ, ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲ ಪದ, ಮಧ್ಯದ ಪದ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಅದು ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನೂ ಮಾತ್ರ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮಧ್ಯದ ಪದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಬೇಡವೇ? (ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮೂರು ಮಡಿ ಅಲ್ಲವೇ)

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು:

> ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಮೊದಲ ಪದ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವೇ ಮಧ್ಯದ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

x, y, z ಇವುಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಪದಗಳಾದರೆ

- $x + y + z = 3y$
- $y = \frac{1}{2}(x + z)$

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಐದು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಕುರಿತು, ಮೊದಲ ಪದ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು? ಏಳು ಪದಗಳಾದರೋ? ಇವುಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಗಮನವೇನು?

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು

$$19, 28, 37, \dots$$

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದರ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಒಂದನೇ ಸ್ಥಾನದೊಂದಿಗಿರುವ ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಒಂದನೇ ಪದವಾದ 19 ರೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇದರ 15ನೇ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದನೇ ಸ್ಥಾನದೊಂದಿಗಿರುವ ಸ್ಥಾನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $15 - 1 = 14$; ಅಂದರೆ 15ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲ ಪದವಾದ 19ರೊಂದಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದ 9 ರ 14 ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

$$15\text{ನೇ ಪದವು } 19 + (14 \times 9) = 145$$

20ನೇ ಪದವೋ?

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆ n ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, nನೇ ಪದ

$$19 + (n - 1) \times 9 = 9n + 10$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ

$$x_n = 9n + 10$$

ಇನ್ನು

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots$$

ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾದರೋ?

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, n ನೇ ಪದ

$$\frac{1}{2} + (n - 1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

ಅಂದರೆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = \frac{1}{4}(n + 1)$$

ಆರಂಭದ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ n ನ್ನು 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 10 ರಿಂದ ಕೂಡಿಸುವುದು. ಎರಡನೇ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{4}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $\frac{1}{4}$ ಕೂಡಿಸುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಇದೇ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಯೇ?

ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಪದ f ಎಂದೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದರ nನೇ ಪದ,

$$f + (n - 1)d = dn + (f - d)$$

ಅಂದರೆ, nನ್ನು d ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $f - d$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದ ಪದವು ಸ್ಥಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = an + b$$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $x_n = an + b$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾದೀತೇ?

ಇದರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳು $an + b$, $a(n + 1) + b$ ಎಂದಾಗಿರಬಹುದಲ್ಲವೇ: ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

ಅಂದರೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ aಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = an + b$$

ಎಂದಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ a, b ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆ.

$x_n = an + b$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು a ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2}$ ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{3}$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನೋಡುವ;

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{1}{3}$ ಆದುದರಿಂದ ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $\frac{1}{3}n + b$. ಆದುದರಿಂದ ಇದರಲ್ಲಿ $n = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಮೊದಲ ಪದ $\frac{1}{3} + b$, ಆಗ

$$\frac{1}{3} + b = \frac{1}{2}$$

ಎಂದೂ ಆದುದರಿಂದ

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ

Sequence [Circle [A, n], n, 1, 10]

ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶವನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, A ಕೇಂದ್ರವೂ, ತ್ರಿಜ್ಯ 1ರಿಂದ 10 ರವರೆಗಿನ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ರಚಿಸಲು, ವೃತ್ತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು m ಎಂಬ ಒಂದು integer slider ತಯಾರಿಸಿ, ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಸಾಕು:

Sequence [Circle [A , n], n, 1, m]

ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿ nನ ಬದಲಾಗಿ 2n ಎಂದೋ 2n + 1 ಎಂದೋ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ, ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಬದಲಾಯಿಸುವ.

Min = 0 ಆಗಿ a, b ಎಂಬ ಎರಡು Slider ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ, ನಿರ್ದೇಶವಾಗಿ

Sequence [Circle [A , an + b], n, 1, m]

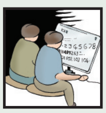
ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ, a, b ಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಹಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ವೃತ್ತ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x_n = \frac{2n+1}{6}$$

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶವು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ, ಛೇದ 6 ಆಗಿಯೂ ಸಿಗುವುದು. ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 2 ಎಂಬುದು ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ 6 ಕೂಡಾ ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಆದುದರಿಂದ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪದವೂ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.



(1) ಮೊದಲ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗುವಂತೆ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ 1, ಮೊದಲ 4 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆಗಿದೆ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮದ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಮೊದಲ 4 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ 8ನೇ ಪದ 12, 12ನೇ ಪದ 8 ಆಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವೇನು?

(6) ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಹಕ್ಕಿ ಲೆಕ್ಕ (**ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ.

"ನಾವು, ನಮ್ಮಷ್ಟು, ನಮ್ಮರ್ಧ, ಅದರರ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು" .... ಹಕ್ಕಿ ಹೇಳಿತು.

ಹಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಹಕ್ಕಿ ಹೇಳಿದ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಹಕ್ಕಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಎರಡೂ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) ಮೊದಲ ಪದ $\frac{1}{3}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{1}{6}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(8) ಮೊದಲ ಪದ $\frac{1}{3}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆಯೆಂದೂ, ಯಾವುದೇ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(9) 4, 7, 10, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(10) 5, 8, 11, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದೂ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

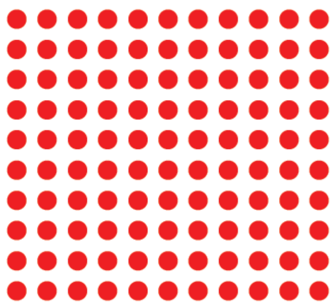
(11) ಒಂದು ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಅದರ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 36° ಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(12) $\frac{11}{8}, \frac{14}{8}, \frac{17}{8}, \ldots$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯಾ ಪದಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಇದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗಿದೆಯೇ?

ಮೊತ್ತಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಚುಕ್ಕಿಗಳಿವೆ?



ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಎಣಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ 11, ಅಂತಹ 10 ಸಾಲುಗಳು

$10 \times 11 = 110$

ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಚುಕ್ಕಿಗಳಿವೆ?

ಒಂದೊಂದು ಸಾಲನ್ನು ಎಣಿಸಿ ನೋಡುವ:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸುಲಭ ದಾರಿ ಇದೆಯೇ?

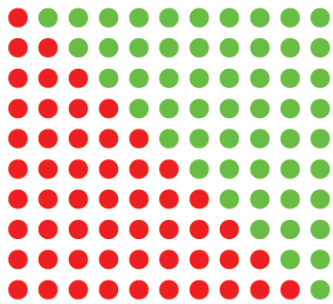
ಇದನ್ನು ಆಯತವಾಗಿಸಿದರೋ?

ನಿಯಮಗಳ ಭಾಷೆ

ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದಿದ್ದರೆ, ಶ್ರೇಣಿಯ ನಿಯಮವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸಬೇಕೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಹಾಗಿದ್ದರೂ ಕೆಲವು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಿಯಮವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವನ್ನು ಇದುವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿಲ್ಲ.
ಅದೇ ರೀತಿ, πಯ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರುವ 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾನದ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವೂ ಇಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳದೆ ನಿರ್ವಾಹವಿಲ್ಲ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ.

ಇದನ್ನು ತಳೆಕೆಳಗಾಗಿಸಿ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದೊಂದಿಗೆ ಈ ರೀತಿ ಸೇರಿಸಿ ಇಡುವ.



ಈ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದಂತೆ,

$10 \times 11 = 110$ ಚುಕ್ಕಿಗಳಿವೆ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೋ? 110 ರ ಅರ್ಧ 55

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಚುಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಬರೆಯುವ.

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆದರೆ,

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

ಆಗ

$$s = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ಇದೇ ರೀತಿ 1ರಿಂದ 100ರವರೆಗಿನ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$s = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

ಒಂದು ಗಣಿತ ಕಥೆ

ಗೌಸ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನ ಕುರಿತು ಕೇಳಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಎಳೆಯ ಪ್ರಾಯದಲ್ಲಿಯೇ ಈತನು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅಸಾಧಾರಣ ಪ್ರತಿಭೆಯನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿದ್ದನು. ಅದರ ಕುರಿತಾಗಿ ಒಂದು ಕಥೆಯಿದೆ.

ಗೌಸ್‌ಗೆ ಹತ್ತು ವರ್ಷ ಪ್ರಾಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಹದ್ದುಬಸ್ತಿನಲ್ಲಿಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಒಂದರಿಂದ ನೂರರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೇಳಿದರು. ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಎಳೆಯ ಗೌಸ್ ಉತ್ತರಿಸಿದ: 5050. ಈ ರೀತಿ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೀಡಿದ: 1ಮತ್ತು 100 ಅಂದರೆ 101; ಇದೇ ರೀತಿ 2 ಮತ್ತು 99 ಅಂದರೆ 101; ಹೀಗೆ 50 ಜೋಡಿಗಳು. ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ

$50 \times 101 \quad 5050.$

ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$2s = \overbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 + 101}^{100 \text{ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}}$$
$$= 100 \times 101$$

ಇದರಿಂದ

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100ರ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

ಒಂದರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಅನೇಕ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$$

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಇತರ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2, 4, 6, ..., 100 ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೋಡುವ. ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವಲ್ಲವೇ.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

ಎಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಇದರಿಂದ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಮೊದಲ n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$2, 4, 6, \ldots, 2n$$

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n\,(n + 1)$$

ಇದೇ ರೀತಿ 3ರ ಮೊದಲ n ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನೋಡಿರಿ.

ಮೊದಲ n ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಮೊದಲು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾ.

$$x_n = 2n - 1$$

ಇಲ್ಲಿ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned} x_1 &= (2 \times 1) - 1 \\ x_2 &= (2 \times 2) - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (2 \times n) - 1 \end{aligned}$$

ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮೇಲಿನಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}} \\ &= 2\,(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \times \frac{1}{2}\, n\,(n+1) - n = n^2$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, 1 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ವರ್ಗವೂ ವರ್ಗಮೂಲವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಈಗ ಅದಕ್ಕೆ ಗಣಿತಪರವಾದ ಆಧಾರವಾಯಿತು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೂ

$$x_n = an + b$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ಎಂದು ಬರೆದು, ಕೂಡಿಸುವ.

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= 2a + b \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= na + b \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b+b+\ldots+b)}^{n \text{ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}}$$
$$= a\,(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$
$$= a\,\frac{n\,(n+1)}{2} + nb$$
$$= \frac{1}{2}an\,(n+1) + nb$$

ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = an + b$$

ಆದರೆ, ಅದರ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}an\,(n+1) + nb$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$1, 4, 7, \ldots$$

ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 100 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

$$x_n = 3n - 2$$

ಹಾಗಾದರೆ 100 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 100 \times 101 + (100 \times (-2)) = 14950$$

ಒಟ್ಟಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{2} \times 3 \times n\,(n+1) - 2n = \frac{1}{2}\,(3n^2 - n)$$

ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊತ್ತದ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$$\frac{1}{2}an\,(n+1) + nb = \frac{1}{2}n\,(a\,(n+1) + 2b)$$
$$= \frac{1}{2}n\,((an+b) + (a+b))$$

ಇದರಲ್ಲಿ $an + b$ ಎಂಬುದು ಶ್ರೇಣಿಯ nನೇ ಪದವಾದ x_n, $a + b$ ಎಂಬುದು ಶ್ರೇಣಿಯ 1 ನೇ ಪದವಾದ x_1 ಅಲ್ಲವೇ. ಆಗ

ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ಎಂಬ ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ರೀತಿ

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಇದರಿಂದ, x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆದರೆ,

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{3}{2}\,n(n+1) + n$$

ಆಗ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}\,n(n+1) - n\right)$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)\,(2n+1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}n\,(x_n + x_1)$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ

ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದರ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ 1, 4, 7, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ 100ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮೊದಲು 100ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$1 + (99 \times 3) = 298$$

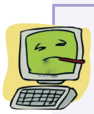
ಇನ್ನು ಮೊದಲ 100 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (298 + 1) = 14950.$$

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{1}{2}an\,(n + 1) + \ b = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

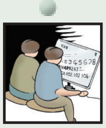
ಇಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a + b$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಶ್ರೇಣಿಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊತ್ತವೆಂದರೆ, n^2 ಮತ್ತು n ನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $pn^2 + qn$ ಎಂದಾಗಿದೆ.



ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪವನ್ನು ತಿಳಿದರೆ, ಅದರ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಅನೇಕ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪೈಥನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ sum ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೊದಲ ನೂರು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಸಾಕು.



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 25 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 11, 22, 33, ... ii) 12, 23, 34, ... iii) 21, 32, 43, ...

iv) 19, 28, 37, ... v) 1, 6, 11, ...

(2) 6, 10, 14, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ನಂತರದ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?

(3) 6, 10, 14, ..., ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಹಾಗೂ 15, 19, 23, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿ ಇವುಗಳ ಮೊದಲ 20ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(4) ಒಂಬತ್ತರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಾದ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) $5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times \ldots \times 5^{2n} = (0.008)^{-30}$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $n^2 + 2n$ ii) $2n^2 + n$ iii) $n^2 - 2n$

iv) $2n^2 - n$ v) $n^2 - n$

(7) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

i) $51 + 52 + 53 + \ldots + 70$

ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

(8) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 350, ಹಾಗೂ ಮೊದಲ 5 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 100 ಆಗಿದೆ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(9) 16, 24, 32, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ 9ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(10) 4

7 10

13 16 19

22 25 28 31

....

....

....

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 20ನೇ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಸಂಶೋಧನೆ

- ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲ ಅದರದ್ದೇ ಪದಗಳಾಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಷ್ಟೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೂ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳು ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

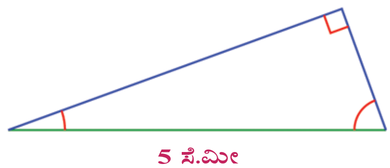
ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಶ್ರೇಣಿಗಳ ನಿಯಮವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯುವುದು. • ವಿವಿಧ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಪದಗಳು ಪದಸ್ಥಾನಗಳು, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು. • ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು.			

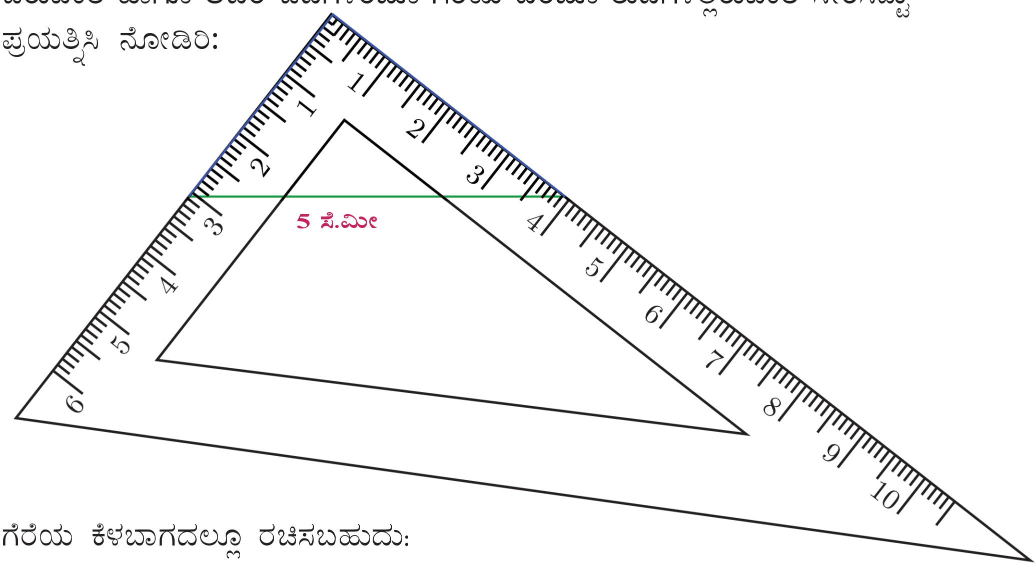
ವೃತ್ತಗಳು

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಕರ್ಣವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಲಂಬಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಬಹುದು. ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು?

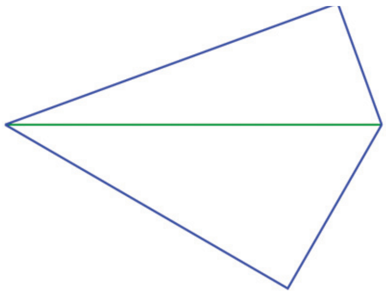
5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅದರ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಇಷ್ಟವಿರುವ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 90° ಯಿಂದ ಈ ಕೋನವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನವನ್ನೂ ರಚಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು:



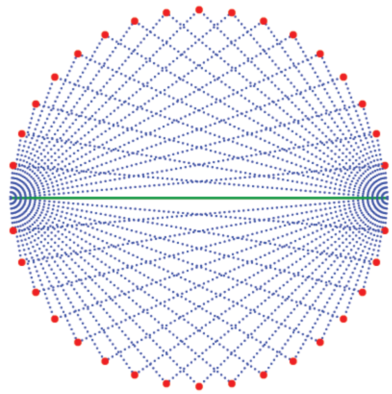
ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ರಚಿಸಬಹುದು: ಲಂಬ ಮೂಲೆಯು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಅದರ ಬದಿಗಳೆರಡೂ ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:



ಗೆರೆಯ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ರಚಿಸಬಹುದು:



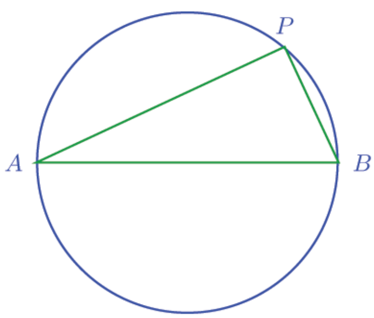
ಇಂತಹ ಅನೇಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೂರನೆಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗಮನಿಸಿರಿ: ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು? ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡೋಣ.



ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತ ಉಂಟಾಗುವುದನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ ಮೂಲಕ ಆಕರ್ಷವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು. ಮೊದಲು Segment with Given Length ಉಪಯೋಗಿಸಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು 0 ಯಿಂದ 180 ರವರೆಗೆ 5 ರಂತೆ ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಬದಲಾಗುವ a ಎಂಬ Slider ಮಾಡಿರಿ. Angle with Given Size ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಗೆರೆಯ ಎಡ ತುದಿಯಲ್ಲಿ a° ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ counter clockwise ಆಗಿಯೂ ಬಲಬಾಗದಲ್ಲಿ (90 – a)° ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ clockwise ಆಗಿಯೂ ಕೋನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳೊಂದಿಗೆ Line ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಗೆರೆಗಳಿಗೂ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮೂಲೆಗೂ Trace On ನೀಡಿ, Slider ಗೆ Animation On ನೀಡಿರಿ.

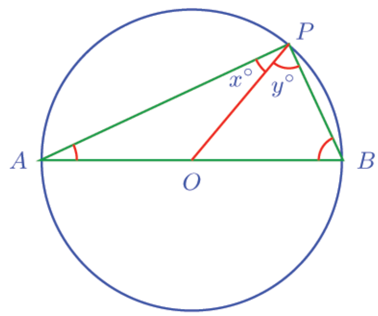
ಮಟ್ಟವೂ ವೃತ್ತವೂ

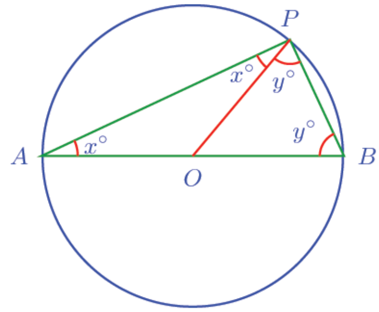
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ತುದಿಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನದ ಕುರಿತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?



P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದುದು ಹೇಗೆ?

P ಯನ್ನೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿರಿ. ಆಗ P ಯ ಕೋನವು ಎರಡಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು:





ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದ AOP ಮತ್ತು BOP ಎಂಬವುಗಳು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. (ಕಾರಣ?). ಆಗ A ಯ ಕೋನ $x°$ ಮತ್ತು B ಯ ಕೋನ $y°$ ಆಗಿವೆ.

ABP ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

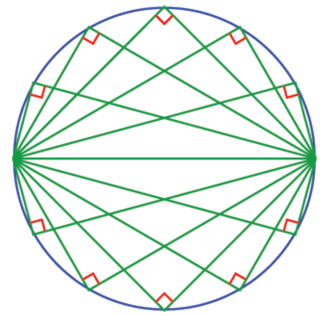
$180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x + y + (x + y) = 180$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ

$$x + y = 90$$

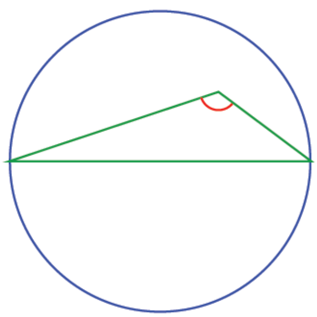
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.



ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ವೃತ್ತದ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೇ ಆಗಿದೆ.

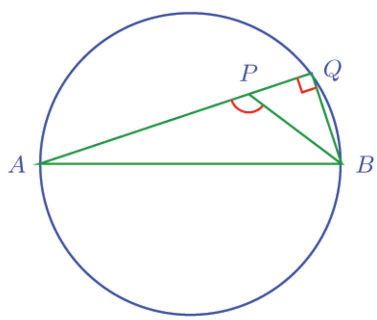
ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.



ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಲಂಬಕೋನವು ಸಿಗುವುದು. ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ?

ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ತಲುಪುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ; ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ಅಗ್ರ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ:

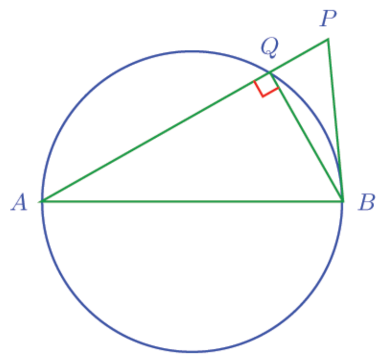


ಈಗ ΔPQB ಯಲ್ಲಿ P ಯಲ್ಲಿರುವ ಹೊರಕೋನವಾಗಿದೆ APB. ಇದು, ತ್ರಿಕೋನದ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ Q ವಿನ ಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾದುದರಿಂದ, $\angle APB$ ಯು ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದೆಂದೂ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೇ?

ಆಗ ΔPQB ಯುಲ್ಲಿ, $\angle APB$ ಎಂಬುದು ಒಳಕೋನವಾಗಿದೆ; ಲಂಬಕೋನವಾದ AQB ಹೊರಕೋನವೂ ಆಗಿದೆ. ಆಗ $\angle APB$ ಯು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಆಯಿತಲ್ಲವೇ?



ಇನ್ನು, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಲಂಬಕೋನ ಲಭಿಸಿತು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಆಗಲಾರದು (ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಈ ಕೋನ ಲಂಬಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಲ್ಲವೇ?); ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೂ ಆಗಲಾರದು (ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಈ ಕೋನ ಲಂಬಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ). ಆದುದರಿಂದ ಈ ಬಿಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಆಗ ಸಿಕ್ಕಿದುದೇನು?

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಿಂದ ರಚಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವುದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

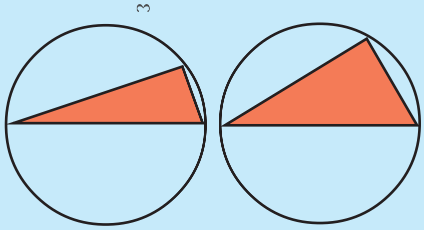
ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಗೆರೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಂಗಮಿಸುವುದು ಆ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಸಿಗಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದು ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೇ?

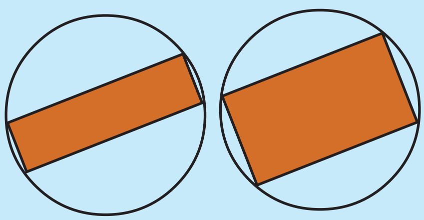
ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ ಸಾಗುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗುವುದೇ?

ಚೌಕ ವಿಶೇಷತೆ

ವೃತ್ತದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ವಿಭಿನ್ನ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ:

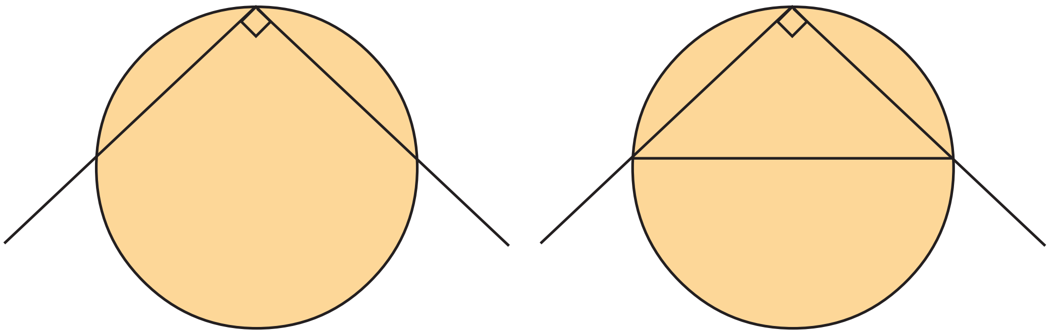


ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಬಿಂದು ಯಾವ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲಪುವಾಗ? ಆಗ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ನಾಲ್ಕೂ ಶಿರಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಅನೇಕ



ಆಯತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತದ ವಿಶೇಷತೆಯೇನು?



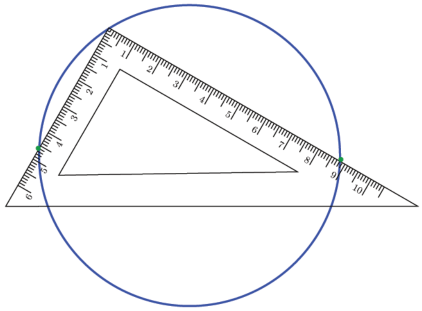
ಈಗ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನವೂ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವೂ ಆಯಿತು. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಅದರ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ

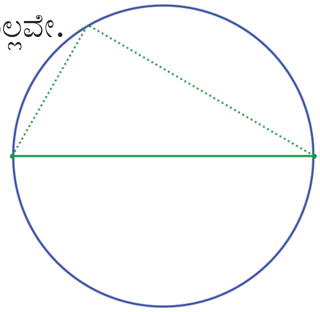
ಇನ್ನು ಈ ತತ್ವಗಳ ಒಂದು ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಬಳೆ ಅಥವಾ ಪಾತ್ರೆಯ ಮುಚ್ಚಳವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು, ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?

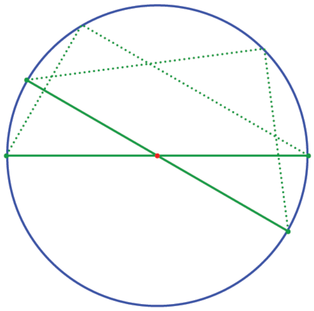
ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಒಂದು ಮಟ್ಟದ ಲಂಬಮೂಲೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರಿಸಿ, ಮಟ್ಟದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಸಾಗುವ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗೆರೆ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

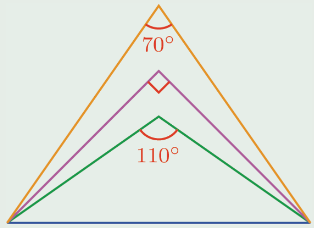


ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ:

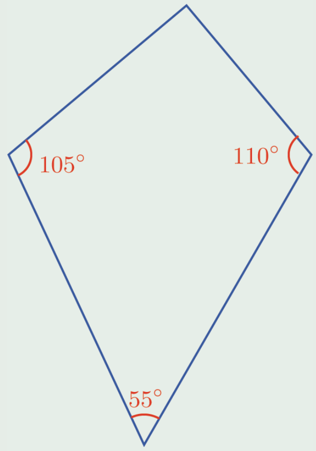


A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ B, C ಎಂಬೀ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Rayಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ B ಯಿಂದ C ಯ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. B ಯ ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. CD ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆಯೇ? B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಶಿರ ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿರುವುದೇ, ಹೊರಗಿರುವುದೇ ಅಥವಾ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

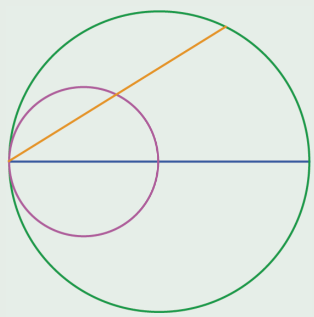


(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕರ್ಣವೂ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಆ ಕರ್ಣದಲ್ಲಲ್ಲದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೋ, ಹೊರಗೋ ಅಥವಾ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



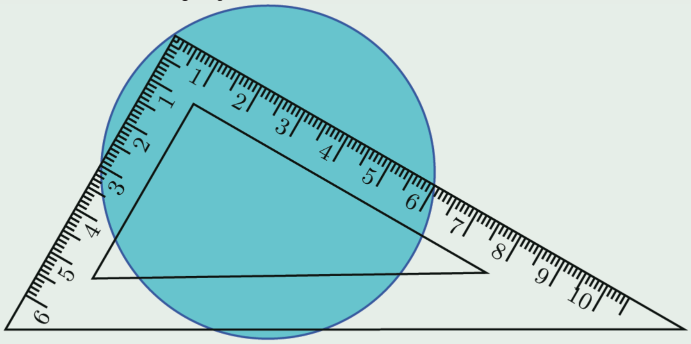
(3) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 12ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 13ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವೂ ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಶಿರದ ಸ್ಥಾನವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಎಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಗೆರೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಚಾಪವನ್ನು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತವು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

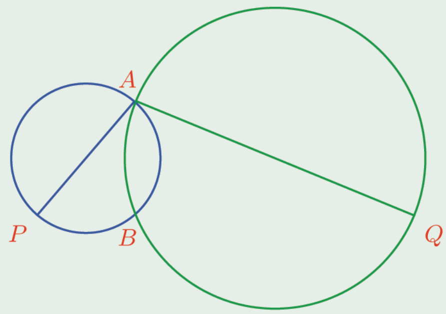


(5) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ, ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



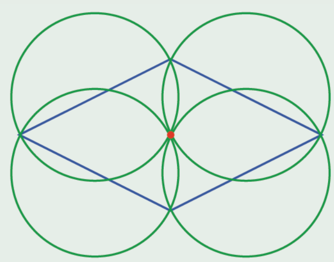
(7) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು A ಮತ್ತು B ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. A ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳ ಉಳಿದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳು P ಮತ್ತು Q ಗಳಾಗಿವೆ:



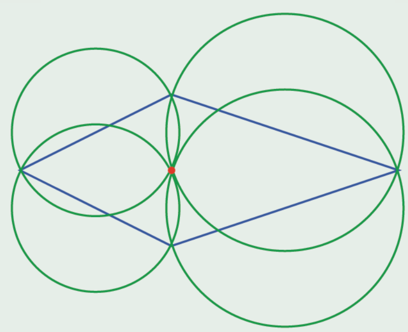
i) P, B, Q ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) PQ ಎಂಬ ಗೆರೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ PQ ವಿನ ಉದ್ದ ಆ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

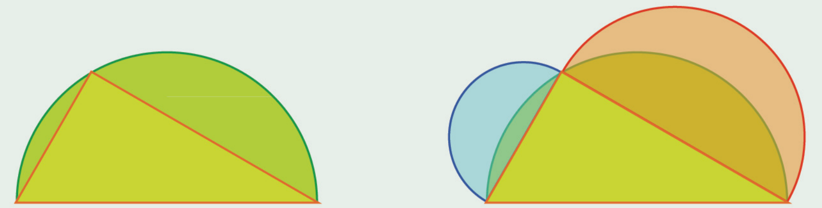
(8) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳೂ ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗುವ ವೃತ್ತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



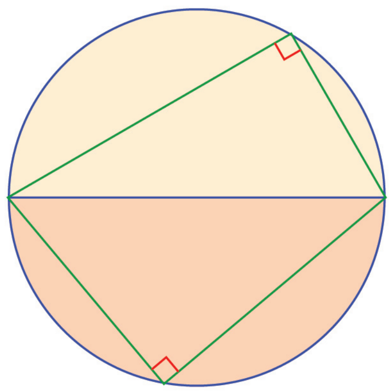
(9) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ಆಮೇಲೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ರಚಿಸಲಾಯಿತು.



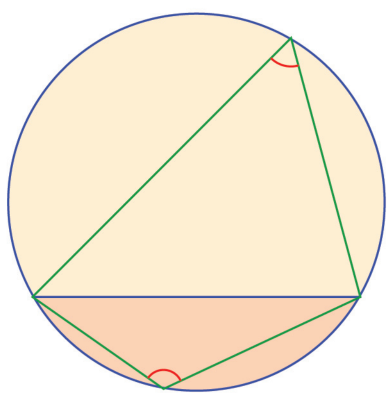
ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ನೀಲ ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ಚಂದ್ರಕಲೆಗಳಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಿಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಜ್ಯಾ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಚಾಪ

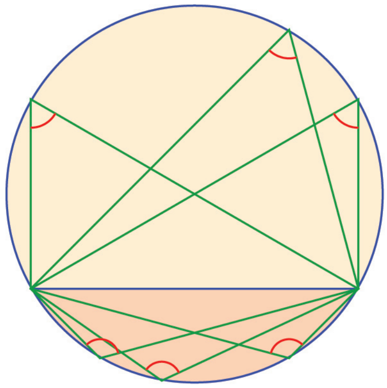
ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಾಸವೂ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವುದು; ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೂ ಲಂಬಕೋನ ಸಿಗುವುದು.



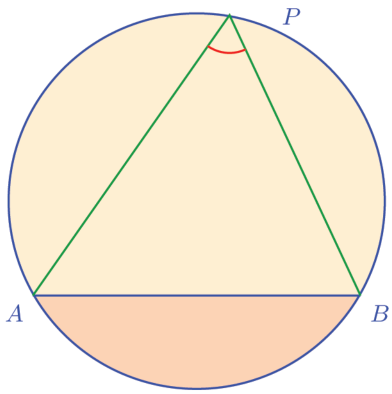
ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಜ್ಯಾ ಆದರೇ?



ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲ, ಕೋನಗಳು ಲಂಬವೂ ಅಲ್ಲ.
ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವೇ?

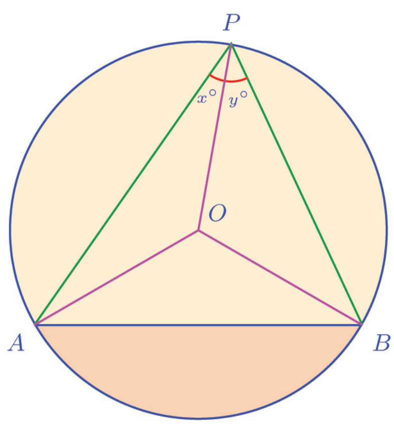


ನಾವು ನೋಡುವ. ಮೊದಲು ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ:



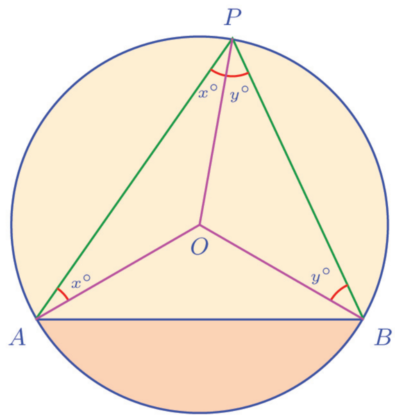
A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ B, C, D ಎಂಬೀ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. BC, CD, BD ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ. ∠D ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ D ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? B, C ಎಂಬಿವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ∠D ಯು ಲಂಬ ಕೋನ ಆಗುವುದು ಯಾವಾಗ? ಲಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು ಯಾವಾಗ?

ವ್ಯಾಸದ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ O ವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ. ಈ ಗೆರೆ P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು $x°$, $y°$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಇಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಜ್ಯಾದಲ್ಲಿಯೇ ಇಲ್ಲದ ಕಾರಣ OA, OB ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ.



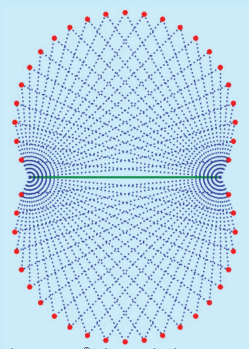
ವ್ಯಾಸದ ವಿಚಾರದಂತೆಯೇ ಇದರಲ್ಲೂ *OAP, OBP* ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ *A* ಯ ಮತ್ತು *B* ಯ ಕೋನಗಳ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನಂತೆ ಆ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸೇರಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಆದುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಹಳೆಯ ತಂತ್ರವು ಫಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

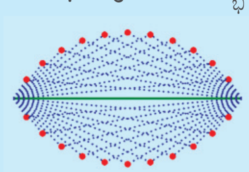


ವೃತ್ತ ವಿದ್ಯೆ

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



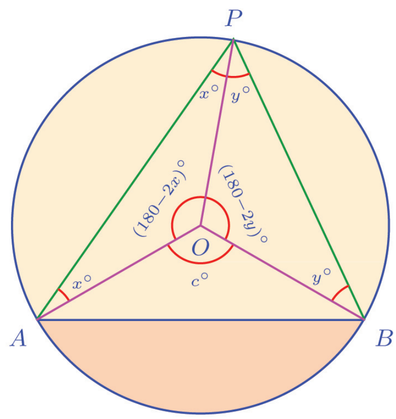
ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ $60°$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಇಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. $120°$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಲಭಿಸುವುದು. ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ 60^0



ಮತ್ತು 120^0 ಕೋನವನ್ನೂ ತೆಗೆದು ನೋಡಿರಿ. ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ $30°$ ಕೋನಗಳಾದರೆ ಪೂರ್ಣವೃತ್ತ ದೊರೆಯಲು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಕೋನವೆಷ್ಟು?

ಬದಲಾಗಿ *O* ವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡೋಣ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $\angle AOB = c°$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$2(x + y) = c$$

ಎಂದೂ, ಆಮೇಲೆ

$$\angle APB = (x + y)° = \frac{1}{2}c°$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

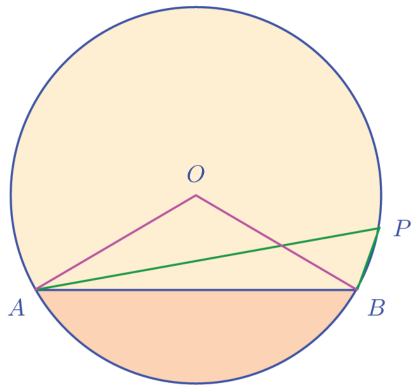
ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಚಾರವೆಂದರೆ, *A, B* ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದ ನಂತರ, *P* ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವಾಗ, *x, y* ಎಂಬಿವುಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಾದರೂ, *c* ಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

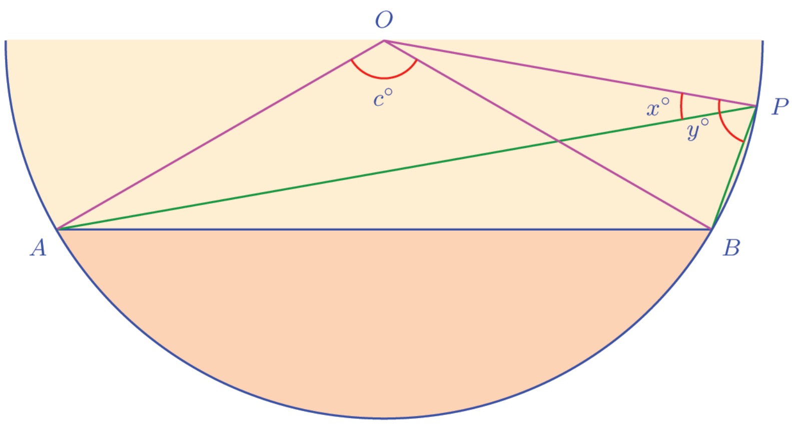
ಆಗ P ಯ ಸ್ಥಾನವು AB ಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಆದರೂ $\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$ ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದೇ?

ಹೀಗೆ ಆದರೋ?

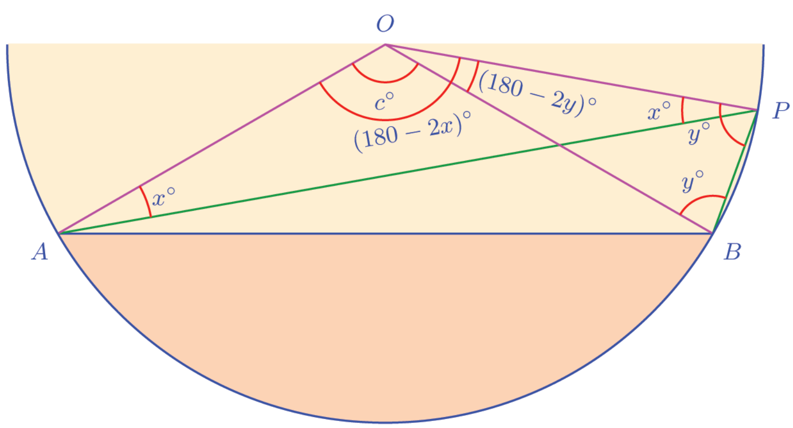
ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ $\angle APO = x^\circ$ ಎಂದೂ $\angle BPO = y^\circ$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ

ಕೋನಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಲು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಹಿರಿದಾಗಿಸುವ.





OAP, OBP ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಇತರ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯುವ.



P ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಾದ

$$\angle APB = (y - x)^\circ$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು; O ವಿನಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಂದ

$$c = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)$$

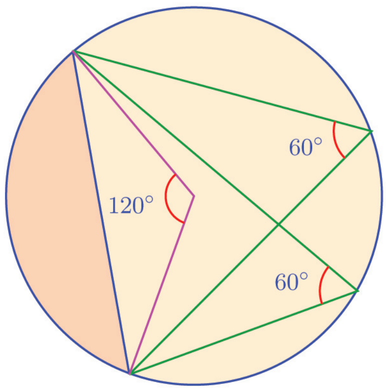
ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ ಪುನ:

$$\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$$

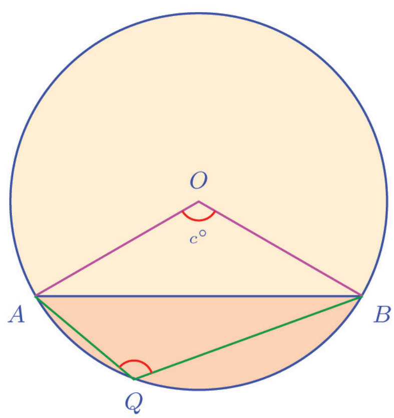
ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಭಾಗದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು, ಅವುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸಣ್ಣ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ:

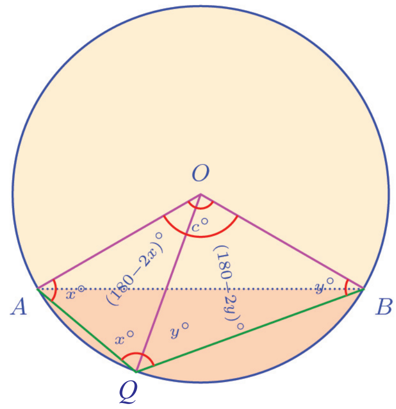


A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ B, C, D ಎಂಬೀ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A ಯೊಂದಿಗೂ Dಯೊಂದಿಗೂ ಜೋಡಿಸಿರಿ.

∠BDC, ∠BAC ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಎರಡು ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

B, C, D ಎಂಬಿವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



OQ ವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಆಗ ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಕೋನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

O ವಿನಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ

$$c = (180 - 2x) + (180 - 2y)$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

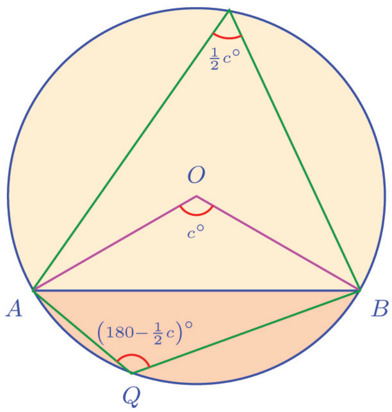
$$2(x + y) = 360 - c$$

ಎಂದೂ ಆ ಮೇಲೆ

$$\angle AQB = (x + y)^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

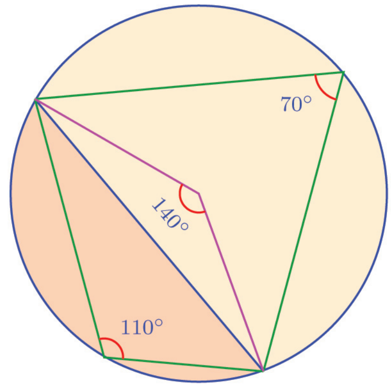
ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ನೋಡೋಣ:

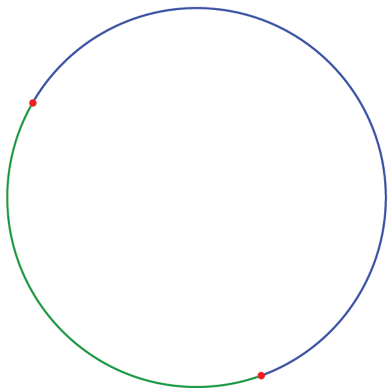


ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಭಾಗ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ಭಾಗವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು. ದೊಡ್ಡ ಭಾಗದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನವು, ಅವುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ; ಸಣ್ಣ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಕೋನವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧವನ್ನು 180°ಯಿಂದ ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಆ ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಎರಡೂ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 140° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಜ್ಯಾವು, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಭಾಗದಲ್ಲಿ $\frac{1}{2} \times 140° = 70°$ ಕೋನವೂ, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಭಾಗದಲ್ಲಿ $180° - \left(\frac{1}{2} \times 140°\right) = 110°$ ಕೋನವೂ ಉಂಟಾಗುವುದಾಗಿದೆ.

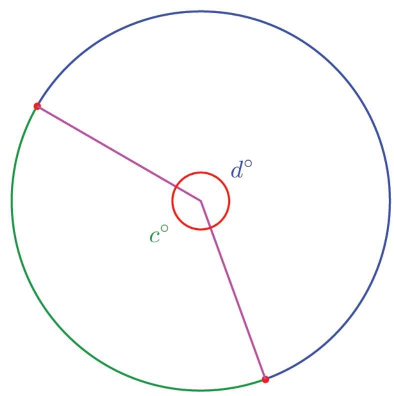


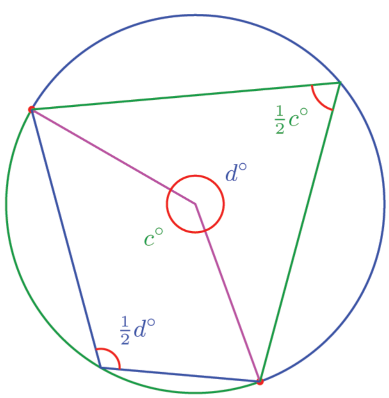


ವೃತ್ತದ ಚಾಪಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಈ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾದ ತತ್ವವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಚಾಪಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಾಪವನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದು ಚಾಪದ **ಮರುಚಾಪ (alternate arc)** ಅಥವಾ **ಪೂರಕ ಚಾಪ (complementary arc)** ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳು $c°, d°$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

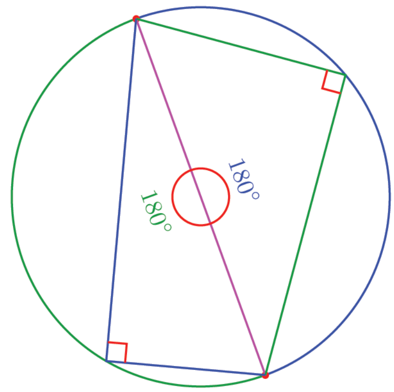
$$c + d = 360.$$





ಇನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಾಪದಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ್ದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ದೊಡ್ಡ ಚಾಪದಲ್ಲುಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $\frac{1}{2}c°$; ಸಣ್ಣ ಚಾಪದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ,

$$\left(180 - \frac{1}{2}c\right)° = \frac{1}{2}(360 - c)° = \frac{1}{2}d°$$



ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳಾದರೇ? ಚಿತ್ರವು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವುದು:

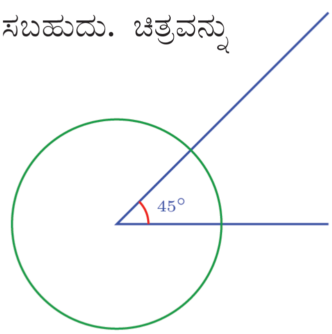
ಆಗ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಚಾಪವಾದರೂ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಮರು ಚಾಪದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನ.

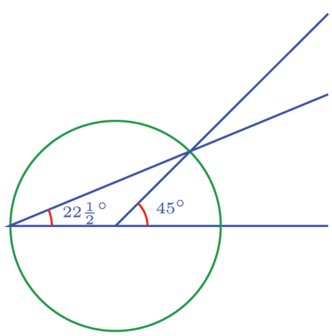
ಒಂದು ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲುಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವೆಂದೂ ಇದರಿಂದ ಸಿಗುವುದು; ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಮೊದಲನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}d° = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)°$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪುನ: ನೆನಪಿಸಿದರೆ, ಮರು ಚಾಪಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180^0 ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಮೊತ್ತ 180^0 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಜತೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳು** (supplementary angles) ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿದೆ. ಆಗ ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಚಾಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಜತೆ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ.

ಕೋನಗಳನ್ನು ಅರ್ಧ ಮಾಡಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



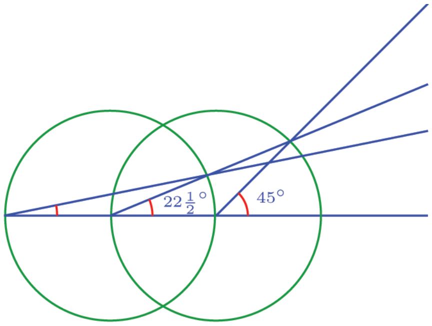
ಕೋನದ ಮೂಲೆಯು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅದು



ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಕೋನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಗೆರೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ ಸಾಗುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಯಿತು.

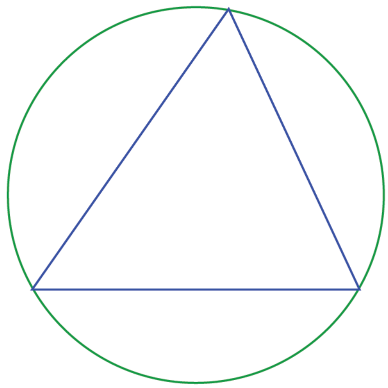
ಇದೇ ರೀತಿ ಪುನಃ ರಚಿಸಿದರೇ?

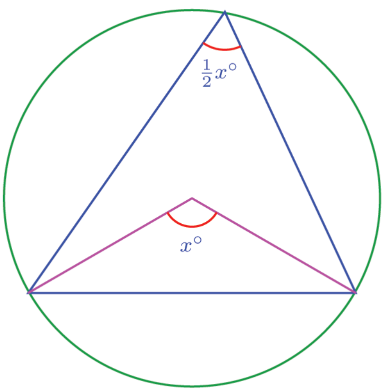
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯೆಷ್ಟು?



ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲೂ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೋನಗಳು $30°, 70°, 80°$ ಹಾಗೂ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ.

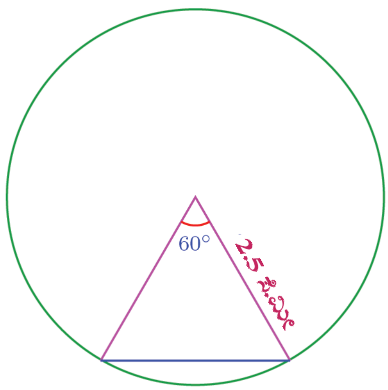
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ ಪರಿವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲವೇ.





ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವೂ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು, ತ್ರಿಕೋನದ ಆ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿರುವುದು.

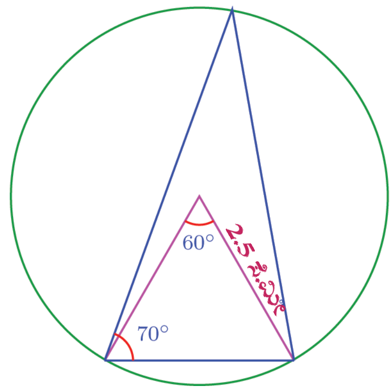
ಆಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಮೊದಲು 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $60°$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ; ಅದರ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ $30°$ ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜವಾಯಿತು.

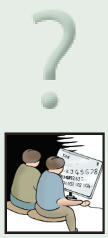


ಇನ್ನು ಈ ಭುಜದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 70° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಭುಜವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಉದ್ದೇಶಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವಾಯಿತು.

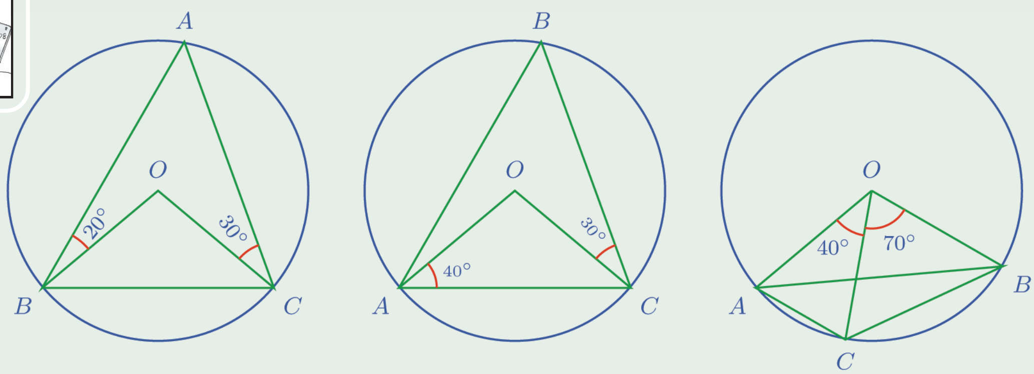
ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 80°ಯೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಕಾರಣ?)

ಇದರಿಂದ ಒಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು: ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ಅನೇಕ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು; ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನ ನಿರ್ಧಾರವು ಪೂರ್ತಿಯಾಗುವುದು.

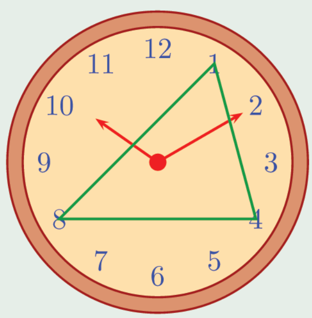




(1) ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು A, B, C ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೂ ಆಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ABC, OBC ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದ 1, 4, 8 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು.



ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗಡಿಯಾರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಷ್ಟು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು?

(3) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಚಾಪವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಭಾಗಗಳು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕು.

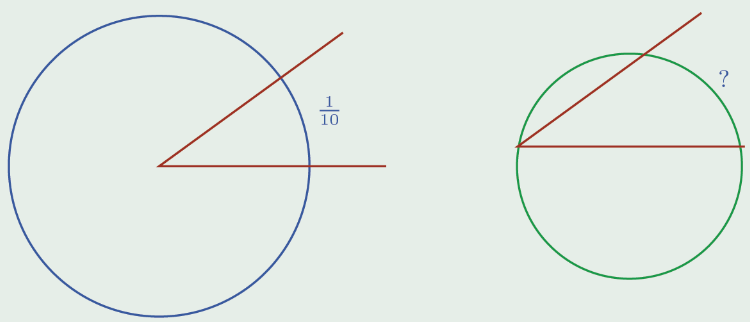
i) ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 80°

ii) ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 110°

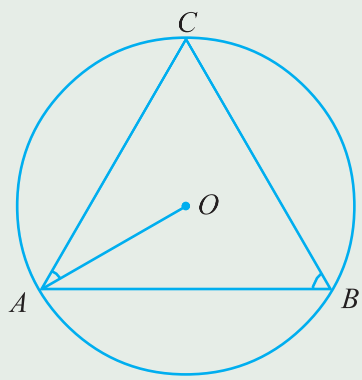
iii) ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳ ಅರ್ಧ.

iv) ಒಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ಕೋನಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿ.

(4) ಒಂದು ಸರಳನ್ನು ಎರಡಾಗಿ ಬಗ್ಗಿಸಿ, ಅದರ ಮೂಲೆಯನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರಿಸಿದಾಗ, ವೃತ್ತದ $\frac{1}{10}$ ಭಾಗ ಅದರೊಳಗಾಯಿತು; ಇದೇ ಸರಳಿನ ಮೂಲೆಯನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಾಗ, ಆ ವೃತ್ತದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವು ಅದರೊಳಗಾಗುವುದು ?

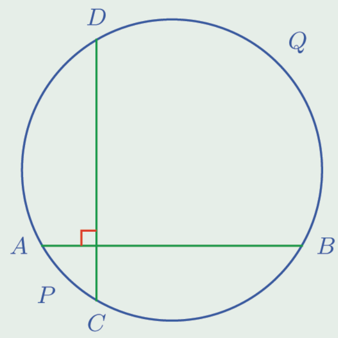


(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು A, B, C ಎಂಬವುಗಳು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. $\angle OAC + \angle ABC = 90^\circ$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

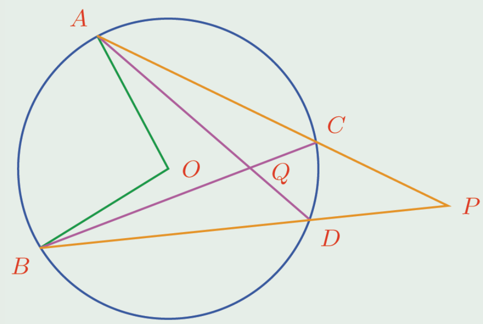


(6) ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳು $32\frac{1}{2}^\circ$, $37\frac{1}{2}^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(7) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB, CD ಎಂಬಿವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆ. APC, BQD ಎಂಬೀ ಚಾಪಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

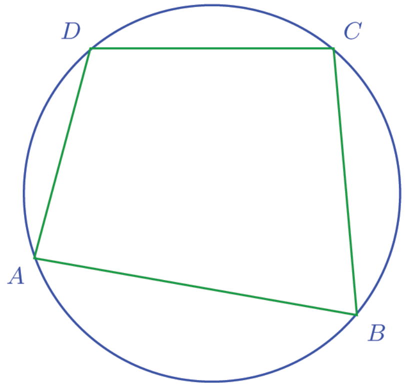


(8) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A, B, C, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿವೆ. AC, BD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು P ಯಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುವು; AD, BC ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು Q ವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು. AB ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪ O ವಿನಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವು P ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು Q ವಿನಲ್ಲುಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



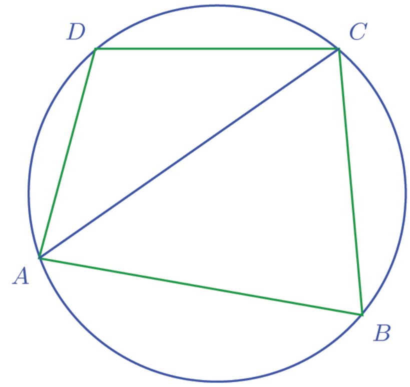
ವೃತ್ತವೂ ಚತುರ್ಭುಜವೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



A, B, C, D ಎಂಬೀ ಮೂಲೆಗಳ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

AC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (Polygon ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.) Angle ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕೋನಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಈಗ B ಮತ್ತು D ಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು, AC ಎಂಬ ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡುಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿವೆ.

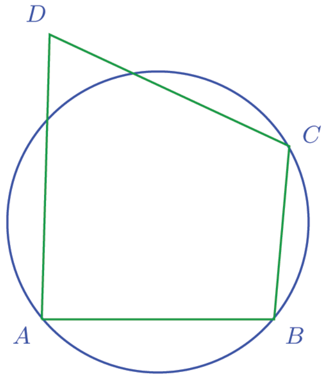
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, BD ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ A ಮತ್ತು C ಯ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

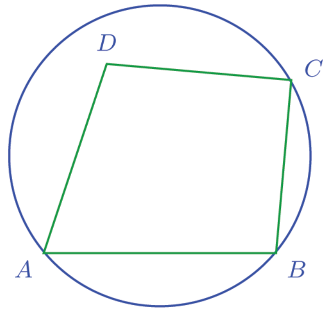
ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

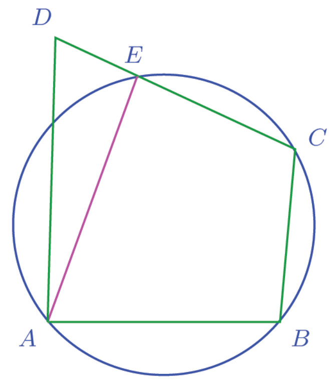
ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾದರೆ ಅದರ ವಿರುದ್ಧಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುವುವು.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ನಾಲ್ಕೂ ಮೂಲೆಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಇದಕ್ಕೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಲು, ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. (ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ?) ಇನ್ನು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಶಿರ ಅದು ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದಾದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಶಿರ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿರಬಹುದು. ಅಲ್ಲವಾದರೆ ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿರಬಹುದು.







ಮೊದಲನೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡುವ. ವೃತ್ತವು CD ಯನ್ನು ಹಾದು ಹೋಗುವ ಬಿಂದು E ಮತ್ತು A ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ, ವೃತ್ತದೊಳಗೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜವಾಯಿತು:

ಈಗ A, B, C, E ಎಂಬಿವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ,

(1) $$\angle B + \angle AEC = 180°$$

ಇನ್ನು **ಮಟ್ಟ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಮತ್ತು ಹೊರಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚರ್ಚೆಯಂತೆಯೇ,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

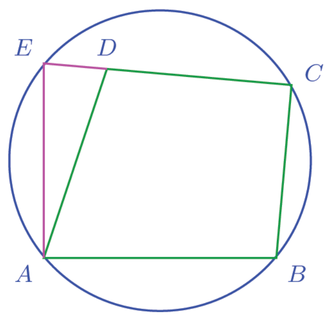
ಎಂದೂ, ಆದುದರಿಂದ

(2) $$\angle D < \angle AEC$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇಲ್ಲಿ (1), (2) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ,

$$\angle B + \angle D < 180°$$

ಎಂದು ಕಾಣಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಇನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, CD ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು A ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ:



ಇದರಲ್ಲಿ

(3) $$\angle B + \angle E = 180°$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ΔEAD ಯಿಂದ

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ

(4) $$\angle ADC > \angle E$$

(3), (4) ಎಂಬೀ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ A, B, C ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ D ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Polygon ಉಪಯೋಗಿಸಿ ABCD ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. D ಯ ಸ್ಥಾನವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗುವ $\angle D, \angle B$ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗುವುದೆಂದು ಕಂಡೆವಲ್ಲವೇ. D ಯ ಸ್ಥಾನವು ವೃತ್ತದ ಹೊರ ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವಾಗಲೋ? D ಯ ಸ್ಥಾನವು ವೃತ್ತದಿಂದ ದೂರವಾದಂತೆ ಈ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? D ಯು ವೃತ್ತದ ಒಳ ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವಾಗಲೋ?

ಆಗ ಕಂಡಿದ್ದೇನು?

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ರಚಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಶಿರವಿರುವುದಾದರೆ, ಆ ಶಿರ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು; ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಾದರೆ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದು.

(ನಾಲ್ಕನೆಯ ಶಿರ ವೃತ್ತದಲ್ಲೇ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ ಈ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ)

ಇನ್ನು ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ $ABCD$ ಯಲ್ಲಿ $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ಆಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. A, B, C ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

D ಯು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದೇ? ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ $\angle B, \angle D$ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲ.

D ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದೇ? ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಾದರೆ $\angle B, \angle D$ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಅಲ್ಲ.

ಹೊರಗೂ ಒಳಗೂ ಅಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, D ಯು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದು.

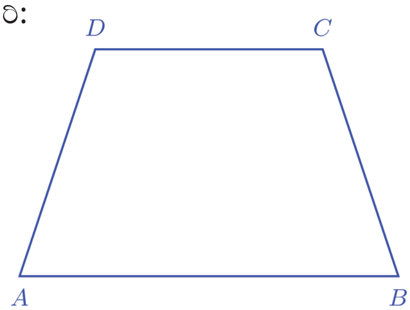
ಅಂದರೆ,

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂಬುದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ **ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ** (cyclic quadrilateral) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಈ ನೋಡಿದ್ದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

ಆಯತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ. ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬಗಳೂ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



$ABCD$ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$$\angle A = \angle B$$

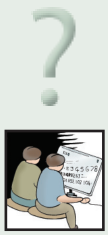
ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

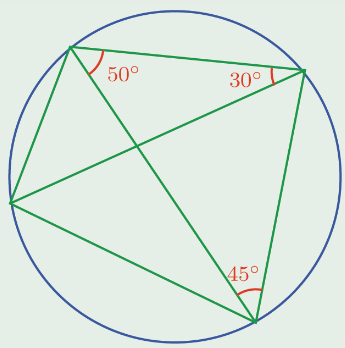
ಈ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ $ABCD$ ಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.



(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನೂ, ಕರ್ಣಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

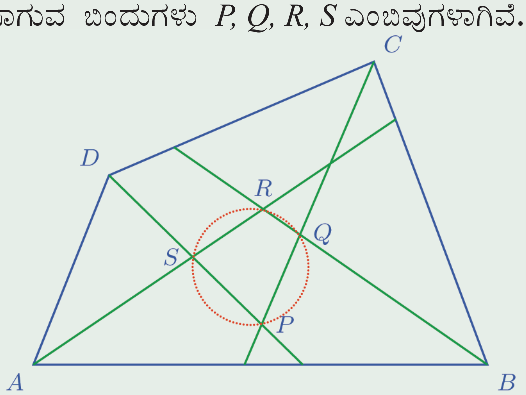


(2) ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಶಿರದ ಹೊರಕೋನವು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದ ಒಳಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

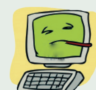
(3) ಆಯತವಲ್ಲದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳೊಂದೂ ಚಕ್ರೀಯವಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವಲ್ಲದ ಸಮಲಂಬಗಳೊಂದೂ ಚಕ್ರೀಯವಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸಿ ಸಾಗುವ ಬಿಂದುಗಳು P, Q, R, S ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ.

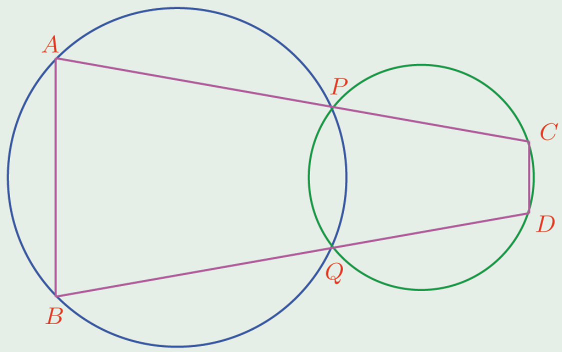


$PQRS$ ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

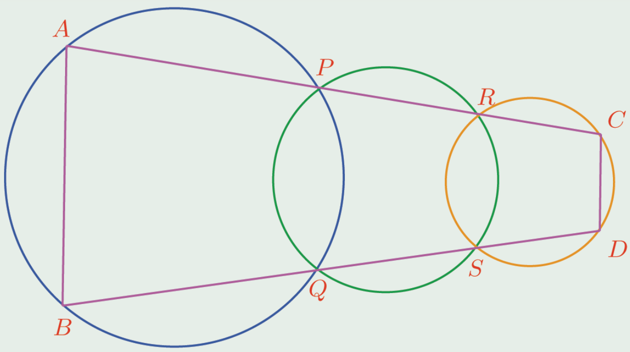


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಸಮೀಪದ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಖಂಡಿಸಿ ದಾಟುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿ ಬರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆಯೇ ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ Circle through 3 Points ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ದಾಟಿ ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಅದು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅದನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ಆಯತ, ಚೌಕ, ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬ ಎಂಬೀ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನಾಗಿಸಿ ಒಳಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ. (ಇದಕ್ಕಾಗಿ Grid ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು)

(6) i) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು, P, Q ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತದ A, B, C, D ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. AC, BD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, $ABDC$ ಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

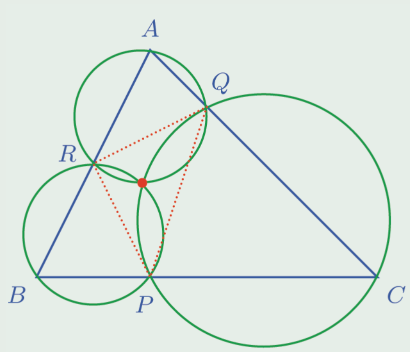


ii) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ವೃತ್ತಗಳು ಮಧ್ಯದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ ಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ P, Q, R, S; ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಎಡ ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು A, B, C, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು. $ABDC$ ಯು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

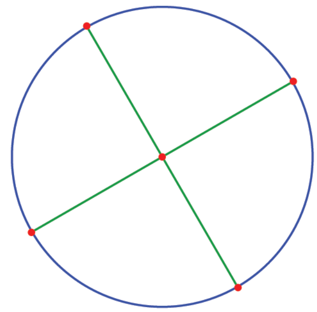


(7) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ BC, CA, AB ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ P, Q, R ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, AQR, BRP, CPQ ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪರಿವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಮೂರೂ ವೃತ್ತಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು

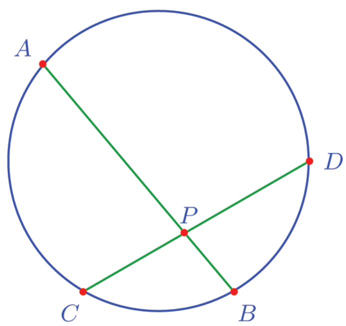


ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು, ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

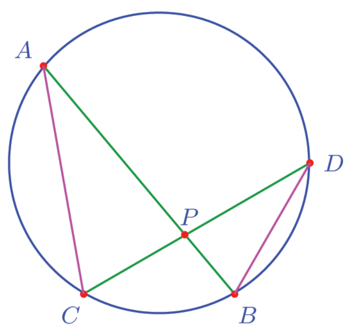
ಹಾಗೆ ಸಿಗುವ ನಾಲ್ಕೂ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸಿ ಹೋಗುವಾಗಲೋ?

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

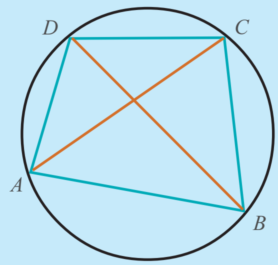


ಭಾಗಗಳೊಂದೂ ಸಮಾನವಲ್ಲ. ಆದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗೆ ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು AC ಯನ್ನೂ BD ಯನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ.



ಈಗ BC ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದ A ಮತ್ತು D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಹಾಗೆಯೇ AD ಎಂಬ ಸಣ್ಣ ಚಾಪವು ಮರುಚಾಪದ B ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಟಾಲಮಿ ಸಿದ್ಧಾಂತ



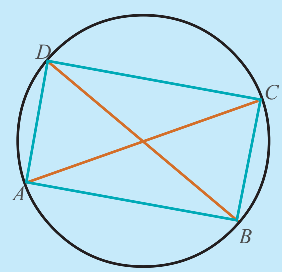
ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿರುದ್ಧಭುಜಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$ABCD$ ಎಂಬುದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೆ

$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$

ಬದಲಾಗಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದು. ಇದು ಟಾಲಮಿ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Ptolemy's Theorem) ಎಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವುದು.

ಆಯತವು ಚಕ್ರೀಯವಲ್ಲವೇ, ಆಯತದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವೂ ಆಗಿವೆ. ಕರ್ಣಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.



ಹಾಗಾದರೆ $ABCD$ ಯು ಆಯತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ಇದು ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ, PAC, PDB ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ, ಆದುದರಿಂದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಸಮಾನ.

ಆಗ,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

ಇದನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

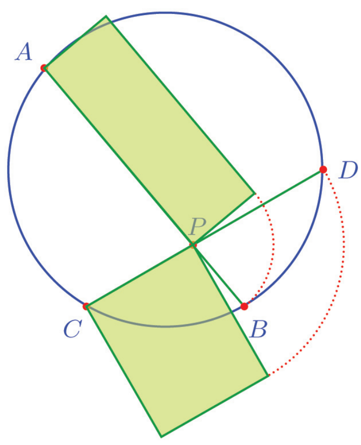
$$PA \times PB = PC \times PD$$

ಇದರಲ್ಲಿ PA, PB ಎಂಬಿವುಗಳು AB ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು PC, PD ಎಂಬಿವುಗಳು CD ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

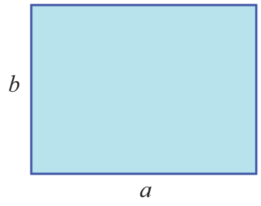
ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಸಂಗಮಿಸುವುದಾದರೆ, ಎರಡೂ ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಎರಡೂ ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ, ಆಗ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

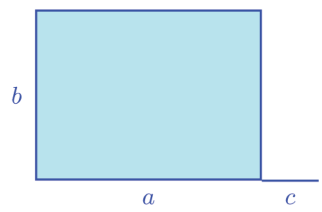
ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು.



ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಹಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಇದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾದಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

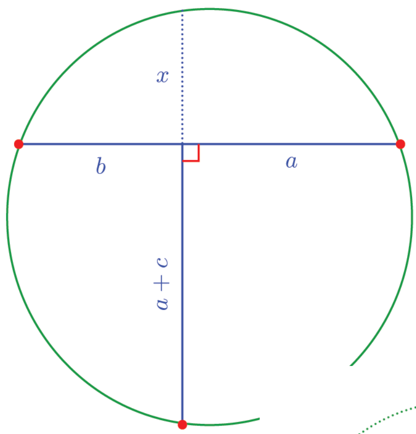


ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

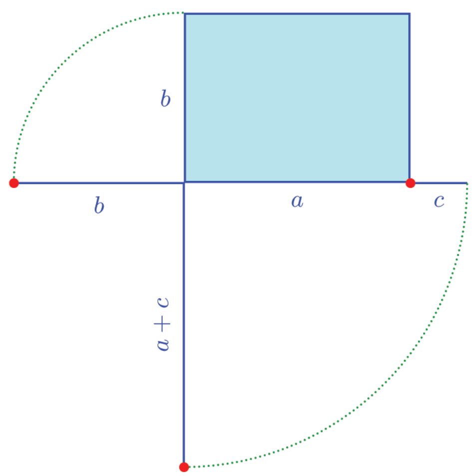
$(a + c)\, x = ab$ ಆಗುವಂತೆ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

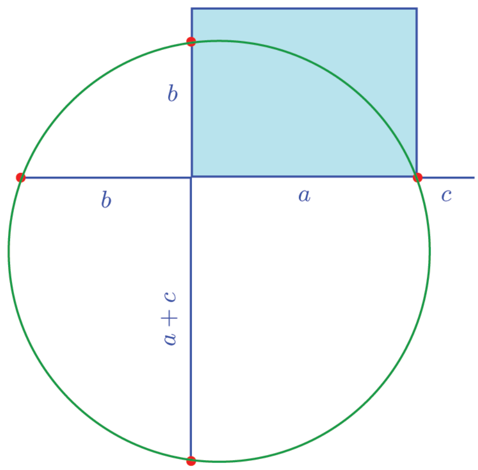
ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೋ?

ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



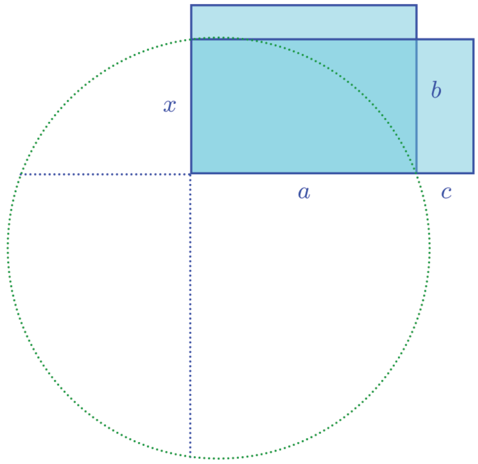
ಆಗ ಮೊದಲು, ಆಯತದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು b ಯಷ್ಟು ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಎಡಕ್ಕೂ, ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು $a + c$ ಯಷ್ಟು ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೂ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.





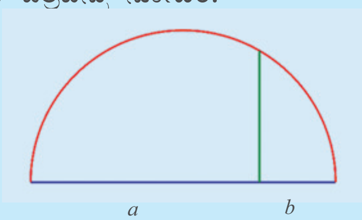
ಇನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಕೆಂಪು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.(ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ?)

ಈ ವೃತ್ತವು ಆಯತದ ಎಡಭಾಗದ ಬದಿಯನ್ನು ಖಂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗವು ಹೊಸ ಆಯತದ ಅಗಲ.



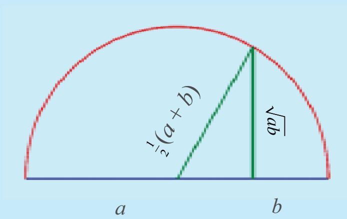
ಜ್ಯಾಮಿತಿ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು? ಅದನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ $ab = x^2$ ಎಂದೂ, ಹಾಗೆಯೇ $x = \sqrt{ab}$ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಈ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು? ವ್ಯಾಸ $a+b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2}(a+b)$

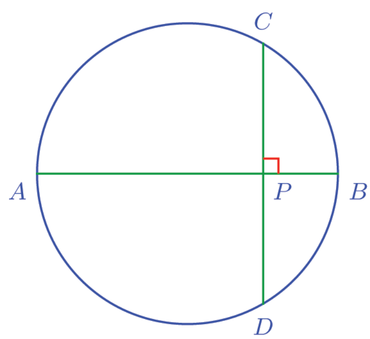


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯವು ಲಂಬಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವ ಸಂದರ್ಭವಿದೆಯೇ? ಆಗ ಏನು ಸಿಕ್ಕಿತು?

a, b ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯತತ್ವದ ಒಂದು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವನ್ನು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು, CD ಯು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ.



ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ $PC = PD$ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಸಂಬಂಧವು ಹೀಗಾಗುವುದು.

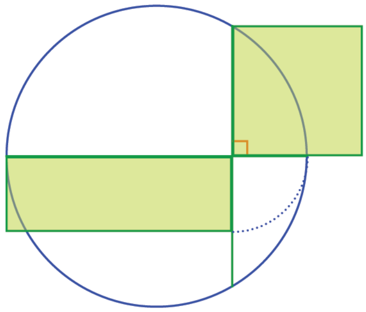
$$PA \times PB = PC^2$$

ಅಂದರೆ,

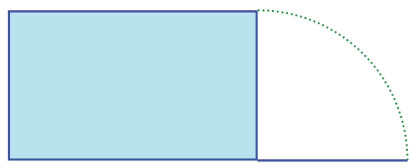
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಖಂಡಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೇ?

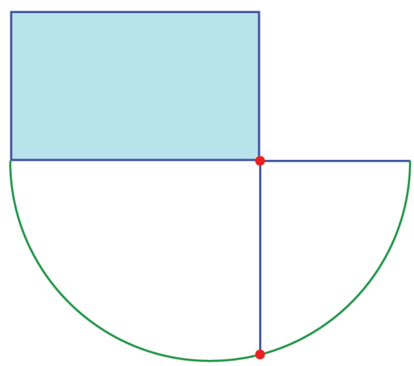
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಖಂಡಿಸುವ ಭಾಗಗಳು ಭುಜಗಳಾಗುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧ ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.



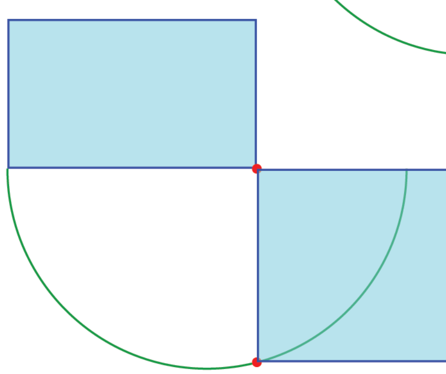
ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಮೊದಲು ಆಯತದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಅಗಲದಷ್ಟೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಕೆಳಭಾಗದ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ: ಆಯತ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



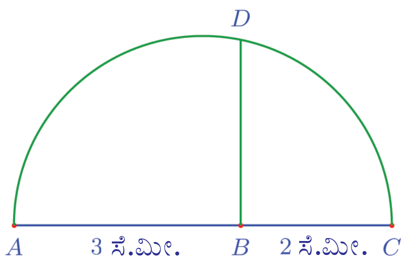
ಈ ಗೆರೆಯು ಚೌಕದ ಭುಜವಾಗಿರುವುದು. (ಕಾರಣ?)

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲೂ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 6 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

$6 = 3 \times 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 3ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 2ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಈ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಇಷ್ಟೇ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

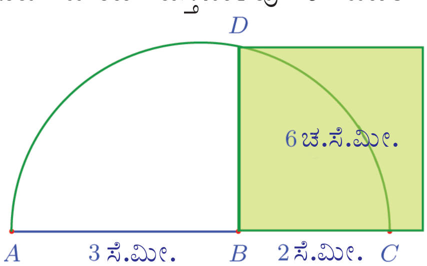
ಇನ್ನು AC ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, B ಯ ಮೂಲಕ AC ಗೆ ಲಂಬವನ್ನಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಈ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$BD^2 = AB \times BC = 6$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

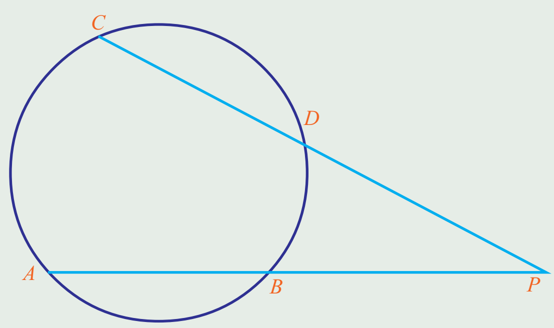
BD ಭುಜವಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.



ಇಲ್ಲಿ BD ಯ ಉದ್ದ $\sqrt{6}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ

ಆಗ ಅಭಿನ್ನಕ ಉದ್ದವಿರುವ ಕೆಲವು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲೂ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ AB, CD ಎಂಬೀ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.



i) AC, BD ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ APC, PBD ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) $PA \times PB = PC \times PD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

iii) $PB = PD$ ಆದರೆ $ABDC$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

i) ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ, ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ii) ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) 15 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(4) 5 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

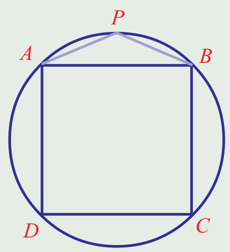
(ಪೈತಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನೆನಪಿಸುವಿರಲ್ಲವೇ)

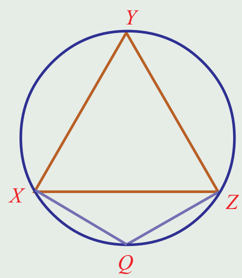
(5) ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು 4, 5, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(6) 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(7) ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

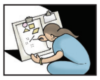
(8) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿದೆ $ABCD$. ಮತ್ತು XYZ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. P, Qಗಳು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ





i) $\angle APB$ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ?

ii) $\angle XQZ$ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ?

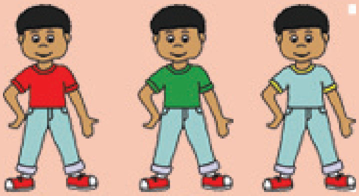


ಸಂಶೋಧನೆ

- ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲೂ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಚಾಪವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಒಂದು ಚಾಪವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಭೇದಿಸುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವೆಂದೂ ಮರುಭಾಗಗಳ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವೆಂದೂ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಪರಿವೃತ್ತವಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು. • ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು ಖಂಡಿಸುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿಯುವುದು. • ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವಾಗಿಸಲೂ ಚೌಕವಾಗಿಸಲೂ ತಿಳಿಯುವುದು.			



3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಗಣಿತ

ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಮಣಿಗಳಿವೆ, ಒಂಬತ್ತು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಳಿ ಮಣಿ. ಇದರಿಂದ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ...

ಬಹುತೇಕ ಕಪ್ಪಿನದ್ದಾಗಿರಬಹುದು. ಅಲ್ಲವೇ? ಬಿಳಿಯದ್ದಾಗಿರಬಾರದೆಂದೇನಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಎಂಟು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳು ಇವೆ. ಇದರಿಂದ ನೋಡದೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

ಆಗಲೂ ತೆಗೆಯುವ ಮಣಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ್ದೇ ಆಗಿರಬಹುದು. ಮೂರನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳೂ ಐದು ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳೂ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ? ಕಪ್ಪೂ ಆದೀತು, ಬಿಳಿಯೂ ಆದೀತು, ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೇನೂ ಹೇಳಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ?

ಇದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು; ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದಲೂ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದಲೂ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು. ಮೂರನೆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದಾದರೆ, ಕಪ್ಪಿನದ್ದಾಗಲೂ ಬಿಳಿಯದ್ದಾಗಲೂ ಸಮಾನ ಸಾಧ್ಯತೆಯಿದೆ.

ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಮತ್ತು ಮಣಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಟ. ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಕಪ್ಪು ಮಣಿ, ಐದು ಬಿಳಿ ಮಣಿ; ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ ಆರು ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕು ಬಿಳಿ ಮಣಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅದು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಯಾದರೆ ಆಟ ಗೆದ್ದಂತೆ.

ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು ಉತ್ತಮ?

ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಅಧಿಕವಿರುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಅದರಿಂದಲ್ಲವೇ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು?

ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೋ? ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯೊಳಗಿನ ಮಣಿಗಳು ಈ ರೀತಿಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ	:	6 ಕಪ್ಪು 5 ಬಿಳಿ
ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ	:	5 ಕಪ್ಪು 4 ಬಿಳಿ

ಇನ್ನು ಆಟವನ್ನು ಗೆಲ್ಲಲು ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಆರಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ?

ಆಗ ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿರುವುದು, ಅಂದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆಯೇ?

ಒಟ್ಟನಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸುವ. ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 11 ಮಣಿಗಳು, ಅದರಲ್ಲಿ 6 ಕಪ್ಪಿನವುಗಳು. ಅಂದರೆ, ಒಟ್ಟು ಮಣಿಗಳ $\frac{6}{11}$ ಭಾಗ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳು.

ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲೋ? ಒಟ್ಟು ಮಣಿಗಳ $\frac{5}{9}$ ಭಾಗ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದವುಗಳು.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು?

$\frac{5}{9}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ, ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಭಾಗವು ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು, ಅಂದರೆ ಈಗಲೂ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ತೆಗೆಯುವುದಲ್ಲವೇ ಉತ್ತಮ?

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು., ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{6}{11}$, ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{5}{9}$ ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಹೇಳಬಹುದು.

ಬಿಳಿ ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ? ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ $\frac{5}{11}$, ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ $\frac{4}{9}$; ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು? ಈಗ ಬಿಳಿ ಮಣಿ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ ಗೆಲುವೆಂದಾದರೆ ಯಾವ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಆರಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ? ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

		ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ		ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ	
		ಕಪ್ಪು	**ಬಿಳಿ**	**ಕಪ್ಪು**	**ಬಿಳಿ**
ಮೊದಲು	**ಸಂಖ್ಯೆ**	5	5	6	4
	ಸಾಧ್ಯತೆ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
ನಂತರ	**ಸಂಖ್ಯೆ**	6	5	5	4
	ಸಾಧ್ಯತೆ	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ಈಗ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಮಣಿಯನ್ನು ವರ್ಗಾಯಿಸಿದ ನಂತರವೂ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು.

ಇದೇ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚಿರುವುದು ಮಣಿಯನ್ನು ವರ್ಗಾಯಿಸುವ ಮೊದಲೋ ನಂತರವೋ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

1 ರಿಂದ 25 ರ ವರೆಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡಿನಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಬರೆದು ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಯಿತು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ತೆಗೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಟ್ಟು 25 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 13 ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ, 12 ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{12}{25}$.

ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ? ಇದೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಮೂರರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? 6ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೋ?

(1) ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 6 ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡುಗಳು, 4 ಬಿಳಿ ಚೆಂಡುಗಳು ಇವೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಕಪ್ಪು ಚೆಂಡಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಬಿಳಿಚೆಂಡಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ?

(2) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳೂ 7 ಹಸಿರು ಚೆಂಡುಗಳೂ ಇವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 8 ಕೆಂಪು ಚೆಂಡುಗಳೂ 7 ಹಸಿರು ಚೆಂಡುಗಳೂ.

i) ಮೊದಲ ಚೀಲದಿಂದ ಒಂದು ಚೆಂಡು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ii) ಎರಡನೆಯ ಚೀಲದಿಂದ ತೆಗೆದರೋ?

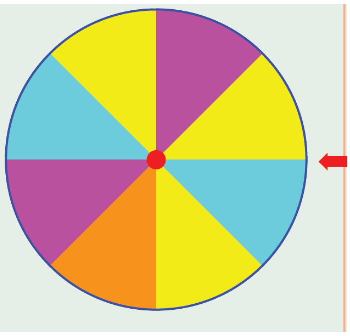
iii) ಎರಡೂ ಚೀಲಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಮಾಡಿ ಅದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಅದು ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(3) ಒಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು ಹೇಳುವುದು. ಅವರು ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(4) ಒಂದರಿಂದ ಐವತ್ತರ ವರೆಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡಿನಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಅಥವಾ ಐದರ ಅಪವರ್ತ್ಯವೋ ಎಂದು ಊಹಿಸಿ ಹೇಳಬೇಕು. ಯಾವ ಊಹೆಯನ್ನು ಹೇಳುವುದು ಉತ್ತಮ? ಯಾಕೆ?

(5) ಒಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ 3 ಕೆಂಪು ಮಣಿಗಳೂ 7 ಹಸುರು ಮಣಿಗಳೂ ಇವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಚೀಲದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಮಣಿಗಳೂ ಹಸಿರು ಮಣಿಗಳೂ. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದೊಂದು ಹೆಚ್ಚು ಇವೆ. ಯಾವ ಚೀಲದಿಂದ ತೆಗೆದರೆ ಕೆಂಪು ಮಣಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು?

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಾಧ್ಯತೆ

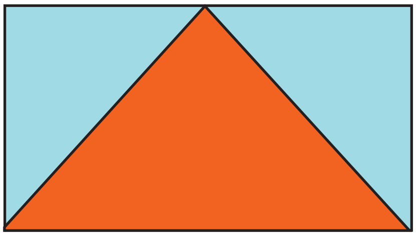


ಹಲವು ಬಣ್ಣಗಳಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತವು ತಿರುಗಿ ನಿಲ್ಲುವಾಗ ಹಲಗೆಯಲ್ಲಿನ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಎದುರು ಹಳದಿ ಬಣ್ಣವು ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ವೃತ್ತವು ತಿರುಗಿ ನಿಲ್ಲುವಾಗ ಬಾಣದ ಗುರುತಿನ ಎದುರಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಎಂಟು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭಾಗ ಬರಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಭಾಗಗಳು ಹಳದಿ. ಆದುದರಿಂದ ಹಳದಿ ಬಣ್ಣದ ಎದುರು ಬಾಣದ ಗುರುತು ಬರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{3}{8}$ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ಬಣ್ಣಗಳು ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.



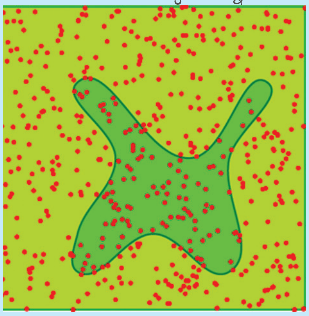
ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ದಪ್ಪವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಕಾಗದದಿಂದ ಆಯತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಒಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮೂಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಈ ಆಯತದೊಳಗೆ ಕಣ್ಣು ಮುಚ್ಚಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿ ಹಾಕಿದರೆ ಅದು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗೆ ಆಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಆಯತಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಪಾದವೂ ಒಂದೇ ಉನ್ನತಿಯೂ ಅಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಆಯತದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ ತ್ರಿಕೋನ.

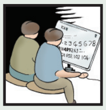
ಅಂದರೆ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{2}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ಚುಕ್ಕಿಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ

ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಚೌಕದ ಒಳಗೆ ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ನಂತರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಕ್ರಮವೂ ಇಲ್ಲದೆ. ಚೌಕದೊಳಗೆ ಚುಕ್ಕಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಬೇಕು.

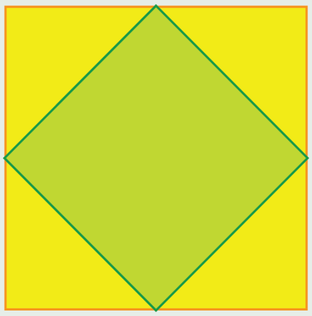


ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಆಕೃತಿಯ ಒಳಗಿನ ಚುಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಟ್ಟು ಚುಕ್ಕಿಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಚುಕ್ಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತೆ ಇದು ಇನ್ನೂ ನಿಖರವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೇಗವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಮೊಂಟಿಕರ್ಲೋ ರೀತಿ (Monte Carlo method) ಎಂದು ಹೆಸರು.

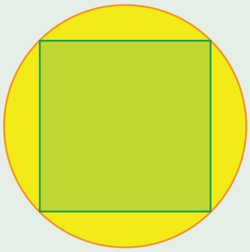


ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಭಾಗದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಣ್ಣುಮುಚ್ಚಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿಯನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಅದು ಹಸಿರು ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

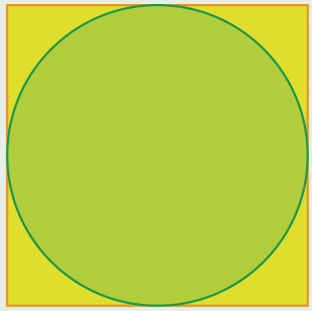
(1) ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರಚಿಸಿದ ಚೌಕ.



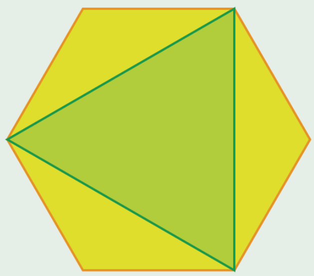
(2) ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳಾಗುವಂತೆ ರಚಿಸಿದ ಚೌಕ.



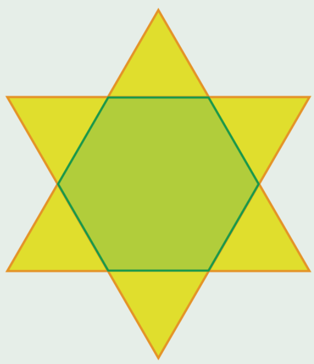
(3) ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವ ವೃತ್ತ.



(4) ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಒಂದು ಎಡೆ ಬಿಟ್ಟು ಒಂದು ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನ.

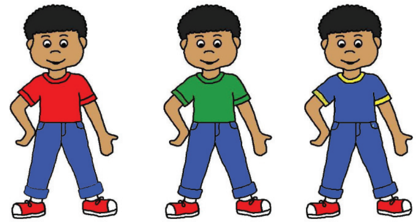


(5) ಎರಡು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ನಡುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಸಮಷಡ್ಭುಜ.

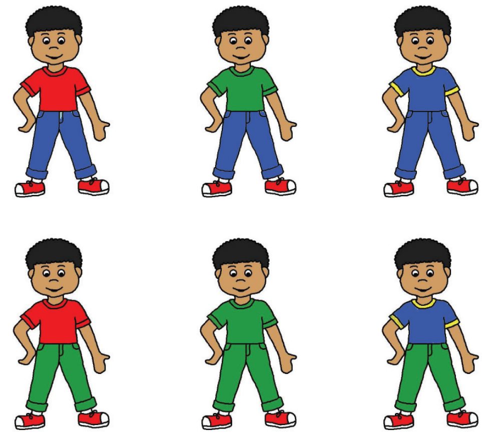


ಜೋಡಿಗಳು

ಒಗೆದು ತೆಗೆದಿರಿಸಿದ ಉಡುಪುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ನೋಡಿದಾಗ ಜೋನಿಗೆ ಒಂದು ನೀಲಿ ಪ್ಯಾಂಟು, ಕೆಂಪು, ಹಸಿರು ಹಾಗೂ ನೀಲ ಬಣ್ಣದ ಮೂರು ಅಂಗಿಗಳೂ ಸಿಕ್ಕಿದವು. ಹೇಗೆಲ್ಲಾ ಧರಿಸಬಹುದೆಂದು ಜೋನಿ ಆಲೋಚಿಸಿದನು.



ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಹುಡುಕಿದಾಗ ಒಂದು ಹಸಿರು ಪ್ಯಾಂಟು ಕೂಡಾ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಇನ್ನು ಇದನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಗಿಯೊಂದಿಗೆ ಮೂರು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ, ಜೋನ್ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದನು.



ಹೀಗೆ ಆರು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋನಿಗೆ ಧರಿಸಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣದ ಪ್ಯಾಂಟು ಮತ್ತು ಅಂಗಿ ಎಷ್ಟು ಸಲವಿದೆ?

ಆಗ ಜೋನಿ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣದ ಪ್ಯಾಂಟು ಮತ್ತು ಶರ್ಟ್ ಹಾಕುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ಅಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ: ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ನಾಲ್ಕು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳು; ಇನ್ನೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಎರಡು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳು ಯಾವುವೆಲ್ಲಾ ಆಗಬಹುದು?

ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ 1, 2 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸೇರಿದ ಎರಡು ಜೋಡಿಗಳು, ಇವನ್ನು (1, 1), (1, 2) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮೊದಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಸಿಗಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬರೆದರೋ?

(1, 1), (1, 2)

(2, 1), (2, 2)

(3, 1), (3, 2)

(4, 1), (4, 2)

ಒಟ್ಟು 8 ಜೋಡಿಗಳು.

ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ

ಪ್ರಸಿದ್ಧ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಗೆಲಿಲಿಯೋ, ಜೂಜಾಟವಾಡುವ ಒಬ್ಬ ಗೆಳೆಯನು ಮುಂದಿರಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಕುರಿತಾಗಿ ಹೇಳುತ್ತಾನೆ. ಮೂರು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿಗೆ ಉರುಳಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತವಾಗಿ 9 ಸಿಗುವುದೂ 10 ಸಿಗುವುದೂ 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಂದು ಅವನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದನು.

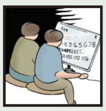
	9	10
1.	1+2+6	1+3+6
2.	1+3+5	1+4+5
3.	1+4+4	2+2+6
4.	2+2+5	2+3+5
5.	2+3+4	2+4+4
6.	3+3+3	3+3+4

ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ 9ಕ್ಕಿಂತ 10 ಹೆಚ್ಚು ಸಲ ಆವರ್ತಿಸುವುದು. ಇದು ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ ಎಂಬುದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಇದರಲ್ಲಿ 1, 2, 6 ಎಂದು ತೆಗೆದುದು ಯಾವುದೋ ಒಂದು ದಾಳದಲ್ಲಿ 1, ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ 2 ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ 6 ಎಂದಾಗಿದೆ. ಇದರ ಬದಲಿಗೆ ಮೊದಲ ದಾಳದಲ್ಲಿ 1, ಎರಡನೆಯ ದಾಳದಲ್ಲಿ 2, ಮೂರನೆಯ ದಾಳದಲ್ಲಿ 6 ಎಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರ (1, 2, 6) ಎಂಬ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸುವ. ಮೊದಲ ದಾಳದಲ್ಲಿ 1, ಎರಡನೆಯ ದಾಳದಲ್ಲಿ 6, ಮೂರನೆಯ ದಾಳದಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬುದನ್ನು (1, 6, 2) ಎಂಬ ತ್ರಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸುವ (1, 2, 6),(1, 6, 2),(2, 1, 6),(2, 6, 1),(6, 1, 2), (6, 2, 1) ಗಳೆಂದು ಆರು ವ್ಯತ್ಯಾಸ್ತ ತ್ರಯಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಆಗಿ ಸಿಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂದಾಗಿದೆ ಗೆಲಿಲಿಯೋವಿನ ಉತ್ತರ. ಇತರ ತ್ರಯಗಳನ್ನೂ ಇದೇ ರೀತಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ 9 ಸಿಗುವುದು 25 ರೀತಿಗಳಲ್ಲೂ, 10 ಸಿಗುವುದು 27 ರೀತಿಗಳಲ್ಲೂ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಗೆಲಿಲಿಯೋ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದನು. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿ)

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುವು?

(1, 1), (3, 1) ಎಂಬ ಎರಡೇ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಈ ಎರಡೂ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ, ಅವೆರಡೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದೇ? ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವೂ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಮವೂ ಆಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ? ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ?



(1) ರಜನಿಗೆ ಹಸಿರು, ನೀಲ, ಕೆಂಪು ಎಂಬೀ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಮಾಲೆಗಳೂ ಕಿವಿಯ ಓಲೆಗಳೂ ಇವೆ. ಎಷ್ಟು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಜನಿಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಧರಿಸಬಹುದು? ಒಂದು ದಿನ ರಜನಿ ಒಂದೇ ಬಣ್ಣದ ಮಾಲೆಯನ್ನೂ ಓಲೆಯನ್ನೂ ಧರಿಸಬಹುದಾದ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? ವಿಭಿನ್ನ ಬಣ್ಣದವುಗಳದ್ದೋ?

(2) ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ನಾಲ್ಕು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2 ಎಂದು ಬರೆದ ಎರಡು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳೂ ಇವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಕಾಗದ ತುಂಡನ್ನು ಹೆಕ್ಕಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ?

(3) ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ನಾಲ್ಕು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3 ಎಂದು ಬರೆದ ಮೂರು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳನ್ನೂ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಎರಡೂ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು? ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯೋ?

(4) 1, 2, 3 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳಿರುವ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

i) ಅಂಕೆಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ii) ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 4 ಆಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(5) ಇಬ್ಬರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಆಟ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆ ಬೇಕೋ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಬೇಕೋ ಎಂದು ಮೊದಲೇ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕು. ಇಬ್ಬರೂ ಒಂದು ಕೈಯ ಕೆಲವು ಬೆರಳುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮೇಲೆತ್ತಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಬೆರಳುಗಳ ಮೊತ್ತವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಳಿದ ವ್ಯಕ್ತಿಯೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದನ್ನು ಹೇಳಿದ ವ್ಯಕ್ತಿಯೂ ವಿಜಯಿಯಾಗುತ್ತಾರೆ. ಈ ಆಟದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದೋ, ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದೋ ಯಾವುದು ಉತ್ತಮ?

ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಜೋಡಿಗಳು

ಪುನ: ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳು ಒಂದರಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ 10ರ ತನಕ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಹತ್ತು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳು, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ 1ರಿಂದ 5ರ ತನಕ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದ ಐದು ಕಾಗದದ ತುಂಡುಗಳು. ವಾಡಿಕೆಯಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಗದದ ತುಂಡನ್ನು ಆರಿಸುವುದು. ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಜೋಡಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ನೋಡುವುದು. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಸಾಧ್ಯತೆಯಾಯಿತು.

ಮಾಡುವುದು ಹೇಳಿದಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಅಷ್ಟೊಂದು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ ಕೆಲಸವೂ ಅಲ್ಲ.

ಆಲೋಚಿಸಿ ನೋಡುವ. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹತ್ತರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದಾಗಿದೆ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಐದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು, ಆಗ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆಗುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳಿವೆ? ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗುವ ಜೋಡಿಗಳೋ?

ಒಟ್ಟನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸಿದರೆ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿ 5 ಜೋಡಿಗಳನ್ನಾಗಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ 10 ವಿಧದಲ್ಲಾಗಬಹುದು. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಊಹಿಸಬಹುದು.

5 ಸಂಖ್ಯೆ

10 ಸಂಖ್ಯೆ

(1, 1)	(1, 2)	...	(1, 5)
(2, 1)	(2, 2)	...	(2, 5)
...	...	...	...
...	...	...	...
(10, 1)	(10, 2)	...	(10, 5)

ಈ 50 ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುದು? ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 1, 3, 5, 7, 9 ಎಂಬೀ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಬೇಕು. ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ 1, 3, 5 ಎಂಬೀ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು. ಮೊದಲ 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜತೆಗೂ ಎರಡನೆಯ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಜೋಡಿಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಬಹುದು?

ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ ಆವೃತ್ತಿಯೂ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿದಾಗ ತಲೆಯೋ ಬಾಲವೋ (Head or Tail) ಬೀಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಸುಮಾರು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ನಾಣ್ಯವನ್ನು ತಯಾರಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾದ ಕೊರತೆಯಿಂದಲೋ ಬೇರೆ ಕಾರಣದಿಂದಲೋ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ತಲೆಭಾಗ ಬೀಳುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಬರಬಹುದು. ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು?

ನಾಣ್ಯವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಚಿಮ್ಮಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತಿ ಮುಖವೂ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತ ತುಂಬಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಇಂತಹ ಒಂದು ಸಂಶಯ ಬರುವುದು. ಆಗ ತುಂಬಾ ಸಲ ಚಿಮ್ಮಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮುಖವೂ ಮೇಲ್ಮುಖವಾಗಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ರೀತಿ. ಉದಾಹರಣೆ ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡುವ.

ಚಿಮ್ಮಿಸುವುದು	ತಲೆ	ಬಾಲ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ಇದರಿಂದ ತಲೆಯ ಸಾಧ್ಯತೆ 0.6 ಎಂದೂ ಬಾಲದ ಸಾಧ್ಯತೆ 0.4 ಎಂದೂ ತೆಗೆಯುವುದು ಅವೆರಡೂ 0.5 ಎಂದೂ ತೆಗೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ ಸೂಕ್ತ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಸರಿಯಾಗುವ ಗಣಿತ ರೀತಿಗಳು ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ (Probability theory) ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯ ಮುಂದುವರಿದ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

5×3 ಅಲ್ಲವೇ? (ಬೇಕಾದರೆ ಸಾಲುಗಳೂ ಕಾಲಂಗಳೂ ಆಗಿ ಊಹಿಸಬಹುದು) ಆಗ ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಸಿಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$. ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನೂ, ಒಂದು ಸಮವೂ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಮವೂ ಆಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ, ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 50 ಮಾವುಗಳಿವೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 20 ಕಾಯಿಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 40 ಮಾವುಗಳಿವೆ, 15 ಹಣ್ಣಾಗಲಿಲ್ಲ. ಎರಡೂ ಬುಟ್ಟಿಗಳಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಮಾವನ್ನು ಹೆಕ್ಕಿ ತೆಗೆದರೆ ಅವೆರಡೂ ಹಣ್ಣಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯಿಂದ ಒಂದು ಮಾವಿನಂತೆ ಎಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಸ್ಥ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆಯಬಹುದು? (ಬೇಕಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಬುಟ್ಟಿಯ ಮಾವುಗಳನ್ನು ಸಾಲಾಗಿ ಇರಿಸಿದ್ದಾಗಿ ಭಾವಿಸುವ. ಅವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಂದೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದದ್ದಾಗಿಯೂ ಭಾವಿಸುವ.)

ಆಗ ಒಟ್ಟು ಎರಡು ಮಾವುಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು $50 \times 40 = 2000$ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿರಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜೊತೆಗಳು ಹಣ್ಣಾದವುಗಳಾಗಿರಬಹುದು? ಮೊದಲ ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, $50 - 20 = 30$ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳಿವೆ. ಎರಡನೇ ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $40 - 15 = 25$ ಹಣ್ಣುಗಳಿವೆ.

ಮೊದಲ ಬುಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಣ್ಣಾದ ಮಾವು ಹಾಗೂ ಎರಡನೇ ಬುಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಹಣ್ಣಾದ ಮಾವುಗಳನ್ನು ಜೊತೆಯಾಗಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು $30 \times 25 = 750$ ಜೊತೆಗಳು. ಆಗ ಎರಡೂ ಹಣ್ಣಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$. ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡೂ ಕಾಯಿಯಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾಗಿರಬೇಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಹಣ್ಣೂ ಮತ್ತೊಂದು ಕಾಯಿಯೂ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಹಣ್ಣಾದುದು ಆದೀತು; ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಣ್ಣಾದುದು ಎಂದರೆ ಅದು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕೀತು.

ಒಂದನೆಯದು ಹಣ್ಣು, ಎರಡನೆಯದು ಕಾಯಿ

ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ,

ಒಂದನೆಯದು ಕಾಯಿ, ಎರಡನೆಯದು ಹಣ್ಣು ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಹಣ್ಣಾಗಿರುವ ಜೊತೆಗಳು ಒಟ್ಟು

$$\begin{aligned}(30 \times 15) + (20 \times 25) &= 450 + 500 \\ &= 950\end{aligned}$$

ಎರಡೂ ಹಣ್ಣಾದುದು 750 ಜೊತೆಗಳು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಎರಡನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾಗಿರುವ ಜೊತೆಗಳು ಒಟ್ಟು $950 + 750 = 1700$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಅನಿಶ್ಚಿತತೆಯ ಅಳತೆ

ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಸೂರ್ಯನು ಉದಯಿಸುವ ಮತ್ತು ಅಸ್ತಮಿಸುವ ಸಮಯಗಳನ್ನು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ? ನಿಖರವಾದ ಕೆಲವು ಗಣಿತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಭೂಮಿ, ಸೂರ್ಯ ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಚಲಿಸುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.
ಇದೇ ರೀತಿ ಮಳೆಗಾಲ, ಬೇಸಿಗೆಕಾಲಗಳೆಲ್ಲಾ ಯಾವ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆದರೂ ಬೇಸಿಗೆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿ ಬೇಸಿಗೆ ಮಳೆ ಬೀಳುವುದನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದೇ ಇರಬಹುದು. ಮಳೆಯನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ ಘಟಕಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಂಕೀರ್ಣತೆಯು ಈ ಎಲ್ಲಾ ಹವಾಮಾನ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ತ್ರಾಸದಾಯಕ ಗೊಳಿಸುವುದು.
ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯ ಗಣಿತಪರವಾದ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ದೈನಂದಿನ ಹವಾಮಾನದ ಕುರಿತು ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳುವುದು. ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಈ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಏರುಪೇರು ಮಾಡುವುವು.
ಯಾವುದೇ ವೈಜ್ಞಾನಿಕವಾದ ಆಧಾರವಿಲ್ಲದ, ನಿಖರವಾದ ಮುನ್ಸೂಚನೆಗಳೆಂಬಂತೆ ಹೇಳುವ ಭವಿಷ್ಯ ನುಡಿಗಳಿಗಿಂತ ಇಂತಹ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಭವಿಷ್ಯನುಡಿಗಳು ಹೆಚ್ಚು ವಿಶ್ವಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ ಮನದಟ್ಟಾಗುವುದು.

ಆದುದರಿಂದ ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು: ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾದುದು ಎಂದರೆ ಎರಡೂ ಕಾಯಿಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು 2000 ಜೋಡಿಗಳು ಎರಡೂ ಕಾಯಿಯಾಗಿರುವುದು $20 \times 15 = 300$ ಅಲ್ಲವೇ.

ಬಾಕಿ ಉಳಿದ $2000 - 300 = 1700$ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾದುದು ಇರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಒಂದಾದರೂ ಹಣ್ಣಾಗಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$.

(1) 10 A ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 30 ಹುಡುಗರೂ, 20 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವರು. 10 B ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 15 ಹುಡುಗರೂ, 25 ಹುಡುಗಿಯರೂ. ಎರಡೂ ತರಗತಿಗಳಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಮಗುವನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು.

i) ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗಿಯರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ii) ಇಬ್ಬರೂ ಹುಡುಗರಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

iii) ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನೂ ಇನ್ನೊಬ್ಬಳು ಹುಡುಗಿಯೂ ಆಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

iv) ಒಬ್ಬನಾದರೂ ಹುಡುಗನಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

(2) ಒಬ್ಬನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿಸುವುದು.

i) ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಅಂಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

ii) ಮೊದಲ ಅಂಕೆ ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು?

iii) ಮೊದಲ ಅಂಕೆ ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಲಿರುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

(3) 1 ರಿಂದ 6 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಎರಡು ದಾಳಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಎಸೆಯಲಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವುದೆಲ್ಲಾ ಆಗಿರಬಹುದು? ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಾಧ್ಯತೆಯಿರುವ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು. • ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವುದು. • ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವ ಅನಿವಾರ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು.			

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

4

ವರ್ಗ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಆರಂಭಿಸುವ:

> ಒಂದು ಚೌಕದ ಬದಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 1 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು 36 ಮೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿತ್ತು?

ಹೊಸ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ $36 \div 4 = 9$ ಮೀಟರ್; ಆಗ ಹಳೆಯ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ $9 - 1 = 8$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ರೀತಿಯಾದರೆ?

> ಒಂದು ಚೌಕದ ಬದಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 1 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 36 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿತ್ತು?

ಹೊಸ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

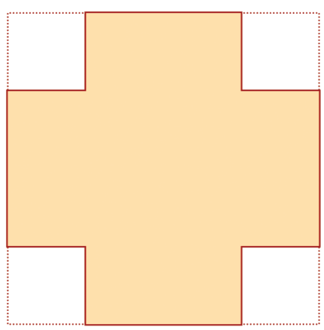
$\sqrt{36} = 6$ ಮೀಟರ್, ಅಲ್ಲವೇ?

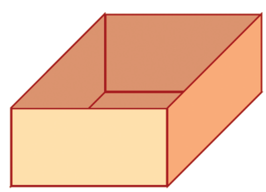
ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಒಂದು ಬದಿ $6 - 1 = 5$ ಮೀಟರ್

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಚೌಕಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ದಪ್ಪಕಾಗದದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದಲೂ ಸಣ್ಣ ಚೌಕವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

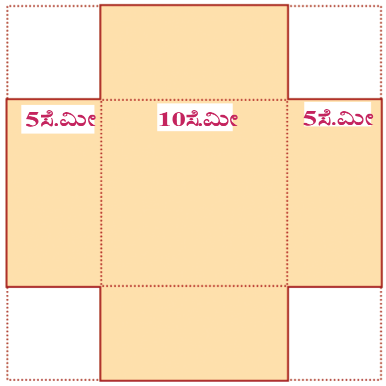
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಎತ್ತರ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಹಿಡಿವು $\frac{1}{2}$ ಲೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?





ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಹಿಡಿವು, ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹಿಡಿವು $\frac{1}{2}$ಲೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಎಂದರೆ 500 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಎತ್ತರ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

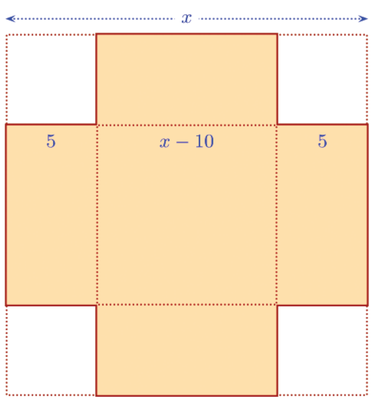
ಆಗ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $500 \div 5 = 100$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಪಾದವು ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ(ಕಾರಣ?) ಅದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.



ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದಿಂದಲೂ $2 \times 5 = 10$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಈ ಚೌಕವು ಸಿಕ್ಕಿರುತ್ತದೆ.

ಆಗ ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಭುಜ $10 + 10 = 20$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಹೀಗೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಆಲೋಚಿಸುವುದರ ಬದಲು ನೇರವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸುವ. ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಪಾದವು $(x - 10)$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಭುಜವಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.



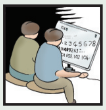
ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಎತ್ತರವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಹಿಡಿವು $5(x - 10)^2$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಆಗ ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಹೀಗೆ ಆಗುವುದು:

$5(x - 10)^2 = 500$ ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ, x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬಹುದು?

ಇನ್ನು ಹೀಗೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು:

- $5(x-10)^2 = 500$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $(x-10)^2 = 500 \div 5 = 100$ ಆಗಬೇಕು.
- $(x-10)^2 = 100$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x - 10 = \sqrt{100} = 10$ ಆಗಬೇಕು.
- $x - 10 = 10$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x = 10 + 10 = 20$ ಆಗಬೇಕು.



ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಥವಾ ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಮಾಡಿರಿ.

(1) ಒಂದು ಚೌಕದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು 2 ಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಸಣ್ಣದಾಗಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 49 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಮೊದಲನೇ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಎಷ್ಟು ಮೀಟರಾಗಿತ್ತು?

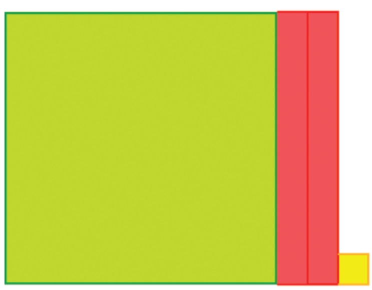
(2) ಚೌಕಾಕಾರದ ಒಂದು ಮೈದಾನದ ಸುತ್ತಲೂ 2 ಮೀಟರ್ ಅಗಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಾರಿ ಇದೆ. ಮೈದಾನ ಮತ್ತು ದಾರಿ ಸೇರಿದ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1225 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

(3) 2, 5, 8, ... ಎಂದು ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದದ ವರ್ಗವು 2500 ಆಗಿದೆ. ?

(4) ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಒಂದು ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ 2000ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಲಾಯಿತು. ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಆ ಮೊತ್ತವು 2205ರೂಪಾಯಿ ಆಯಿತು. ಬಡ್ಡಿಯ ದರವು ಎಷ್ಟು ಶೇಕಡಾವಾಗಿದೆ?

ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



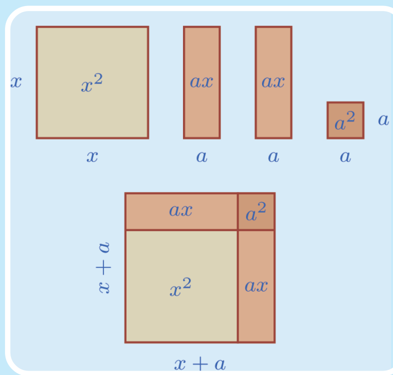
ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದಲ್ಲೊಂದು ಚೌಕ, ಅಷ್ಟೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ಎರಡು ಕೆಂಪು ಆಯತಗಳು, ಹಳದಿ ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವರು. ಎರಡು ಕೆಂಪು ಆಯತಗಳ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಹಳದಿ ಚೌಕದ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲಾ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಚಿತ್ರದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚದರಮೀಟರ್.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ವರ್ಗ

x, a ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

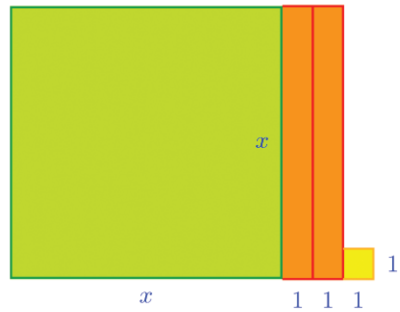
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

ಎಂದು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ. x, a ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪವನ್ನು ನೀಡೋಣ:



ಹಸಿರು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ನೇರವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ?



ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಹಸಿರು ಚೌಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ:

ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 100 ಚದರಮೀಟರ್ ಎಂದು ಹೇಳಿರುವರು.

ಆಗ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ.

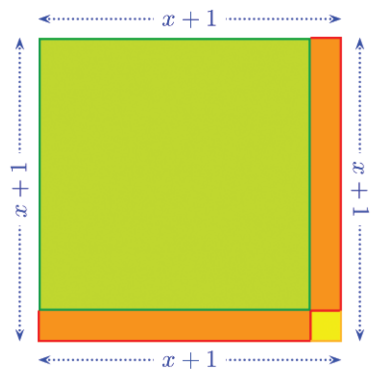
$x^2 + 2x + 1 = 100$ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

$x^2 + 2x + 1$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಪರಿಚಯವಿದೆಯೇ?

ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ಎಂದು ಕಂಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ?



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿರಿಸುವ ಮೂಲಕವೂ ಇದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ:

$(x + 1)^2 = 100$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟು?

ಇನ್ನು, $x + 1 = 10$ ಎಂದೂ, ಹಾಗೆ $x = 9$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ, ಹಸಿರು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 9 ಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

> ಒಂದು ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಬದಿಯ ಉದ್ದವು ಸಣ್ಣ ಬದಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 224 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಬದಿಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ. ಸಣ್ಣ ಬದಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ದೊಡ್ಡ ಬದಿಯ ಉದ್ದ $x + 2$ ಮೀಟರ್;
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ಚದರಮೀಟರ್
ಇನ್ನು ಆಯತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ:

$x^2 + 2x = 224$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟು?

ಇನ್ನು ಏನು ಮಾಡಬಹುದು?

ಮೊದಲನೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ $x^2 + 2x + 1$ ನ್ನು $(x + 1)^2$ ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದು ಮುಂದೆ ಸಾಗಿದ್ದೆವು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $x^2 + 2x$ ಮಾತ್ರ ಇದೆ.

1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಲದೆ?

ಹಾಗಾದರೆ ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಸುವಾ:

- $x^2 + 2x = 224$ ಆದರೆ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$
- ಅಂದರೆ, $(x + 1)^2 = 225$
- $(x + 1)^2 = 225$ ಎಂದಾದರೆ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$
- $x + 1 = 15$ ಎಂದಾದರೆ $x = 14$

ಹಾಗೆ ಆಯತದ ಸಣ್ಣ ಬದಿಯು 14 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಬದಿಯು $14 + 2 = 16$ ಮೀಟರ್. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆದರೋ?

> ಒಂದು ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಬದಿಯು ಸಣ್ಣ ಬದಿಗಿಂತ 20 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕ ಉದ್ದವಿದೆ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 224 ಚದರಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಬದಿಗಳ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗುವುದು:

$x^2 + 20x = 224$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಬಲಬದಿಯು ಸಂಖ್ಯೆ $225 = 15^2$ ಆಗುವುದು. ಆದರೆ ಎಡಬದಿಯು $x^2 + 20x + 1$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು $(x + a)^2$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? $x^2 + 20x$ ನ್ನು ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

a ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ,

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮವಾಕ್ಯದ $2ax$ ನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $20x$ ಆಗಿದೆ.

ಆಗ, a ಆಗಿ 10 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿದರೋ?

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ $x^2 + 20x = 224$ ಆಗಿದೆ. ಈಗ ತಿಳಿದುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, 100 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಸೋಣ.

$$x^2 + 20x = 224$$

$$x^2 + 20x + 100 = 324$$

ವಿಭಿನ್ನ ದಾರಿ

$x(x + 20) = 224$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ದಾರಿಯಿದೆ. $x + 20$ನ್ನು $(x + 10) + 10$ ಎಂದೂ, x ನ್ನು $(x + 10) - 10$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ

$$x(x + 20) = ((x + 10) - 10)((x + 10) + 10)$$
$$= (x + 10)^2 - 10^2$$

ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$(x + 10)^2 - 100 = 224$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ

$$(x + 10)^2 = 324$$

ಎಂದು ಬರೆದು ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ xನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $x^2 + 10x = 3000$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡಿರಿ.

$$(x + 10)^2 = 324$$
$$x + 10 = \sqrt{324} = 18$$
$$x = 8$$

ಅದರಂತೆ ಈ ಆಯತದ ಬದಿಗಳು 8 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 28 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:

ಚೌಕ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ

20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜದ ಉದ್ದವು 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಆಯತದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

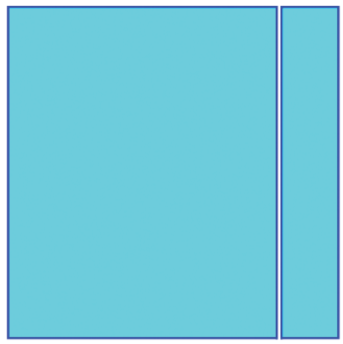
ಈ ರೀತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ಬಹುಪದದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ.

$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ xಗೆ ಬದಲು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೂ $(x-5)^2$ ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಾರದು. ಅಂದರೆ $p(x)$ ಎಂಬುದು 25 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಲಾರದು. $x = 5$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $p(x) = 25$ ಎಂದೂ ಸಿಗಬಹುದು.

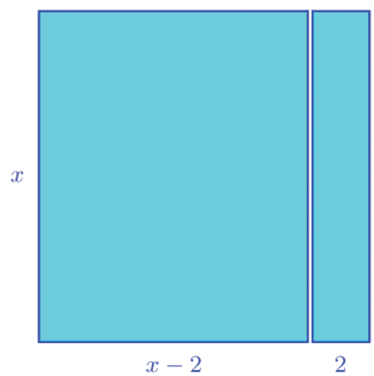
ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತ ಲೆಕ್ಕ:

ಒಂದು ಚೌಕದಿಂದ 2 ಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿರುವ ಒಂದು ತುಂಡನು ಕತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು:



ಉಳಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 99 ಚದರಮೀಟರ್. ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಉಳಿದ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು x ಮೀಟರ್, $(x - 2)$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.



ಆಗ ಉಳಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$x(x - 2) = x^2 - 2x$ ಚದರಮೀಟರ್.

ಸಮಸ್ಯೆಯು ಹೀಗಾದೀತು:

$x^2 - 2x = 99$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟು?

$x^2 + 2x$ ರಂತೆ $x^2 - 2x$ ನ್ನು ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

8ನೇ ತರಗತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

ಇನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$x^2 - 2x = 99$$

$$x^2 - 2x + 1 = 100$$

$$(x - 1)^2 = 100$$

$$x - 1 = 10$$

$$x = 11$$

ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ 11 ಮೀಟರ್.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

> 100 ಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು 525 ಚದರಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ 50 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $(50 - x)$ ಮೀಟರ್. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $x(50 - x) = 50x - x^2$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಹಾಗಾದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

> $50x - x^2 = 525$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಎಡಭಾಗವು $x^2 - 50x$ ಆಗಿರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ. $50x$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ x^2 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 525 ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ ತಿರುಗಿಸಿ ಕಳೆದರೆ ಅದರ ಋಣವಾದ -525 ಸಿಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿಸೋಣ.

> $x^2 - 50x = -525$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇನ್ನು $x^2 - 50x$ ನೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ವರ್ಗ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

$$(x - 25)^2 = x^2 - 50x + 625$$

ಕೂಡಿಸಿಯೂ ಕಳೆದೂ

100 ಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು 525 ಚದರಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಇನ್ನೊಂದು ದಾರಿಯಿದೆ. ಈ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲದ ಮೊತ್ತವು 50 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಉದ್ದವನ್ನು $(25 + x)$ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ಅಗಲವನ್ನು $(25 - x)$ ಮೀಟರು ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(25 - x)(25 + x) = 625 - x^2$ ಚದರಮೀಟರ್

ಇನ್ನು x ನ್ನು ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

$$625 - x^2 = 525$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

ಆಯತದ ಭುಜಗಳು

$25 - 10 = 15$ ಮೀಟರ್

$25 + 10 = 35$ ಮೀಟರ್

ಇನ್ನು ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದು:

$$x^2 - 50x = -525$$

$$x^2 - 50x + 625 = -525 + 625 = 100$$

$$(x - 25)^2 = 100$$

$$x - 25 = 10$$

$$x = 35$$

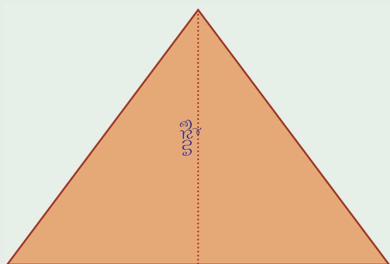
ಅಂದರೆ, ಆಯತದ ಭುಜಗಳು 35 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 15 ಮೀಟರ್.

(1) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 289 ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವೆಲ್ಲ?

(2) 6 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದೊಂದಿಗೆ 9ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 729 ಸಿಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

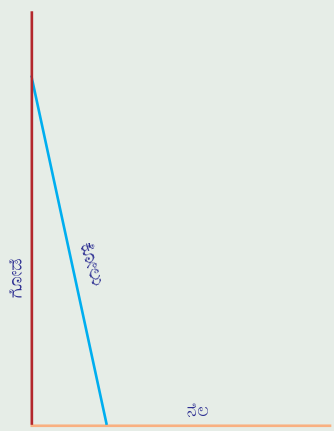
(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು:

ಉನ್ನತಿಯು ಪಾದಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12



ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(4) 2.6 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಕೋಲನ್ನು ಗೊಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಕೋಲಿನ ಬುಡವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 1 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಕೋಲಿನ ಬುಡವನ್ನು ಗೋಡೆಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದಕ್ಕೆ ದೂಡಿದರೆ ಕೋಲಿನ ತುದಿ ಅಷ್ಟೇ ಕೆಳಗೆ ಬರುವುದು. ಕೋಲಿನ ಬುಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದೂರಕ್ಕೆ ದೂಡಲಾಯಿತು?



(5) 9, 11, 13, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಕೆಲವು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದೊಂದಿಗೆ 16 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 256 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗಿದೆ?

(6) 5, 7, 9, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 140 ಸಿಗುವುದು?

(7) ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೊಬ್ಬನು 300 ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಪ್ರಯಾಣ ಮಾಡಿ ಒಂದು ಊರಿನ ಸಮ್ಮೇಳನಕ್ಕೆ ತಲುಪಿದನು. ಭಾಷಣದೆಡೆಯಲ್ಲಿ:

> "ನನ್ನ ಪ್ರಯಾಣದ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವನ್ನು ಗಂಟೆಗೆ ಹತ್ತು ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುತ್ತಿದ್ದರೆ ಒಂದು ಗಂಟೆ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ತಲುಪಬಹುದಿತ್ತು"

ಎಂದು ಹೇಳಿದನು. ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ಎಷ್ಟಾಗಿತ್ತು?

(8) ಮೂವತ್ತು ಮಿಠಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವಿತರಿಸಲಾಯಿತು. ಸಿಹಿಯನ್ನು ಸವಿಯುತ್ತಾ ಓರ್ವ ಪುಟ್ಟ ಹುಡುಗ,

> "ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಮಿಠಾಯಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗಬಹುದಿತ್ತು"

ಎಂದನು. ಹಾಗಾದರೆ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳಿದ್ದರು?

ಎರಡು ಉತ್ತರ

ವೇಗ ಮತ್ತು ದೂರದ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತು ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ನೇರ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಸಂಚರಿಸಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ವೇಗವನ್ನು ಸಮಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವು t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರ s ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$s = ut$$

ಇನ್ನು ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವುದಾದರೋ? ವೇಗವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ವೇಗವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿರಬಹುದು. ದೂರವು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವಿದೆ. u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಎಂದಿರಲಿ; t ಸೆಕೆಂಡಿನ ನಂತರ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ s ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

ವೇಗವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದಾದರೆ,

$$s = ut - \frac{1}{2}at^2$$

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

40 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು, ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 8 ಮೀಟರ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಸಂಚರಿಸಿದ ಸಮಯ ಮತ್ತು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ s ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, ಈ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$$s = 40t - \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 40t - 4t^2$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ವಸ್ತುವು ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು:

ಸಮಯ	1	2	3	4	5	6
ದೂರ	36	64	84	96	100	96

ಕೆಲವು ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕಾಲ ದೂರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಿ ಬಳಿಕ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

40 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದರಿಂದ 5 ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗುವಾಗ ವೇಗವು 0 ಆಗುವುದು. ನಂತರದ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಸಂಚರಿಸುವುದು. (ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಲವು ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುವುದರಿಂದ ವೇಗವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು)

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ ಹಿಂದಿರುಗುವ ಸಂಚಾರವು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದು:

ಸಮಯ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ದೂರ	36	64	84	96	100	96	84	64	36	0	44

ಅಂದರೆ, 10 ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗುವಾಗ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬಂದು ತಲುಪುವುದು, 11 ಸೆಕುಂಡ್ ಆಗುವಾಗ, ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯಲ್ಲಿ 44 ಮೀಟರ್ ದೂರ ಆಗುವುದು. ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತೀ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲಿರುವ ಸಮಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ 99 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು?

ಅದಕ್ಕೆ $40t - 4t^2 = 99$ ಆಗಬೇಕು. ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

$$4t^2 - 40t = -99$$

ಇದರಲ್ಲಿ t^2ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕ 4 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಮೊದಲು ಅದನ್ನು 1 ಮಾಡಬೇಕು. (ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಆ ರೀತಿ ಆಗಿತ್ತು ಅಲ್ಲವೇ). ಅದಕ್ಕಾಗಿ 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು:

$$t^2 - 10t = \frac{-99}{4}$$

ಇನ್ನು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ, $t^2 - 10t$ ಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು. ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

$$(t-5)^2 = t^2 - 10t + 25$$

ಇನ್ನು 25ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.
(ಇಲ್ಲಿ 25 ಎಂಬುದು t ಯ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕವಾದ -10 ರ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ)

$$t^2 - 10t + 25 = 25 - \frac{99}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(t-5)^2 = \frac{1}{4}$$

$$t - 5 = \frac{1}{2}$$

$$t = 5\frac{1}{2}$$

ಹಾಗಾದರೆ $5\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಆ ವಸ್ತುವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ 99 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಆದರೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ 5 ಸೆಕೆಂಡಿನಿಂದ ಸಮಾನ ಸಮಯ ಹಿಂದಕ್ಕೂ ಮುಂದಕ್ಕೂ ವಸ್ತುವು ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. (ಮುಂದಕ್ಕಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲೂ, ಹಿಂದಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲೂ). ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 4ನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲೂ 6ನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲೂ 96 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಅದರಂತೆ 3ನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲೂ 7ನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲೂ 84 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಆಗ 5 ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ $\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡು ಮೊದಲು ಮತ್ತು ನಂತರ ವಸ್ತುವು ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದು. $\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡ್ ಕಳೆದಾಗ, ಎಂದರೆ, $5\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವು 99 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಿಕ್ಕಿತು. ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ $4\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲೂ ವಸ್ತು 99 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಸಮಯ-ದೂರ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $t = 4\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$40t - 4t^2 = \left(40 \times 4\frac{1}{2}\right) -- 4 \times \left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(40 \times \frac{9}{2}\right) - \left(4 \times \frac{81}{4}\right) = 180 - 81 = 99$$

ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು.

$40t - 4t^2 = 99$ ಆಗಲು t ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದಾಗ $t = 4\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಉತ್ತರವು ಲಭಿಸದಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

$t = 5\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವು ದೊರಕಿದ ಹಂತಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡುವ. ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಡೆ $(t - 5)^2 = \frac{1}{4}$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $t - 5 = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡೆವು ಅಲ್ಲವೇ. ವರ್ಗವು $\frac{1}{4}$ ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}$ ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆಯೇ?

$-\frac{1}{2}$ ವರ್ಗ ಎಷ್ಟು?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು $\frac{1}{4}$ ಎಂದು ಸಿಕ್ಕಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $-\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ,

$$(t - 5)^2 = \frac{1}{4}$$

ಎಂಬುವುದರಿಂದ,

$$t - 5 = \frac{1}{2} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad t - 5 = -\frac{1}{2}$$

ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದರಲ್ಲಿ $t - 5 = \frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ $t = 5\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. $t - 5 = -\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಎರಡನೇ ಬಾರಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ $t = 4\frac{1}{2}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಋಣ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ತರವು ಕೂಡಾ ಲಭಿಸುತ್ತಿತ್ತೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಒಂದು ಆಯತಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ. ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು ಸಣ್ಣ ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕ ಉದ್ದವಿರುವ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 224 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ.

ಇದರ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಣ್ಣಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $(x + 1)^2 = 225$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದೆಂದು ಕಂಡಿರುವೆವು. ನಂತರ $x + 1 = 15$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವು 14 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದೆವು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿದರೆ $x + 1 = -15$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು;

ಅಂದರೆ, $x = -16$

ಆದರೆ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x ಒಂದು ಆಯತದ ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ $x = -16$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವು ಆಯತಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುದಿಲ್ಲ.

ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಮತ್ತೊಂದು ಆಯತಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಸುತ್ತಳತೆ 100 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 525 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $(x - 25)^2 = 100$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು. ಇದರಿಂದ $x - 25 = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಒಂದು ಭುಜ 35ಮೀಟರ್, ಮತ್ತೊಂದು ಭುಜ $50 - 35 = 15$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವೆವು.

ಋಣವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ? $x - 25 = -10$ ಎಂದೂ, ಇದರಿಂದ $x = 15$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಎಂದರೆ, ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 15 ಮೀಟರ್, ಮತ್ತೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $50 - 15 = 35$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿಂದ ಯಾವುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಒಂದೇ ಆಯತವು ಸಿಗುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಒಂದು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಸಿ ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಆಲೋಚಿಸುವಾಗ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತರಗಳು ಲಭಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಾತ್ರ ಅಥವಾ ಎಲ್ಲವೂ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿರಲಾರದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನಂತರ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದವುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಸ್ವೀಕರಿಸುವುದು ಕ್ರಮವಾಗಿದೆ.

(1) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 168 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(2) ಮೊತ್ತ 4 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 2 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) 99, 97, 95, ... ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 900 ಲಭಿಸುವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಮೊತ್ತ $2\frac{1}{6}$ ಆಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(5) ಒಂದು ಟಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ನೀರು ತುಂಬಲು ಎರಡು ಕೊಳವೆಗಳಿವೆ. ಎರಡನ್ನೂ ತೆರೆದಿಟ್ಟಾಗ 12 ಮಿನಿಟುಗಳಲ್ಲಿ ಟಾಂಕಿ ತುಂಬುವುದು. ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟಾಗ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯವು ದೊಡ್ಡ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟಾಗ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 10 ಮಿನಿಟು ಹೆಚ್ಚು. ಸಣ್ಣ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆರೆದಿಟ್ಟಾಗ ನೀರು ತುಂಬಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯವೆಷ್ಟು?

ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ ಬಹುಪದಗಳೂ

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, x ನ ಬದಲು ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ $p(x)$ ಆಗಿ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$p(1) = 4 + 24 + 11 = 39$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right) + 11 = 1 + 12 + 11 = 24$$

$$p(-1) = 4 - 24 + 11 = -9$$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $p(x)$ ಆಗಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂದು ಕೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, $p(x) = 0$ ಎಂದು ಲಭಿಸಲು x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$4x^2 + 24x = -11$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ?

x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಹಂತಗಳನ್ನೂ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

x^2 ನ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣಕವನ್ನು 1 ಆಗಿಸುವ: $x^2 + 6x = -\frac{11}{4}$

x ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು

ಕೂಡಿಸುವ : $x^2 + 6x + 9 = -\frac{11}{4} + 9$

ವರ್ಗವಾಗಿ ಬರೆಯುವ : $(x + 3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ : $x + 3 = \frac{5}{2}$

ಅಥವಾ

$x + 3 = -\frac{5}{2}$

x ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ : $x = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

ಅಥವಾ

$x = -\frac{5}{2} - 3 = -5\frac{1}{2}$

ಎಂದರೆ, $p(x) = 0$ ಎಂದು ಸಿಗಲು $x = -\frac{1}{2}$ ಎಂದೋ, $x = -5\frac{1}{2}$ ಎಂದೋ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಇನ್ನು $p(x) = 1$ ಆಗುವ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೋ?

$p(x) = 1$ ಎಂಬುದನ್ನು $p(x) - 1 = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ; ಅಂದರೆ,

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$4x^2 + 24x + 10$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು $q(x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಹೀಗಾದೀತು.

$q(x) = 4x^2 + 24x + 10$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, $q(x) = 0$ ಎಂದು ಸಿಗಲು x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು?

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ ಸಾಗುವ:

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$$4x^2 + 24x = -10$$

$$x^2 + 6x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

$$(x + 3)^2 = \frac{13}{2}$$

$$x + 3 = \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ ಅಥವಾ } -\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x = -3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ ಅಥವಾ } -3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$$

ಸ್ವಲ್ಪ ಚರಿತ್ರೆ

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳ ಇತಿಹಾಸವಿದೆ. ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ 1500ರಲ್ಲಿಯೇ ಬಾಬಿಲೋನಿಯಾದವರು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಆದರೆ ಇಂದಿನ ಹಾಗೆ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ರೀತಿ ಅಂದು ಇರಲಿಲ್ಲ. (ಈ ರೀತಿಗೆ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಐನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಇತಿಹಾಸವಿದೆ) ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರ ವಿಧಾನಗಳೆಲ್ಲ ಸರಳ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದು. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಾಗ ಪರಿಹಾರ ಮಾರ್ಗಗಳೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಿತ್ತು.

ಅಂದರೆ, ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರೂಪಗಳಾಗಿ ನಾವು ಇಂದು ಮಂಡಿಸುವ ಅನೇಕ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಐತಿಹಾಸಿಕವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ, ಈ ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯು ಮೂಲ ರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$-3+\sqrt{\frac{13}{2}}$ ಅಥವಾ $-3-\sqrt{\frac{13}{2}}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $-3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ $p(x) = 1$ ಎಂದು ಲಭಿಸಲು $x = -3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ ರಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಿಂದ 0 ಲಭಿಸುವುದಕ್ಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದರಲ್ಲಿ $p(x) = 0$ ಆಗುವಂತೆ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಹಂತಗಳನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

- $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ರೀತಿ.

$$ax^2 + bx = -c$$

- x^2 ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕವನ್ನು 1 ಆಗಿಸುವ

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- x ನ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣಕವಾದ $\frac{b}{a}$ ಯ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

- ವರ್ಗವಾಗಿ ಬರೆಯುವ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

- ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯುವ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- x ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಅಂದರೆ

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, $p(x) = 0$ ಎಂದು ಲಭಿಸಲು
>
> $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

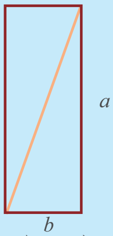
ಕರ್ಣಗಣಿತ

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಬಹಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಅಗಲ ಕಿರಿದಾದ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಕರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯು ಪುರಾತನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಒಂದು ಆವೆಮಣ್ಣಿನ ಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವುದು ಹೀಗೆ

ಅಗಲದ ವರ್ಗವನ್ನು ಉದ್ದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಅದರ ಅರ್ಧವನ್ನು ಉದ್ದದೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಈಗಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ $\sqrt{a^2+b^2} \approx a+\frac{b^2}{2a}$ ಎಂದಾಗುವುದು.



ಇದರ ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಈಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

$ax^2 + bx + c = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಆಗಬೇಕು.

ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಹಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೂ, ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಹಲವು ಹಂತಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, **ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದ ಮೊದಲನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ 99 ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ತಲುಪುವ ಸಮಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು $40t - 4t^2 = 99$ ಆಗಲು t ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಕಂಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$4t^2 - 40t + 99 = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ t ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದಲ್ಲಿ a, b, c ಆಗಿ $4, -40, 99$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು:

$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \times 4 \times 99}}{2 \times 4}$$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 16 \times 99}}{8} = \frac{40 \pm \sqrt{16}}{8}$$

ಅಂದರೆ

$$t = \frac{40 \pm 4}{8} = \frac{44}{8} \text{ ಅಥವಾ } \frac{36}{8}$$

ಇದರಿಂದ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ $t = 5\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $4\frac{1}{2}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

30 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಲ್ಲನ್ನು ನೇರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಆದರೆ, ನೆಲದಿಂದಿರುವ ಎತ್ತರ s ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, s ಮತ್ತು t ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ

$$s = 30t - 4.9t^2$$

ಎಂದಾಗಿದೆ. ಯಾವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕಲ್ಲು ನೆಲದಿಂದ 20 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವುದು?

ಇಲ್ಲಿ $30t - 4.9t^2 = 20$ ಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ t ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯು ಇದಾಗಿದೆ:

$4.9t^2 - 30t + 20 = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ t ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \times 4.9 \times 20}}{9.8}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಅಥವಾ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ. ಹಾಗೆ ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ

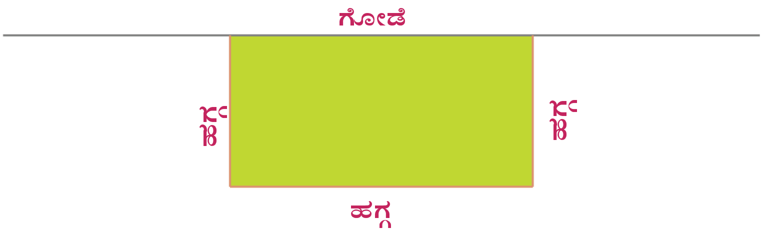
$t \approx 5.36$ ಅಥವಾ 0.76

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ 0.76 ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬುದು ಮೇಲಕ್ಕಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಲುಪುವ ಸಮಯ ಮತ್ತು 5.36 ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬುವುದು ಕೆಳಕ್ಕಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಲುಪುವ ಸಮಯವಾಗಿದೆ.

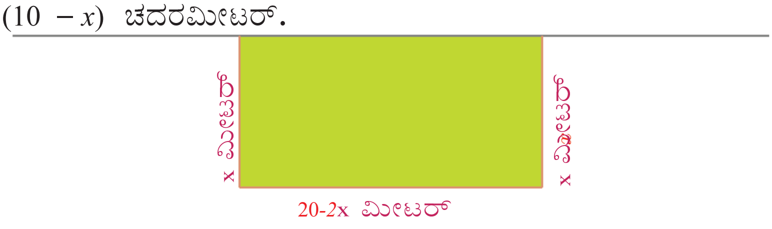
ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

20 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಹಗ್ಗದಿಂದ ನೆಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಆಯತದ ಒಂದು ಬದಿಯು ಗೋಡೆ ಆಗಿದೆ:



ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 50 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಆಯತದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದವು $20 - 2x$ ಮೀಟರ್, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $x(20 - 2x) = 2x(10 - x)$ ಚದರಮೀಟರ್.



ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ ಇದಾಗಿದೆ:

$2x(10 - x) = 50$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಮೊದಲು ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

ಅಂದರೆ,

$$(x-5)^2 = 0$$

ವರ್ಗವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, $x-5=0$, ಅಥವಾ $x=5$

ಆಗ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು $20-10=10$ ಮೀಟರ್. ಭುಜಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? 1 ಚದರ ಮೀಟರಿನಷ್ಟಾದರೆ?

$$\begin{aligned} 2x(10-x) &= 51 \\ 2x^2 - 20x + 51 &= 0 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ, ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯವಾದುದರಿಂದ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-408}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು? ಯಾವುದೇ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವರ್ಗಮೂಲವಿಲ್ಲವಲ್ಲ. (ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ವರ್ಗವು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೇ?)

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x^2-20x+51$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಆಗಲಾರದು.

ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರ ಬದಲು, ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಿದ್ದರೆ ಹೀಗಾಗಬಹುದಿತ್ತು:

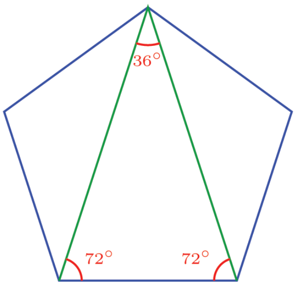
$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 25\tfrac{1}{2} &= 0 \\ x^2 + 10x + 25 &= -\frac{1}{2} \\ (x-5)^2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಋಣವಲ್ಲದಾದುದರಿಂದ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಆಯತಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಹಿಂದಿರುಗೋಣ. ಇದುವರೆಗೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 51 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದರಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು 50 ಚದರಮೀಟರಿಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪವೂ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಕರ್ಣವು ಅದರ ಭುಜದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ?

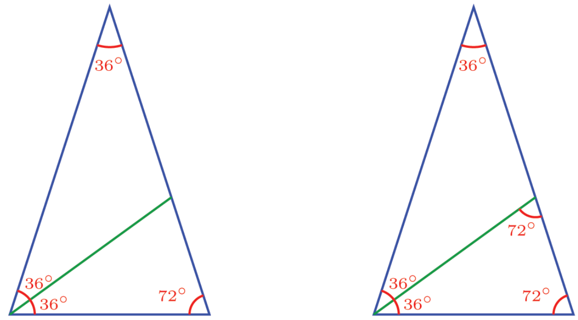


ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ ಆಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಬಹುಭುಜಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ).

ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹೀಗಾದೀತು:

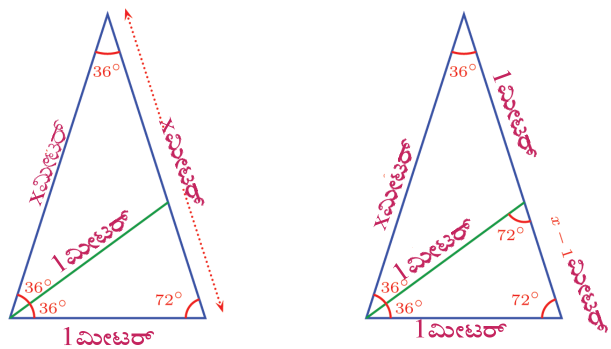
> ಕೋನಗಳು 36°, 72°, 72° ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನಭುಜಗಳು ಪಾದದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು?

ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷತೆಯಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಪಾದಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆದು, ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ನಂತರ, ಹಾಗೆ ಸಿಗುವ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.



ಹಾಗಾದರೆ, ಆರಂಭಿಸಿದ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಗಿರುವ ಕೆಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ. (ಇನ್ನು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಪಾದಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆದು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ತಲುಪಿಸಿದರೆ? ಪುನ: ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು 72° ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ........ಇತ್ಯಾದಿ. ಆ ವಿಚಾರ ಹಾಗಿರಲಿ).

ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಬರೋಣ: ಪಾದವು 1 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಸಮಾನಭುಜಗಳ ಅಳತೆ x ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಕೋನಸಮಭಾಜಕವನ್ನೆಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆರಡೂ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವಗಳಾದುದರಿಂದ ಇತರ ಕೆಲವು ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು:



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ** ಎಂಬ ಪಾಠ).

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು 1 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು x ಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ.

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜ $x - 1$ ಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದರ ಸಮವಾಕ್ಯ,

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

ಅಡ್ಡ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ಇದನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವ.

$$x\,(x - 1) = 1$$

ಬಹುಪದಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ಇನ್ನು ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ x ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವು ಸೂಕ್ತವಾಗಲಾರದು. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ ಮೀಟರ್.

ಅಂದರೆ, ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಕರ್ಣವು, ಭುಜದ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

(1) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 12 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ 15ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

(2) 1 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಷ್ಟು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 300 ಸಿಗುವುದು?

(3) ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ $1\frac{1}{2}$ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಮೊತ್ತ $1\frac{1}{2}$ ಆಗಬಹುದೇ? ಯಾಕೆ?

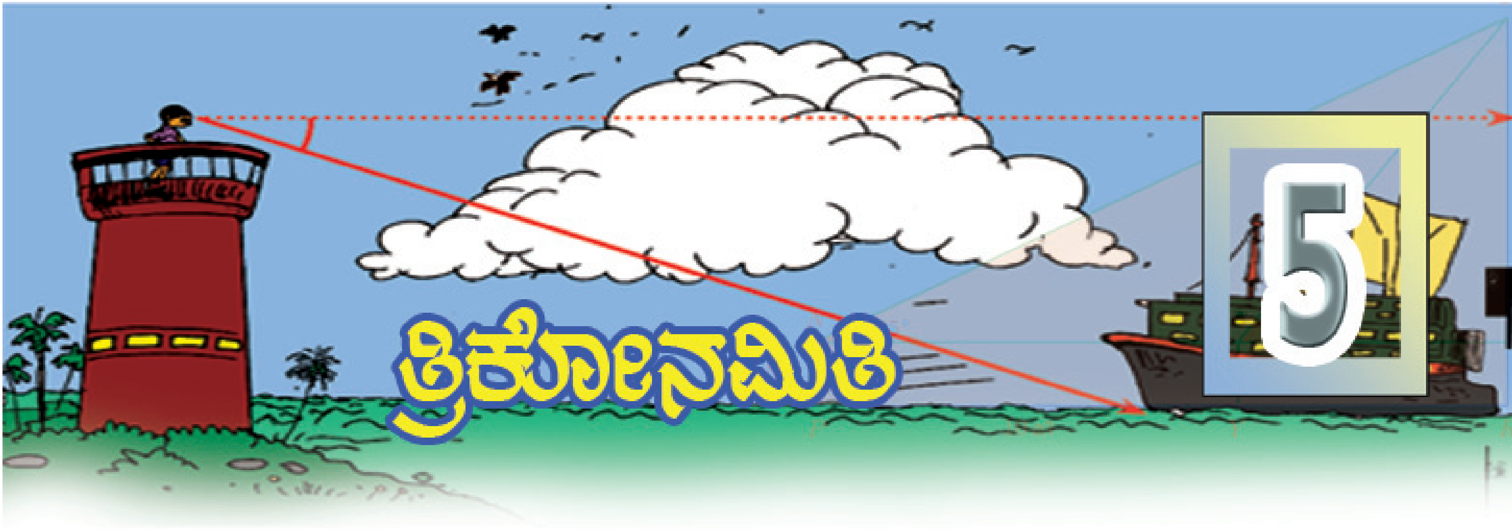
(5) ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಕ್ಕಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ, ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು 42ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, 24 ಎಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ಬರೆದು ಹೋಯಿತು.

ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 10 ಎಂದೂ ಲಭಿಸಿತು. ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು? ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಆಯತ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

(6) ಒಂದು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ -24 ಬದಲಾಗಿ 24 ಎಂದು ಬರೆದು ಹೋಯಿತು. ಸಿಕ್ಕಿದ ಉತ್ತರವು 4, 6 ಆಗಿದೆ. ಸರಿಯಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ ಯಾವುದಾಗಿರಬಹುದು?

ಪುನರವಲೋಕನ

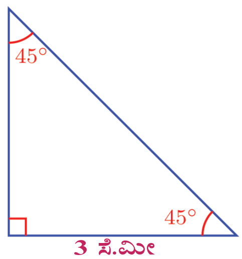
ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು.			
• ವರ್ಗಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು			
• ಕೆಲವು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು.			
• ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರವು ಭೌತಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಹಾರವೂ ಆಗುವ ಮತ್ತು ಆಗದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.			



5 ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

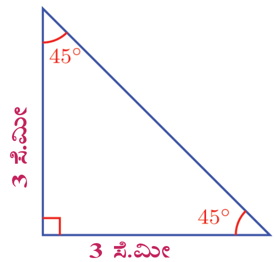
ಕೋನಗಳೂ ಭುಜಗಳೂ

ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಇದರ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

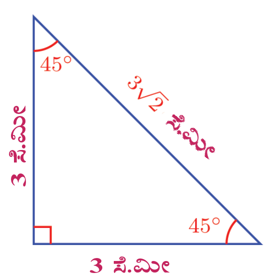
ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆಗ ಬಲಭಾಗದ 45° ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಲಂಬಭುಜದ ಉದ್ದವು 3ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದು.



ಇನ್ನು ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಪ್ರಕಾರ, ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು, $3^2 + 3^2 = 18$

ಆಗ ಕರ್ಣವು, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.



(9 ನೇ ತರಗತಿಯ **ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯ)

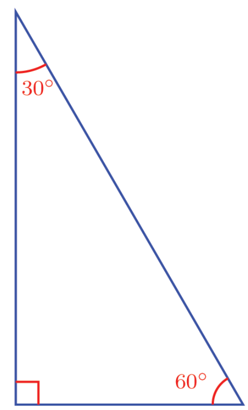
ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ? ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಭುಜದ ಉದ್ದವು ಎಷ್ಟಾಗಿದೆಯೋ, ಅದುವೇ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು. ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು, ಈ ಉದ್ದದ $\sqrt{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

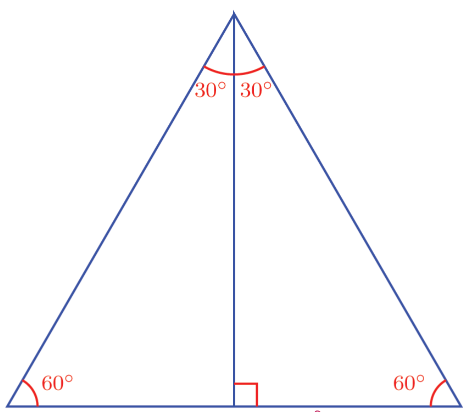
ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ಕೋನಗಳು $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು $1:1:\sqrt{2}$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



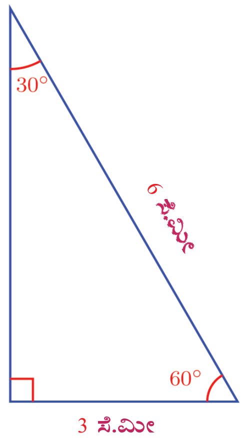
ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದೇ?



ಈ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಅಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವುದು. ಆಗ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಲಭಿಸುವುದು:

ಭೂಮಿಯೂ ಅಳತೆಯೂ

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತಾದ ಅಧ್ಯಯನವೇ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ (trigonometry). ಬಾಗುವಿಕೆ, ಹರಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ತಿರುಗುವಿಕೆಗಳ ಅಳತೆಗಳಾಗಿ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದೆವು. ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ, ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆಗಳು ಮೊದಲು ಬರುವುದು ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ನಿರ್ಮಾಣಗಳಲ್ಲಾಗಿದೆ. ತಿರುಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಆಕಾಶಕಾಯಗಳ ಕುರಿತಾದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿನ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಧ್ಯಯನವು ಭೂಮಿಯ ಅಗತ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾಗಿಯೇ ನಡೆದಿದೆ. ಆಹಾರೋತ್ಪಾದನೆ ಹಾಗೂ ಕೃಷಿಯು ಹವಾಮಾನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಸೂರ್ಯನ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಭೂಮಿಯ ತಿರುಗುವಿಕೆಯು ಹವಾಮಾನವನ್ನು ನಿಯಂತ್ರಿಸುವ ಒಂದು ಘಟಕವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ ಇತರ ಗ್ರಹಗಳ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಇದರಿಂದಾಗಿ ಪ್ರಾಚೀನ ಕೃಷಿ ಸಂಸ್ಕೃತಿಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರವು ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಕಲಿಕಾ ವಿಷಯವಾಗಿತ್ತು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಗಣಿತದ ಅದರಲ್ಲೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕಲಿಕೆಯು ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿದೆ.



ಮೂರನೇ ಭುಜವೋ?

$\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{(6+3)(6-3)} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

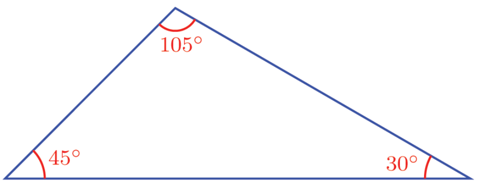
ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು 2ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿ ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ, ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?

ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗುವುದು; ಮೂರನೇ ಭುಜವು $2\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

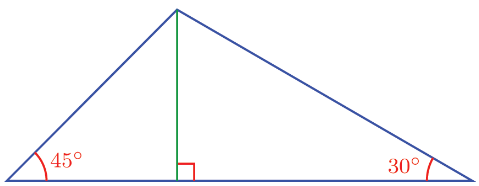
ಆಗ ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ 2 ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು; ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವು $\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಕೋನಗಳ 30°, 60°, 90° ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು $1 : \sqrt{3} : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಈ ಎರಡು ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಲ್ಲದ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ:

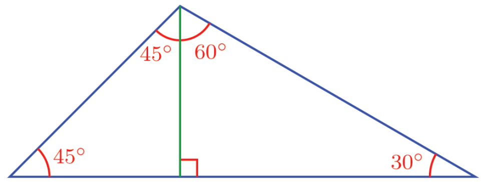


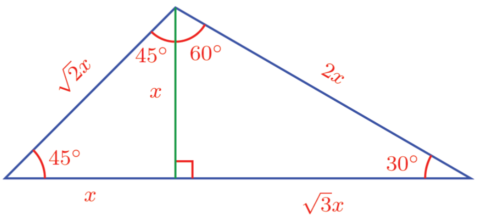
ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು $1:\sqrt{3}:2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳು 30°, 60°, 90° ಆಗಿರಬಹುದೇ? ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲಾಗಿ ಭುಜಗಳು $1:\sqrt{3}:2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ Min = 0 ಬರುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. Segment with Given Length ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ a* sqrt (3) ಎಂದು ನೀಡಬೇಕು. (ಇದರ ಅರ್ಥವು $a\sqrt{3}$ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ) ಈ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯವು a ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ, ಗೆರೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2a ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಈ ವೃತ್ತಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳು $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

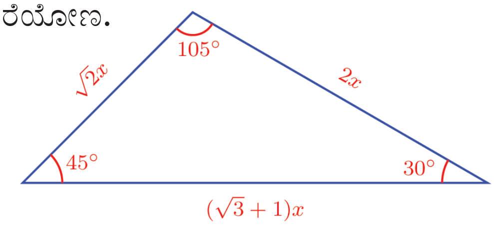
ಈ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಕೋನಗಳು ಎಷ್ಟು?





ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಭುಜವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮೊದಲು ಕಂಡುಕೊಂಡ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು xನ ಮಡಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

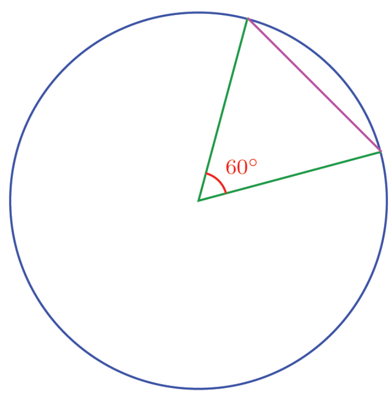
ಆಗ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲವೇ.



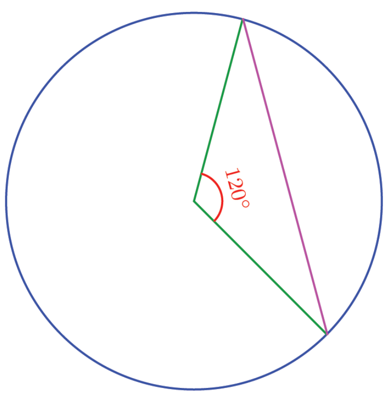
ಅಂದರೆ,

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3} + 1$

ಇತರ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಸಹಾಯಕವಾಗಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 60° ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

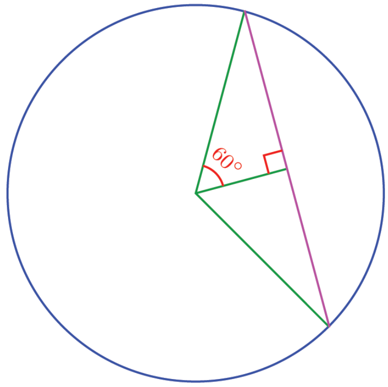


ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 120° ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

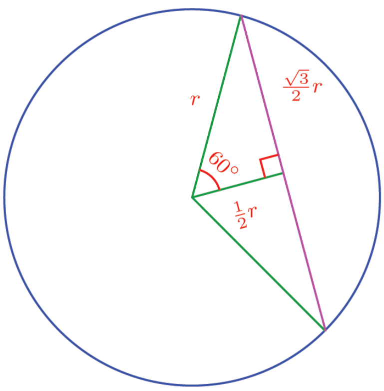


ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು

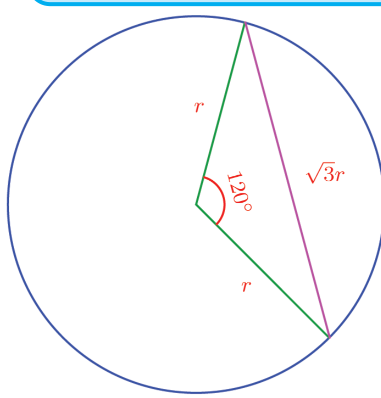
ಎಳೆಯಬೇಕು. ಅದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ (ಕಾರಣವೇನು?):



ತ್ರಿಜ್ಯವೂ, ಅರ್ಧಜ್ಯಾವೂ, ಲಂಬವೂ ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು 30°, 60°, 90°. ಆಗಿವೆ. ಆಗ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಲಂಬದ ಉದ್ದವು $\frac{1}{2}r$ ಮತ್ತು ಅರ್ಧಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

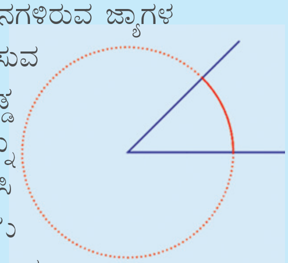


ಆಗ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 120° ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯದ $\sqrt{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.



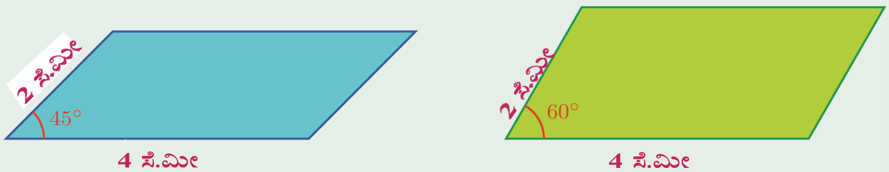
ನೇರದಾರಿ?

ಕೋನದ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಒಂದು ಚಾಪ ಉದ್ದವನ್ನಲ್ಲವೇ. ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸಿನ ಹಿಪ್ಪಾರ್ಕಸ್ (Hipparchus) ಎಂಬ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದನು. ವಿವಿಧ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಈತನು ರಚಿಸಿದ್ದನು ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದ ಅನೇಕ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಹೇಳಿದ್ದರೂ ಅದು ಇನ್ನೂ ಲಭ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಕ್ರಿ. ಶ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಕ್ಲಾಡಿಯಸ್ ಟಾಲಮಿ (Claudius Ptolemy) ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರುವುದು ಲಭ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 60 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}^\circ$ ಎಡೆಬಿಟ್ಟು 180° ವರೆಗಿರುವ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಆತನು ಅತಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದನು.

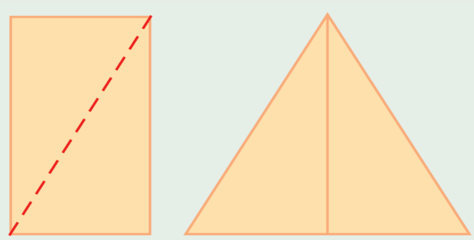


ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು ಇಮ್ಮಡಿಯಾದಾಗ ಚಾಪವು ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ ಆದರೆ ಜ್ಯಾವು ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

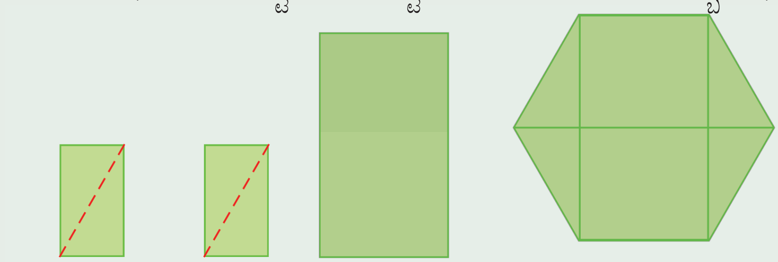
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಹಲಗೆಯನ್ನು ಕರ್ಣದ ಮೂಲಕ ತುಂಡರಿಸಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು 50 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕು. ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

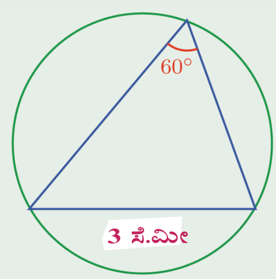


(3) ಎರಡು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕರ್ಣಗಳ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತದೊಡನೆ ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

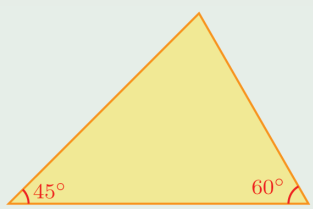


ಷಡ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(4) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ?



(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

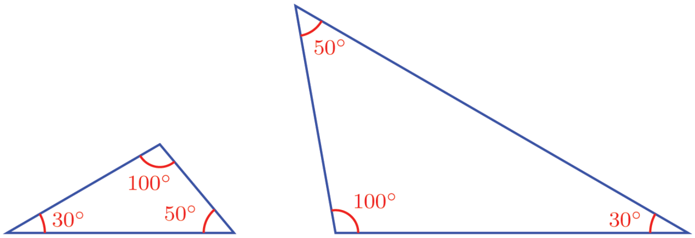


(6) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ?

ಹೊಸಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು

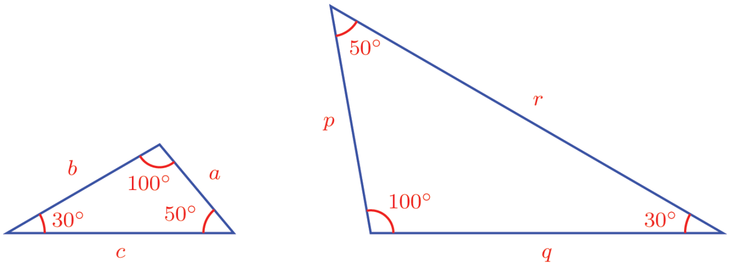
ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳಿಂದ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಇದರಂತೆ ಕೋನಗಳು, ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದೇ?

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವ; ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆಯೇ?

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರಕ್ಕನುಸರಿಸಿ a, b, c ಎಂದೂ, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಅದು p, q, r ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆದುನೋಡುವ:



ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿನ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಜತೆಗಳ ಉದ್ದವು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆಯಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ a, b, c ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನ ಮಡಿಯು p, q, r ಆಗಿದೆ. ಈ ಮಡಿಯನ್ನು k ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$p = ak \qquad q = bk \qquad r = ck$$

ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ

$$a : b : c = p : q : r$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ,

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಬದಲಾದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

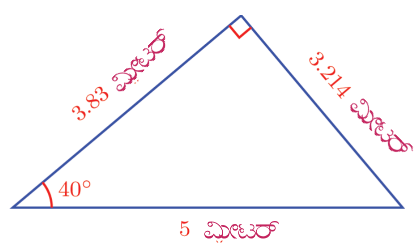
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು, ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಪ್ರಕಾರ, ಕೋನಗಳು 30°, 60°, 90° ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳು $1 : \sqrt{3} : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಇತರ ಕೆಲವು ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆದರೆ ಬಹಳಕಾಲದ ಹಿಂದೆಯೇ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಎಲ್ಲಾ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವರು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿರುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ಕೋನ 40° ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದ ಸರಿಸುಮಾರು 0.6428ಭಾಗವು ಈ ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವಾದರೆ, 0.7660 ಭಾಗವು ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಇಂತಹ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

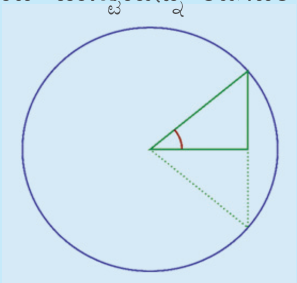
ಆಗ ಕರ್ಣ 5ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಒಂದುಕೋನ 40° ಯೂ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $5 \times 0.6428 = 3.214$ ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಭುಜವು $5 \times 0.766 = 3.83$ ಮೀಟರು ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಹೆಸರಿದೆ. ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ 0.6428 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 40° ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧಭುಜವನ್ನು ಕರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು 40° ಕೋನದ ಸೈನ್ (sine of 40°) ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳುವರು; ಇದನ್ನು $\sin 40^\circ$ ಎಂಬುವುದಾಗಿ ಬರೆಯುವರು.

ಅರ್ಧ ಜ್ಯಾ

ಟಾಲಮಿಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೋನವನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿಗೊಳಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧವನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಅದರ ಇಮ್ಮಡಿ ಕೋನವು ಒಳಗೊಂಡ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



ಕ್ರಿ.ಶ ಐದನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲಾದ ಸೂರ್ಯಸಿದ್ಧಾಂತ ಎಂಬ ಜ್ಯೋತಿಶಾಸ್ತ್ರ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದೇ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಜ್ಯೋತಿ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಆರ್ಯಭಟನ ಆರ್ಯಭಟೀಯಂ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಆತನು ಅರ್ಧಜ್ಯಾ ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದನು. ಜ್ಯಾ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪದವಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ 0.766 ಎಂಬುವುದು 40° ಕೋನದ ಸಣ್ಣಭುಜವನ್ನು (ಇದನ್ನು ಈ ಕೋನದ ಸಮೀಪಭುಜ ಎಂದು ಹೇಳುವರು) ಕರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು 40°ಯ ಕೊಸೈನ್ (cosine of 40°) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದನ್ನು $\cos 40^\circ$ ಎಂದು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವರು.

ಅಂದರೆ,

$$\sin 40^\circ \approx 0.6428$$

$$\cos 40^\circ \approx 0.7660$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 1° ಎಡೆ ಬಿಟ್ಟ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್‌ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಣ್ಣ ಭಾಗವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:

ಕೋನ	sin	cos
35°	0.5736	0.8192
36°	0.5878	0.8090
37°	0.6018	0.7986
38°	0.6157	0.7880
39°	0.6293	0.7771
40°	0.6428	0.7660

(ಪೂರ್ಣರೂಪದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಪಾಠಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.)

ಈ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ

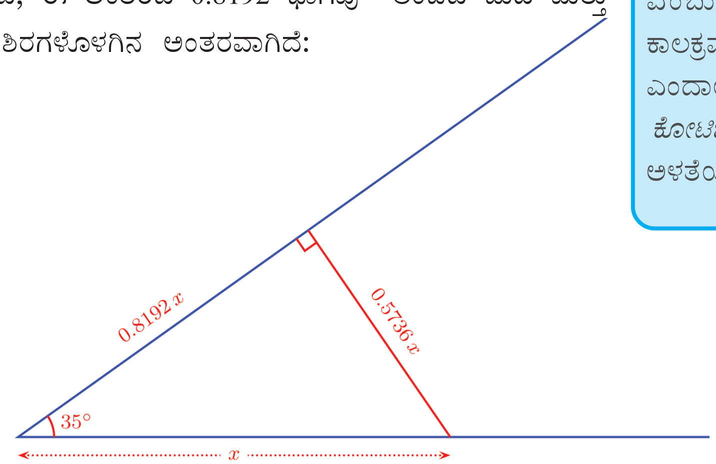
$$\sin 35^\circ \approx 0.5736$$

$$\cos 35^\circ \approx 0.8192$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಬಹುದು:

35° ವಿಸ್ತಾರವಿರುವ ಒಂದು ಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಲಂಬದ ಉದ್ದವು ಕೋನದ ಶಿರದಿಂದ ಈ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರದ 0.5736 ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ಈ ಅಂತರದ 0.8192 ಭಾಗವು ಲಂಬದ ಬುಡ ಮತ್ತು ಕೋನದ ಶಿರಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವಾಗಿದೆ:



ಹೆಸರು ಬಂದ ದಾರಿ

ಆರ್ಯಭಟನು ಕೋನದ ಅರ್ಧಜ್ಯಾ ಎಂದು ಕರೆದಿರುವ ಅಳತೆಯನ್ನೇ ಇಂದು sin ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹೆಸರು ಬಂದಿರುವ ಕಥೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಆರ್ಯಭಟನೇ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ವಿಶೇಷತೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಜ್ಯಾ ಎಂದು ಮಾತ್ರವೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದನು. ಕ್ರಿ.ಶ 7ನೇ ಶತಮಾನದ ಕಾಲಘಟ್ಟದಲ್ಲಿ, ಅರಬ್ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಆಡಳಿತಾಧಿಕಾರಿಗಳು, ಗ್ರೀಸ್‌ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಭಾರತದಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರಮುಖ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಅರಬಿಕ್ ಭಾಷೆಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ್ದರು. ಆರ್ಯಭಟೀಯಂವನ್ನು ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದವರು, ಜ್ಯಾ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಹೆಚ್ಚೇನೂ ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಜಿಬ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು. ಪ್ರಾಚೀನ ಅರಬ್ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಂಪ್ರದಾಯವಿಲ್ಲದುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಜ್‌ಬ್ ಎಂದಷ್ಟೇ ಬರೆದರು.

ಕ್ರಿ.ಶ ಹದಿಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ, ಈ ಹಿಂದೆ ಅರಬ್ ಗ್ರಂಥಗಳೆಲ್ಲಾ ಯುರೋಪಿಗೆ ತಲುಪಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಗೆ ಭಾಷಾಂತರಗೊಂಡವು. ಜ್‌ಬ್ ಎಂದು ಅರಬಿಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಜೈಬ್ ಎಂಬ ಪದವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಪ್ಪಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡರು. ಈ ಪದಕ್ಕೆ ಅರಬಿಕ್‌ನಲ್ಲಿ ತಿರುವು, ಬಾಗು ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಅರ್ಥಗಳಿವೆ. ಈ ಅರ್ಥ ಬರುವ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದವಾದ sinus ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾಷಾಂತರ ಗೊಳಿಸಿದರು. ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ ಇದು ಲೋಪಗೊಂಡು sine ಎಂದಾಯಿತು.

ಕೋಟಿಜ್ಯಾ ಎಂದು ಆರ್ಯಭಟನು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಅಳತೆಯು cosine ಎಂದಾಯಿತು.

ಕೋನವು 40° ಆದರೆ ಈ ಅಳತೆಗಳು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ, 0.6428 ಭಾಗ ಮತ್ತು 0.766 ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡುವಾಗ, ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್‌ಗಳು ಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

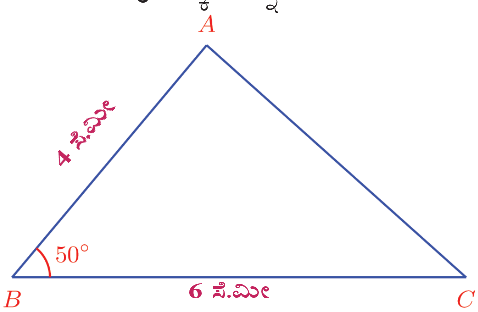
ಎರಡು ರೀತಿಯ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಮೊದಲು ಕಲಿತ ವಿಷಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್‌ಗಳಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

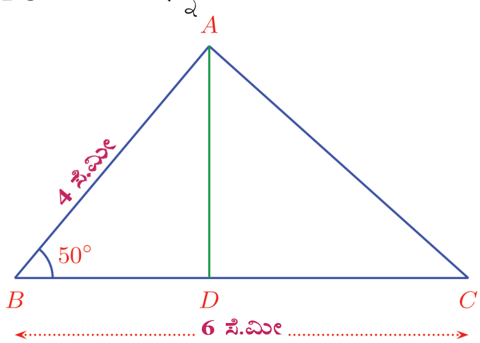
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೊಸೈನ್‌ಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.



ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ A ಯಿಂದ BC ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ:



ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

ಇದರಿಂದ AD ಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ABD ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$AD = AB \times \sin 50^\circ = 4 \sin 50^\circ$$

ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಅಳತೆಗಳು

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ, ಉದ್ದವು 1 ಆಗಿರುವ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಒಂದು Angle ಸ್ಲೈಡರ್ α ವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. Angle with Given Sizeನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ B ಮತ್ತು A ಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ α ಎಂದು ನೀಡಬೇಕು. ಹೊಸತಾಗಿ B′ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಈ Bಯ ಮೂಲಕ AB′ ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದು AB′ ನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು C ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿದ ಬಳಿಕ AB′ ನ್ನು Hide ಮಾಡಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಕೋನದ ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದು ಕಾಣುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದರಲ್ಲಿ BC ಯ ಉದ್ದವು ಕೋನದ ಅಳತೆಯ sin ನ ಬೆಲೆಯೂ AC ಯ ಉದ್ದವು cos ನ ಬೆಲೆಯೂ ಆಗಿದೆ. (ಯಾಕೆ?) ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ sine, cosine ನ ಬೆಲೆಯ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. sine, cosine ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗರಿಷ್ಟ ಎಷ್ಟರವರೆಗೆ ಆಗಬಹುದು?

ಇನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$$\sin 50^{\circ} \approx 0.7660$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ

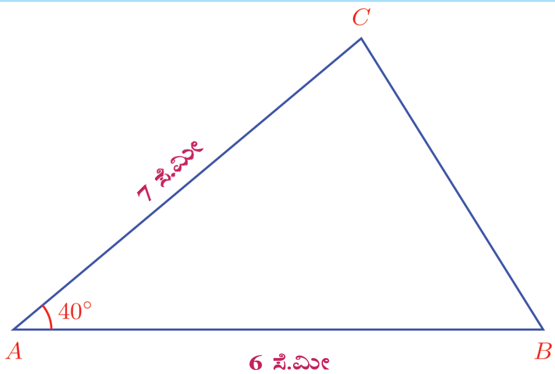
$$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$3 \times AD = 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

ಅಂದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸರಿಸುಮಾರು 9.19 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

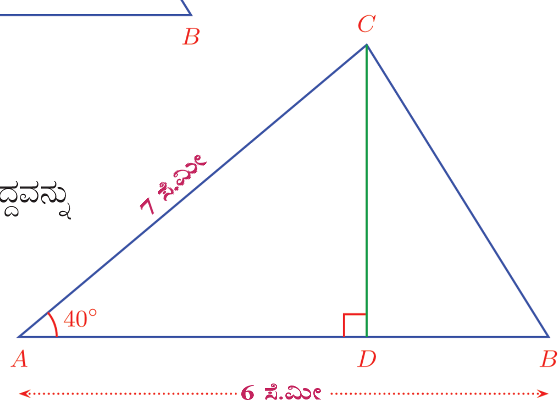
> ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ B ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 50° ಯ ಬದಲು 130° ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?



ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವಾದ BCಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

C ಯಿಂದ ABಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು:



ಈಗ BCD ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

ಇನ್ನು BD ಮತ್ತು DC ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ACD ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$DC = AC \sin 40^{\circ} \approx 6 \times 0.6428 \approx 3.86 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಇದು ತ್ರಿಕೋನದಿಂದಲೇ

$$AD = AC \cos 40^{\circ} \approx 6 \times 0.766 \approx 4.6 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ

$$BD = AB - AD \approx 7 - 4.6 = 2.4 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಇನ್ನು

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} \approx \sqrt{3.86^2 + 2.4^2} = 4.54 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ BC ಉದ್ದವು ಸರಿಸುಮಾರು 4.5 ಮೀಟರಾಗಿದೆ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ A ಯಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 100° ಆದರೆ BCಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(1) ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ನೋಡದೆ

$\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$

ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಕೋನವು 100°ಯೂ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರೂ ಆಗಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 50°ಆದರೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

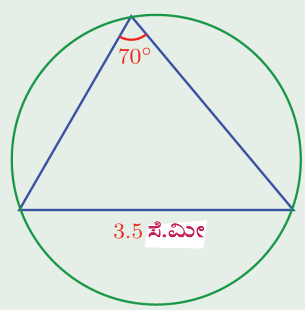
(4) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು 14 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿವೆ. ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು 30° ಆದರೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

(5) ಒಂದು ಭುಜ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಕೋನವು 40° ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. 40° ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಕನಿಷ್ಟ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಬೇಕು?

(6) ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಮೂಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

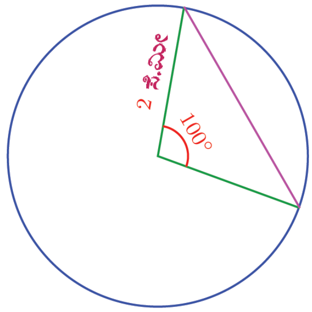
(7) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿನ ಕೋನವು 40° ಆಗಿವೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳು ಇಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು 140° ಆದ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

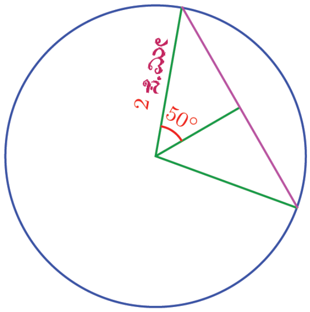
(8) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?



ತ್ರಿಕೋನವೂ ವೃತ್ತವೂ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು:





ಇದೇ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಮೇಲಿನ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವು ಕರ್ಣದ $\sin 50^\circ$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ

$$\sin 50^\circ \approx 0.7660$$

ಆಗ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧವು

$$2 \times 0.766 \approx 1.53 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಆಗಿರುವುದು; ಆದುದರಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು

$$2 \times 1.53 \approx 3.06 \approx 3.1 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಾಡಿರುವುದೇನು ?

ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದ ಅರ್ಧದ ಸೈನ್ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧವು ಲಭಿಸುವುದು. ಅದನ್ನು ಎರಡು ಮಡಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಜ್ಯಾದ ಅಳತೆಯು ಸಿಗುವುದು.

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದ ಅರ್ಧದ ಸೈನನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವುದರ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

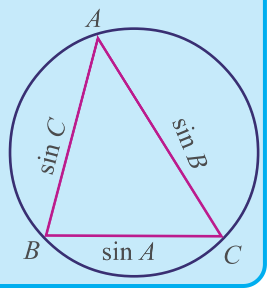
ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ c° ಆಗಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು $2r \sin \left(\frac{c}{2}\right)^\circ$ ಆಗಿದೆ.

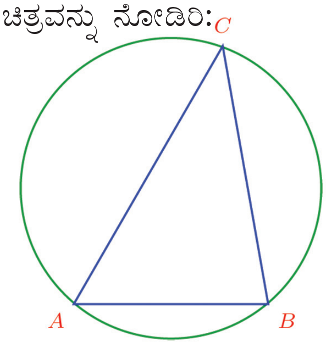
ಹೊಸ ಅರ್ಥಗಳು

ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವ್ಯಾಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಏಕಕವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಯಾವುವೆಲ್ಲಾ ಆಗಬಹುದು?

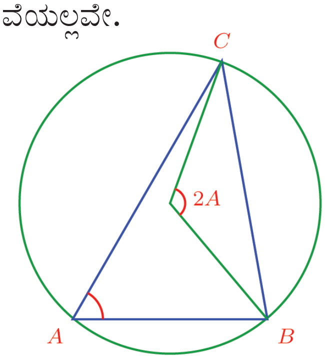
$BC = d \sin A = \sin A$. ಇದೇ ರೀತಿ $CA = \sin B$, $AB = \sin C$. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಕೋನದ sin, ವ್ಯಾಸ1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಈ ಕೋನ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ.



ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವೂ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವೂ, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾದ AB, BC, CA ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ.

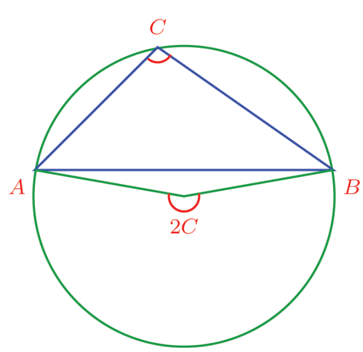


ವೃತ್ತಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಂತೆ BC ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನವು ತ್ರಿಕೋನದ A ಎಂಬ ಕೋನದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಈ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು A ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $2A$ ಆಗಿರುವುದು.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈಗ ಕಲಿತ ತತ್ವದಂತೆ, BC ಯ ಉದ್ದವು $2r \sin A$ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, CA ಯ ಉದ್ದವು $2r \sin B$ ಎಂದೂ, AB ಯ ಉದ್ದ $2r \sin C$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವು 90° ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೋ?



ಇದರಲ್ಲಿ AB ಯ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $360 - 2C$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ AB ಯ ಉದ್ದವು $2r \sin (180 - C)$.

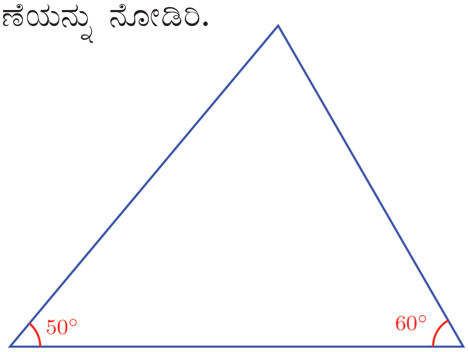
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು, ಅದರ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪರಿವೃತ್ತ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ ಅದರ ಪರಿಪೂರಕಕೋನದ ಸೈನ್ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬವಾದರೆ ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವು ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೇ ಆಗಿರುವುದು.

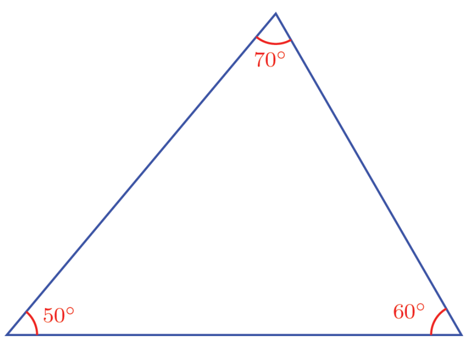
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುವುದೆಂದು ಈಗ ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು, ಅವುಗಳ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಅಳತೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ಅದರ ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನದ ಸೈನನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನವಾದರೆ, ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಭುಜ 1 ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನವು 70° ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.



ಪರಿವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು d ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $d \sin 70^\circ = 6$

$$d = \frac{6}{\sin 70^\circ} \approx \frac{6}{0.94} = 6.38$$

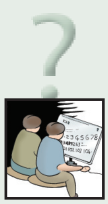
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$6.38 \times \sin 50^\circ \approx 6.38 \times 0.77 \approx 4.9$$

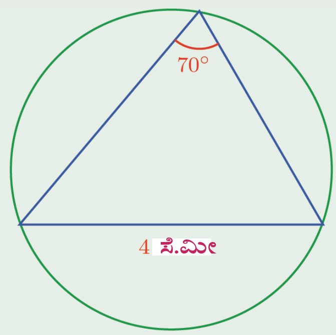
$$6.38 \times \sin 60^\circ \approx 6.38 \times 0.87 \approx 5.5$$

ಅಂದರೆ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಸರಿಸುಮಾರು 4.9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು 5.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದು.



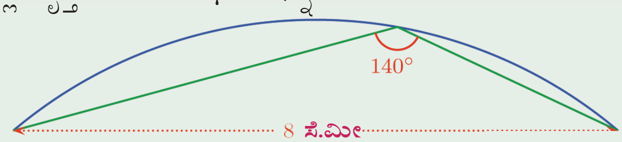
ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು (ಬೇಕಾದರೆ ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್) ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



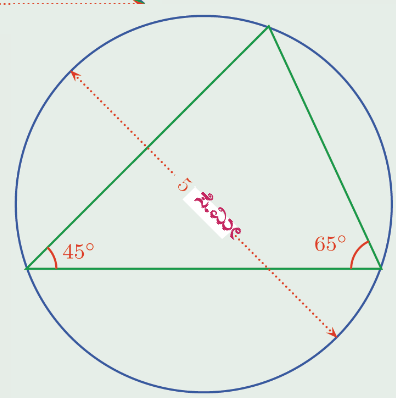
(2) 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಭಾಗದ ಕೋನವು 80°ಯೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



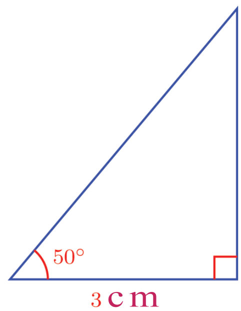
ಇಡೀ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ?

(4) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(5) 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ 50° ಕೋನವನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಿಂದ 65° ಕೋನವನ್ನೂ ಎಳೆದು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆ



ಒಂದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಚಿಕ್ಕಭುಜದ ಉದ್ದವು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು. ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಕೋನವು 50°.

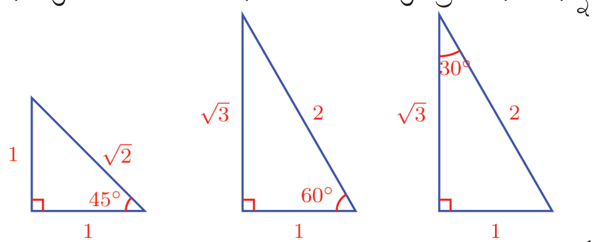
ರಚಿಸಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲವೇ? ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

ಕೋಷ್ಟಕ ನೋಡಿ $\cos 50^\circ$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಕರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅನಂತರ $\sin 50^0$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮೂರನೆಯ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅದುವೇ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನು ಸಮೀಪ ಭುಜದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ.

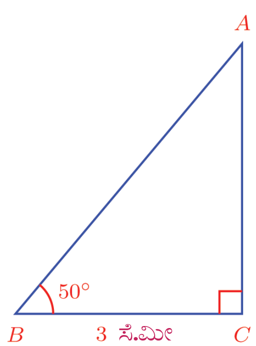
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೋನದ ಟೇಂಜೆಂಟ್ (tangent) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಇದನ್ನು tan ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ನಾವು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.



$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

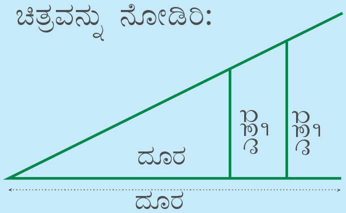
ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪುನಃ ನೋಡುವ:



ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆ

ವೃತ್ತವನ್ನು 360 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರಾಚೀನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದವರ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದೊಡನೆ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಸರಿಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಪೂ ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಿಂದ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ. ಇದುವೇ ಅಂದಿನ ಡಿಗ್ರಿ ಅಳತೆ.

ಆದರೆ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಮಾಣ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಲು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಕೋನದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ದೂರ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ ಬದಲಾದರೂ ಎತ್ತರವನ್ನು ದೂರದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿಗುವುದು ಅಲ್ಲವೇ. (ಕಾರಣ?) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನಕ್ಕೂ ಅದರ ವಿಸ್ತಾರಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಾಗುವಿಕೆ ಅಳತೆಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವುದು.

ಪುರಾತನ ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಅಹ್‌ಮೋಸ್ ಪಪ್ಪೈರಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಲ್ಲಿ ಪಾದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಮುಖಗಳೊಳಗಿನ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು.

ಪುರಾತನ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯದಲ್ಲಿ, ಆವೆಮಣ್ಣಿನ ಹಲಗೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ವಿಭಿನ್ನ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಕರ್ಣವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

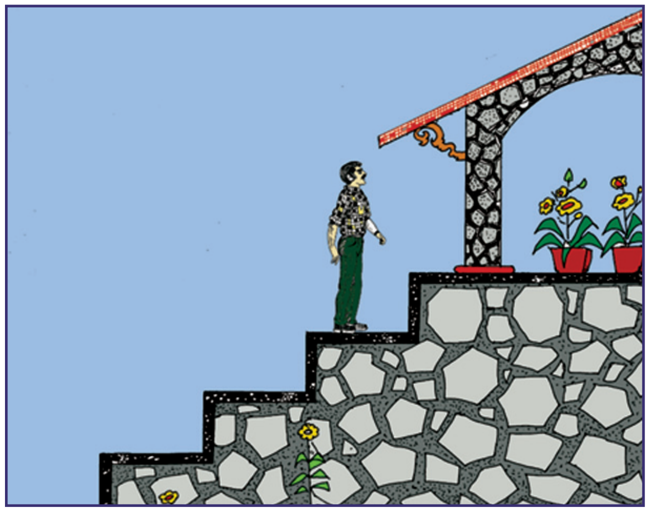
ಈಗ ಹೇಳಿದುದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ,

$$\frac{AC}{BC} = \tan 50^\circ$$

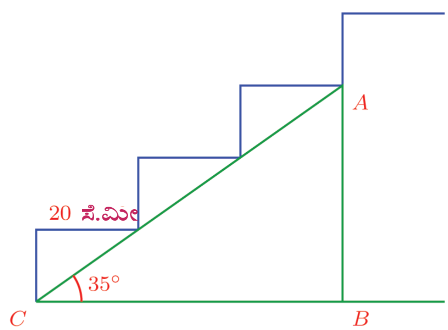
ಇನ್ನು ಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ AC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$AC = BC \times \tan 50^\circ \approx 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6$$

ಕೋನದ tan ಅಳತೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ನಿಂತಿರುವುದು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.



ಮೆಟ್ಟಲುಗಳ ಅಳತೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.



ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಎತ್ತರವು AB ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

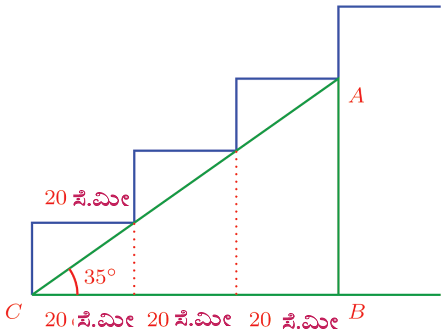
ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$AB = BC \times \tan 35^\circ$$

ಇದರಲ್ಲಿ

$$\tan 35^\circ \approx 0.7002$$

ಎಂದು ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ಲಭಿಸುವುದು. BC ಯ ಉದ್ದವೋ?



ಈ ಚಿತ್ರದಿಂದ BC ಯ ಉದ್ದ 60 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ಕಾಣುವುದು.

ಆಗ $AB = BC \times \tan 35^\circ \approx 60 \times 0.7002 \approx 42.01$

ಅಂದರೆ, ಎತ್ತರವು ಸರಿಸುಮಾರು 42ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ.

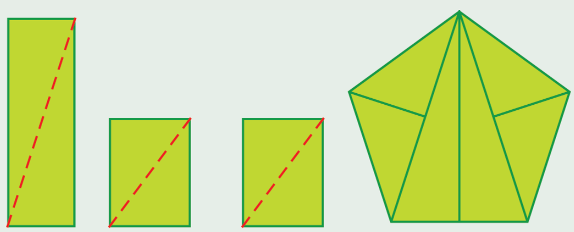
ಬೇರೆ ಅಳತೆಗಳು

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಒಂದು ಕೋನವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವಂತೆ ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಹಲವು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಸಿ sin, cos, tan ಎಂಬೀ ಅಳತೆಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಭುಜಗಳೊಳಗೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಬಾಕಿಯಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅವುಗಳಿಗೂ ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿದೆ. ಒಂದು ಕೋನದ sin, cos ಎಂಬಿವುಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಿಗೆ ಕೊಸೀಕೆಂಟ್ (cosecant), ಸೀಕೆಂಟ್(secant) ಎಂದು ಹೆಸರಿರುವುದು; tan ನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಕೊಟೇಂಜೆಂಟ್ (cotangent) ಎಂದೂ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ, cosec, sec, cot ಎಂದು ಬರೆಯುವರು.

(1) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನ 50° ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಕರ್ಣವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಏಣಿಯ ಬುಡವು ಗೋಡೆಯಿಂದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಏಣಿ ಮತ್ತು ನೆಲಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು 40° ಆದರೆ ಏಣಿಯ ತುದಿಯು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ?

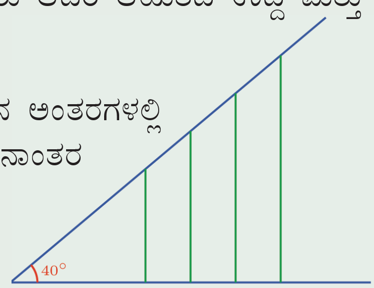
(3) ಮೂರು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕರ್ಣಗಳ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬೇಕು.



ಪಂಚಭುಜದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ 30ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದರೆ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವು ಎಷ್ಟು?

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಅಂತರಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

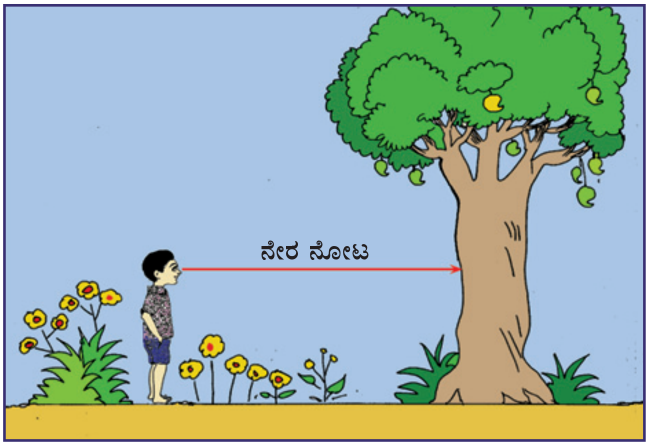
ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?

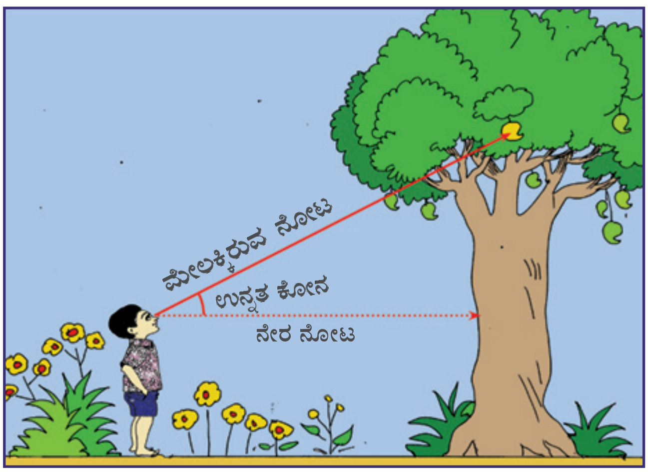


(5) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ 6ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು 40° ಮತ್ತು 65° ಆಗಿವೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದೂರಗಳೂ ಎತ್ತರಗಳೂ

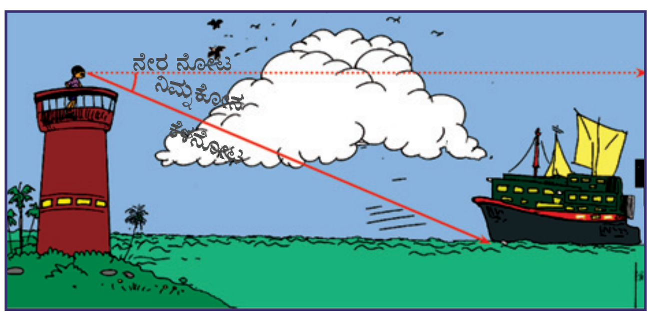
ನಮಗಿಂತ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವವುಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ತಲೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲೆತ್ತಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಮ್ಮ ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆಯು ಭೂಮಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವವುಗಳನ್ನು ನೋಡುವಾಗ, ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆಯು ಮೇಲಕ್ಕೇರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು ಉನ್ನತಕೋನ (angle of elevation) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ನಿಂತುಕೊಂಡು ಕೆಳಗಿರುವವುಗಳನ್ನು ನೋಡುವಾಗ ದೃಷ್ಟಿರೇಖೆಯು ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ.



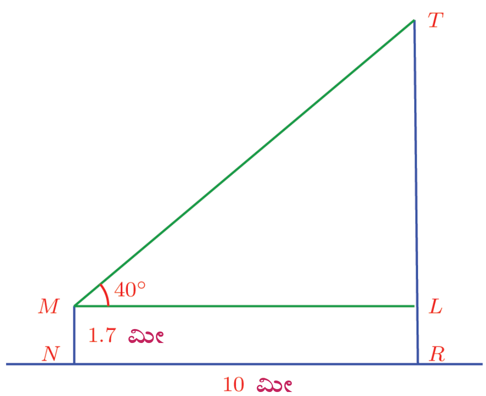
ಈ ರೀತಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ನಿಮ್ನಕೋನ (angle of depression) ಎನ್ನುವರು.

ಈ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕ್ಲೈನೋಮೀಟರ್(clinometer) ಎಂಬ ಉಪಕರಣವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಅಳೆಯುತ್ತಾರೆ. ನೇರವಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ದೂರ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಕ್ಲೈನೋಮೀಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆದು sin, cos ಮತ್ತು tanನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುವುದು.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 10 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಮರದ ತುದಿಯನ್ನು 40° ಉನ್ನತಕೋನದಲ್ಲಿ ನೋಡುವನು. ಅವನ ಎತ್ತರ 1.7 ಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮರಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವಿದೆ?

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ MN ಎಂಬ ಗೆರೆಯು ನೋಡುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನೂ TR ಮರವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು.



ಟೇನ್ ಅಳತೆಗಳು

ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್‌ನಂತೆ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಟೇನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದ್ದವು 1 ಆಗಿ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನೂ B ಯ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಒಂದು Angle Slider α ವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬೇಕು. Angle with Given Size ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ B, A ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ α ಎಂದು ನೀಡಬೇಕು. ಆಗ B′ ಎಂಬ ಹೊಸ ಬಿಂದುವು ಲಭಿಸುವುದು. A, B′ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದು B ಯಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು C ಎಂದು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಇನ್ನು ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲದ ಗೆರೆಗಳು ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು Hide ಮಾಡಬೇಕು. BC ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಇದು ∠A ಯ tan ನ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. (ಯಾಕೆ?) ಟೇನ್ ಅಳತೆಯು ಎಷ್ಟರವರೆಗೆ ಆಗಬಹುದು?

ಚಿತ್ರದಿಂದ (ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ),

$$TL = ML \tan 40^{\circ} \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆಗ

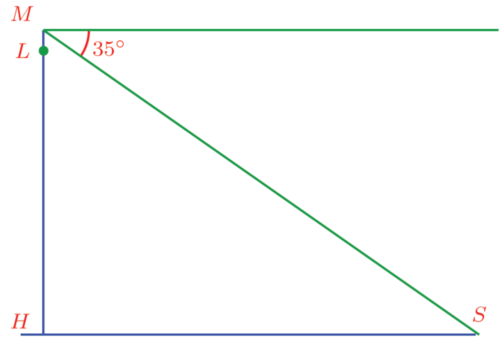
$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.391 + 1.7 = 10.091$$

ಅಂದರೆ, ಮರದ ಎತ್ತರವು ಸರಿಸುಮಾರು 10.09 ಮೀಟಾರಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

1.8 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 25 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ದೀಪಸ್ತಂಭದ ತುದಿಯಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಒಂದು ಹಡಗು 35° ನಿಮ್ನಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿತು. ಅದು ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಬುಡದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ?

ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯುವ:



ಇದರಲ್ಲಿ LH ದೀಪಸ್ತಂಭವನ್ನೂ, ML ಅದರ ತುದಿಯಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಮತ್ತು S ಹಡಗಿನ ಸ್ಥಾನವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ HS ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ,

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

ಅಲ್ಲದೆ $\angle HMS = 55^{o}$

ಆಗ MHS ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$HS = MH \tan 55^{o} \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

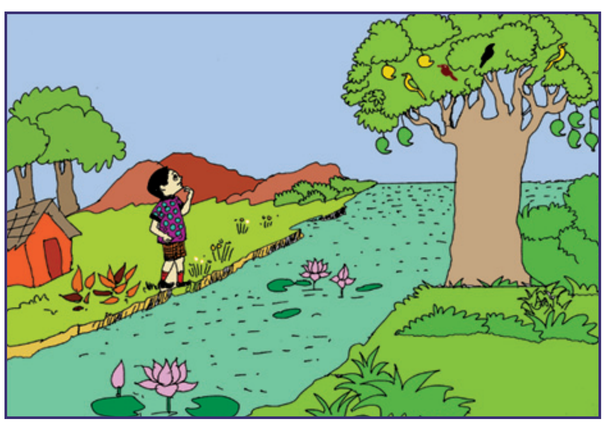
ಅಂದರೆ, ಹಡಗು ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಬುಡದಿಂದ ಸರಿಸುಮಾರು 38.27 ಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಬಾಗುವಿಕೆಯೂ ಹರಡುವಿಕೆಯೂ

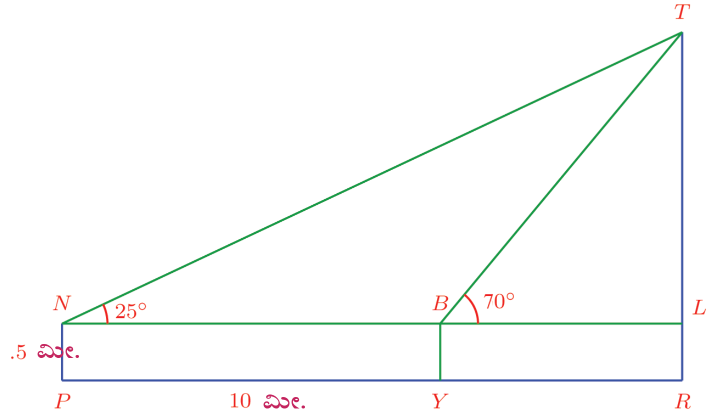
ಕೋನಗಳನ್ನು ಹರಡುವಿಕೆಯ ಅಳತೆಗಳಾಗಿ ಕಾಣುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಂದಾಗಿ sin, cos ಎಂಬೀ ಅಳತೆಗಳುಂಟಾದವು ಎಂದು ತಿಳಿದಿವೆಲ್ಲವೇ. ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಕೋನವನ್ನು ಕಾಣುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಇದರೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಿದಾಗ tan ಉಂಟಾಯಿತು. (ಅದಕ್ಕಿರುವ ನಿರ್ವಚನ ಎತ್ತರವನ್ನು ದೂರದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಹಳೆಯ ವಿಧಾನವಲ್ಲವೇ)

ಕ್ರಿ.ಶ ಒಂಬತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಹಮ್ಮದ್ ಇಬಿನ್ ಅಬ್ದುಲ್ಲಾ ಅಲ್ ಮೊರ್‌ವಾಸಿ ಎಂಬ ಅರಬ್ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಂಡಿಸಿ, tan ಗೆ ಒಂದು ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದನು. ಹದಿನಾರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕೆ tangent ಎಂದು ಹೆಸರು ಬಂತು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ: ಒಂದು ತೋಡಿನ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು ತೋಡಿನ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುದಿಯನ್ನು 50^{o} ಉನ್ನತಕೋನದಿಂದ ನೋಡಿದನು. 10 ಮೀಟರು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಬಂದು ಪುನ: ಮರದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದು 25^{o} ಉನ್ನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿತು. ಹುಡುಗನ ಎತ್ತರ 1.5 ಮೀಟರು ಆದರೆ, ತೋಡಿನ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರವು TR ಮರವನ್ನೂ BY ಹುಡುಗನು ಮೊದಲು ನಿಂತಿದ್ದ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ NP ಹುಡುಗನು ನಂತರ ನಿಂತ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದುದು YR ಮತ್ತು TR. ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$$

ಆದುದರಿಂದ, BL ಮತ್ತು, TL ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು.

$$BL = x \qquad TL = y$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ BTL ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$y = x \tan 70^{\circ} \approx 2.7475x$$

ಎಂದೂ, NTL ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$y = (x + 10) \tan 25^{\circ} \approx 0.4663\ (x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

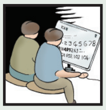
ಉಂಟಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದರಿಂದ

$$x \approx \frac{4.663}{2.2818} \approx 2.044$$

ಎಂದು (ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ ತೋಡಿನ ಅಗಲವು ಸರಿಸುಮಾರು 2.04 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಮರದ ಎತ್ತರ ಸರಿಸುಮಾರು $5.62 + 1.75 = 7.12$ ಮೀಟರಾಗಿದೆ.



(1) ಸೂರ್ಯನು 40° ಉನ್ನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವಾಗ, ಒಂದು ಮರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 18ಮೀಟರು ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮರದ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

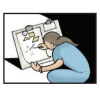
(2) ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಬುಡದಲ್ಲಿ 1.75 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು, 40 ಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗುಡ್ಡದ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಉನ್ನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ನೋಡುವನು. ಅದೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಗೋಪುರದ ತುದಿಯಿಂದ 50° ಉನ್ನತಕೋನದಲ್ಲಿ ಗುಡ್ಡದ ತುದಿಯನ್ನು ನೋಡಿದನು. ಗುಡ್ಡದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ನಿರ್ಮಾಣಕಾರ್ಯ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು 1.5 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಹುಡುಗನು 30° ಉನ್ನತಕೋನದಲ್ಲಿ ನೋಡುವನು. 10 ಮೀಟರುಗಳಷ್ಟು ಎತ್ತರಿಸಿ ಕಟ್ಟಡದ ನಿರ್ಮಾಣಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿದಾಗ, ಆ ಹುಡುಗನು ಅದೇ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯನ್ನು 60° ಉನ್ನತಕೋನದಲ್ಲಿ ನೋಡುವುದಾದರೆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

(4) 1.8 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಒಂದು ಟೆಲಿಫೋನ್ ಟವರಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ, 10 ಮೀಟರು ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯನ್ನು 40° ನಿಮ್ನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ಬುಡವನ್ನು 60° ನಿಮ್ನ ಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ನೋಡುವನು. ಟವರಿನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು? ಅದು ಕಟ್ಟಡದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ?

(5) ಒಂದು ವಿದ್ಯುತ್‌ಕಂಬದ ತುದಿಯಿಂದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಎರಡು ಸರಿಗೆಗಳನ್ನು ಇಬ್ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಗಿಯಾಗಿ ನೆಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಲಾಗಿದೆ. ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಗೆಗಳು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು 55° ಮತ್ತು 40°ಯಾಗಿವೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಕಬ್ಬಿಣದ ಸರಿಗೆಗಳ ಬುಡಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವು 25 ಮೀಟರು ಆದರೆ ವಿದ್ಯುತ್‌ಕಂಬದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

(6) ಸೂರ್ಯನು 35° ಉನ್ನತಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಾಗ ಒಂದು ಮರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು 10 ಮೀಟರ್ ಆಗಿತ್ತು. ಸೂರ್ಯನು 25° ಉನ್ನತ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಾಗ ಅದೇ ಮರದ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವೆಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಸಂಶೋಧನೆ

- ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
- sinನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ π ಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿ ಬರುವ ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಅಳತೆಗಳು

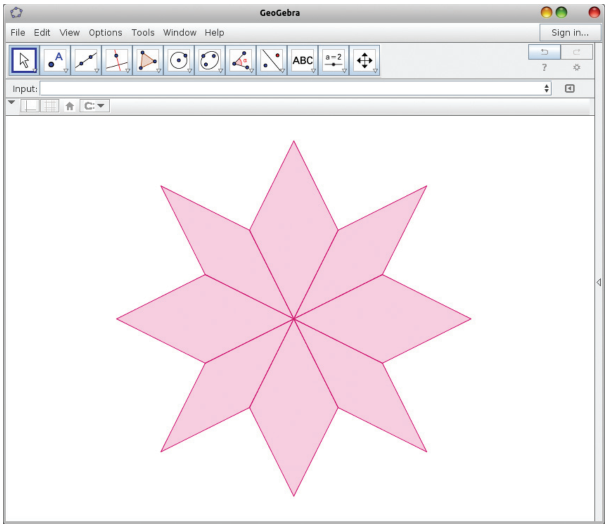
ಕೋನ	sin	cos	tan	ಕೋನ	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	**46°**	0.7193	0.6947	1.0355
1°	0.0175	0.9998	0.0175	**47°**	0.7314	0.6820	1.0724
2°	0.0349	0.9994	0.0349	**48°**	0.7431	0.6891	1.1106
3°	0.0523	0.9986	0.0524	**49°**	0.7547	0.6561	1.1504
4°	0.0698	0.9976	0.0699	**50°**	0.7660	0.6428	1.1918
5°	0.0872	0.9962	0.0875	**51°**	0.7771	0.6293	1.2349
6°	0.1045	0.9945	0.1051	**52°**	0.7880	0.6157	1.2799
7°	0.1219	0.9925	0.1228	**53°**	0.7986	0.6018	1.3270
8°	0.1392	0.9903	0.1405	**54°**	0.8090	0.5878	1.3764
9°	0.1564	0.9877	0.1584	**55°**	0.8192	0.5736	1.4281
10°	0.1736	0.9848	0.1763	**56°**	0.8290	0.5592	1.4826
11°	0.1908	0.9816	0.1944	**57°**	0.8387	0.5446	1.5399
12°	0.2079	0.9781	0.2126	**58°**	0.8480	0.5299	1.6003
13°	0.2250	0.9744	0.2309	**59°**	0.8572	0.5150	1.6643
14°	0.2419	0.9703	0.2493	**60°**	0.8660	0.5000	1.7321
15°	0.2588	0.9659	0.2679	**61°**	0.8746	0.4848	1.8040
16°	0.2756	0.9613	0.2867	**62°**	0.8829	0.4695	1.8807
17°	0.2924	0.9563	0.3057	**63°**	0.8910	0.4540	1.9626
18°	0.3090	0.9511	0.3249	**64°**	0.8988	0.4384	2.0503
19°	0.3256	0.9455	0.3443	**65°**	0.9063	0.4226	2.1445
20°	0.3420	0.9397	0.3640	**66°**	0.9135	0.4067	2.2460
21°	0.3584	0.9336	0.3839	**67°**	0.9205	0.3907	2.3559
22°	0.3746	0.9272	0.4040	**68°**	0.9272	0.3746	2.4751
23°	0.3907	0.9205	0.4245	**69°**	0.9336	0.3584	2.6051
24°	0.4067	0.9135	0.4452	**70°**	0.9397	0.3420	2.7475
25°	0.4226	0.9063	0.4663	**71°**	0.9455	0.3256	2.9042
26°	0.4384	0.8988	0.4877	**72°**	0.9511	0.3090	3.0777
27°	0.4540	0.8910	0.5095	**73°**	0.9563	0.2924	3.2709
28°	0.4695	0.8829	0.5317	**74°**	0.9613	0.2756	3.4874
29°	0.4848	0.8746	0.5543	**75°**	0.9659	0.2588	3.7321
30°	0.5000	0.8660	0.5774	**76°**	0.9703	0.2419	4.0108
31°	0.5150	0.8572	0.6009	**77°**	0.9744	0.2250	4.3315
32°	0.5299	0.8480	0.6249	**78°**	0.9781	0.2079	4.7046
33°	0.5446	0.8387	0.6494	**79°**	0.9816	0.1908	5.1446
34°	0.5592	0.8290	0.6745	**80°**	0.9848	0.1736	5.6713
35°	0.5736	0.8192	0.7002	**81°**	0.9877	0.1564	6.3138
36°	0.5878	0.8090	0.7265	**82°**	0.9903	0.1392	7.1154
37°	0.6018	0.7986	0.7536	**83°**	0.9925	0.1219	8.1443
38°	0.6157	0.7880	0.7813	**84°**	0.9945	0.1045	9.5144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	**85°**	0.9962	0.0872	11.4301
40°	0.6428	0.7660	0.8391	**86°**	0.9976	0.0698	14.3007
41°	0.6561	0.7547	0.8693	**87°**	0.9986	0.0523	19.0811
42°	0.6691	0.7431	0.9004	**88°**	0.9994	0.0349	28.6363
43°	0.6820	0.7314	0.9325	**89°**	0.9998	0.0175	57.2900
44°	0.6947	0.7193	0.9657	**90°**	1.0000	0.0000	....
45°	0.7071	0.7071	1.0000				

ಪುನರಾವರ್ತನೆ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಗೆರೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತಾರವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳಾಗಿ, ಸೈನ್, ಕೊಸೈನ್ ಮತ್ತು ಟೇನ್ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು. • ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೈನ್‌ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಕೋನಗಳ ಸೈನ್ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಗುರುತಿಸುವುದು. • ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇತರ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು. • ನೇರವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			

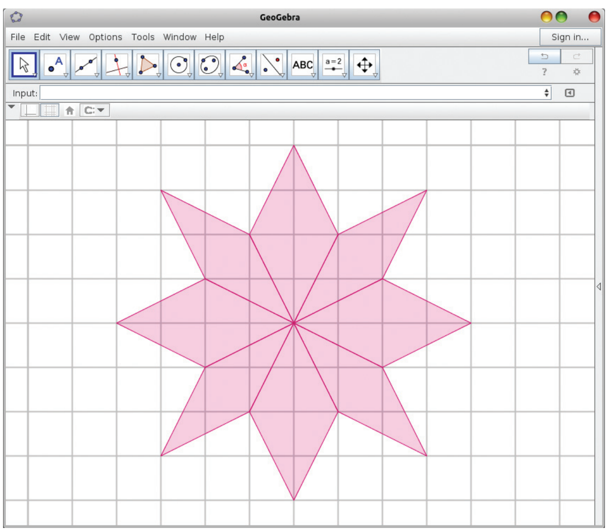
6 ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇದನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

ರಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ರಚಿಸಿದ ನಂತರ hide ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

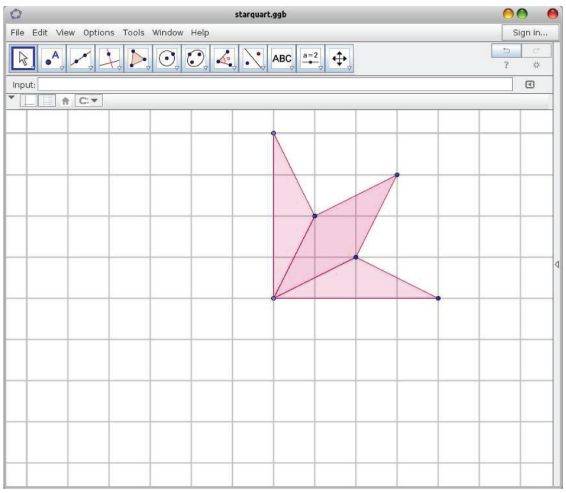


ಮೊದಲಿಗೆ ಚೌಕಾಕಾರದ ಕೋಟೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಆಕೃತಿಗಳ ಶಿರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಸಿಗಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Grid ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ನೀಟಕ್ಕೂ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ, ಬೇಕಾದ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಗುರುತಿಸದೆಯೇ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಂದು ಉಪಾಯವಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

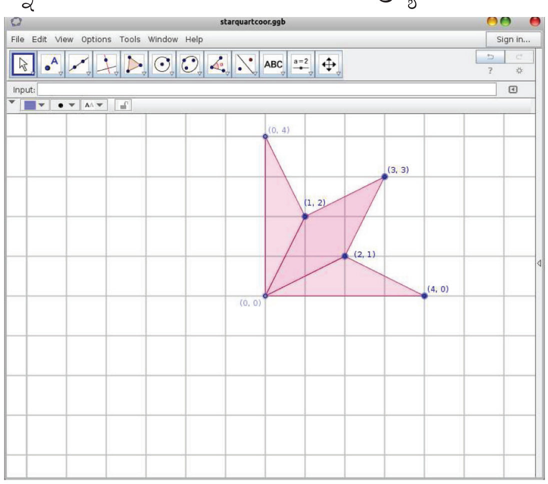


ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಎಡಕ್ಕೂ ಬಲಕ್ಕೂ, ಮೇಲಕ್ಕೂ ಕೆಳಕ್ಕೂ ಮಗುಚಿ ಇಟ್ಟಾಗ ಆರಂಭದ ನಕ್ಷತ್ರವಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಮಗುಚಿಯೂ ಇಡಲು GeoGebra ದಲ್ಲಿ Reflect ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಚೌಕಕೋಟೆಗಳ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲೂ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ವಿಧಾನವಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ.

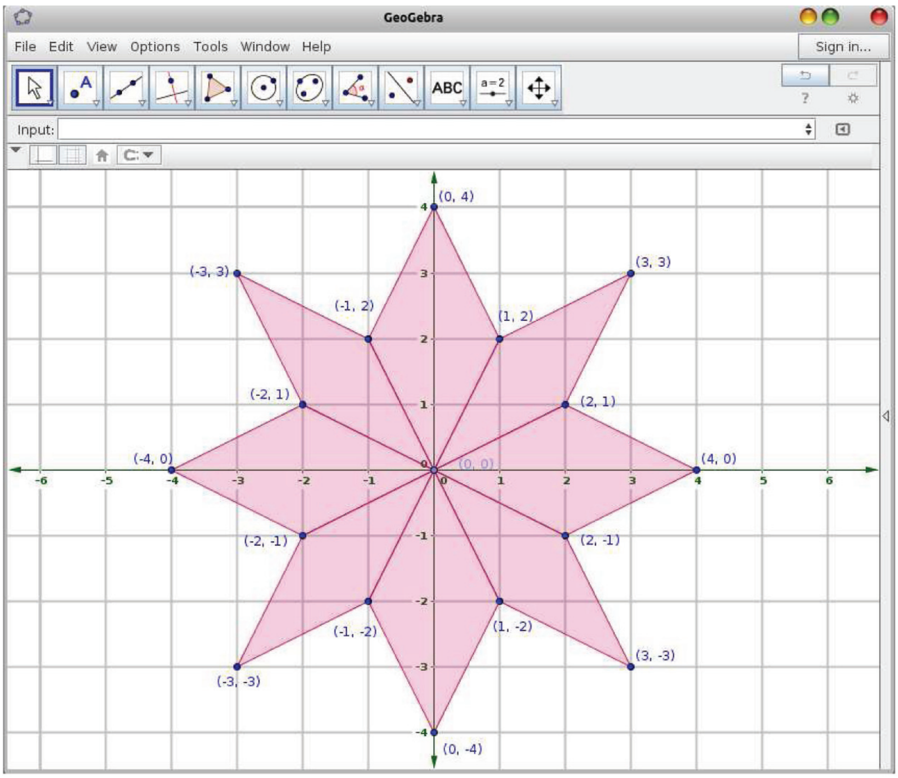


ಚಿತ್ರದ ಶಿರಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ? ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ (2, 1) ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ನಕ್ಷತ್ರದ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಎರಡು ಕೋಣೆ ಬಲಕ್ಕೂ, 1 ಕೋಣೆ ಮೇಲಕ್ಕೂ ಚಲಿಸಿದಾಗ ಈ ಶಿರ ಇರುವುದಾಗಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Point ನ್ನು ತೆಗೆದು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಸರಿಯಾದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು Input Barನಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಅತಿ ಸುಲಭದ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ.

ನಕ್ಷತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳಿಗೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ:



ಚಿತ್ರದ ಎಡ ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಋಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದಿರಾ?

ಮಧ್ಯದಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆಯುವುದು ಕ್ರಮ. ಇದು ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ತಿಳಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ).

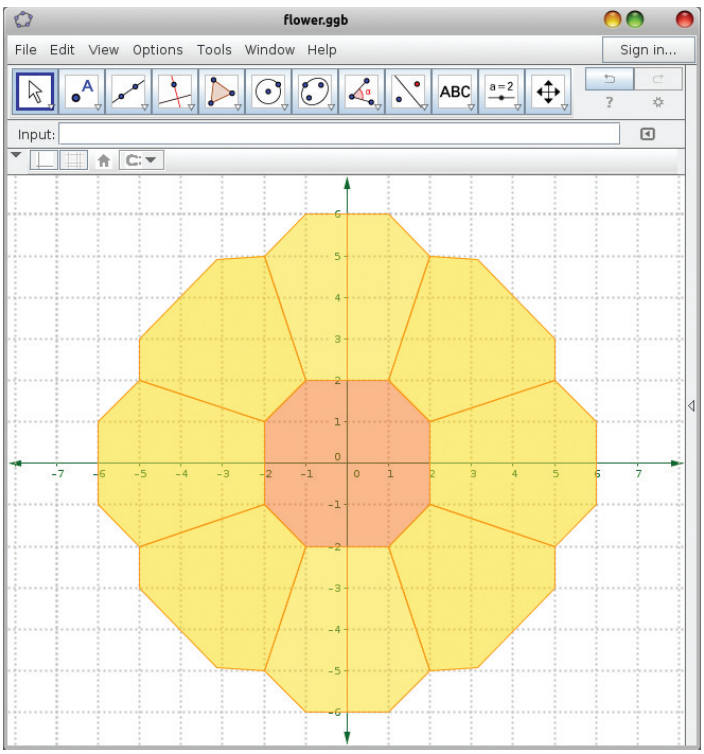
ಹೀಗೆಯೇ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಋಣವಾಗಿ ತೆಗೆದಿರುವುದು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ?

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಲಕ್ಕೊ ಎಡಕ್ಕೊ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು; ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೇಲಕ್ಕೂ ಕೆಳಕ್ಕೊ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು. ಎಡಭಾಗಕ್ಕೂ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೂ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ತೆಗೆಯಬೇಕು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲು ಚಿತ್ರದ ಮಧ್ಯದಿಂದ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ.....ನೀಟಕ್ಕೂ.....ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಲು Axes ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಈ ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಇನ್ನೊಂದು ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ.



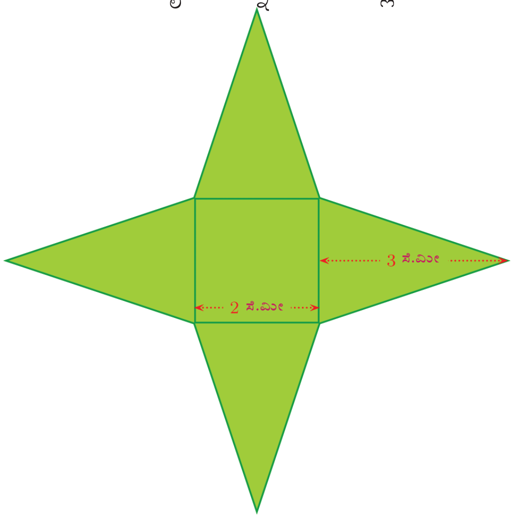
ಇದರ ಮೂಲೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ಮೊದಲಿನಂತೆ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದೇ? ನಂತರ ಅದನ್ನು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾಕಲು Input Bar ನಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು Polygon ಎಂದು ಕೊಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Input Bar ನಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚನೆ ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ.

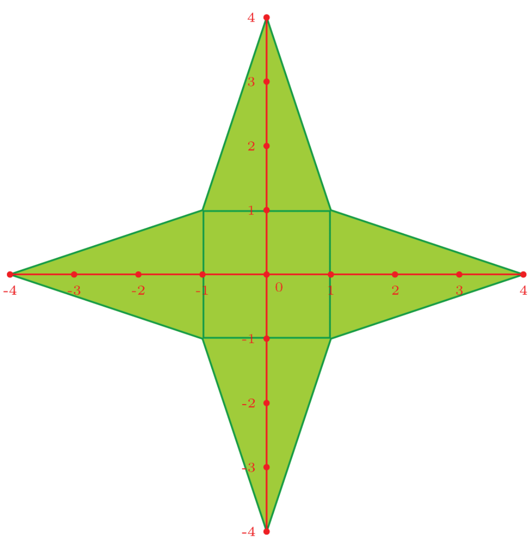
Polygon [(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)]

ಸ್ಥಾನಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಈ ರೀತಿಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬೇಕು.

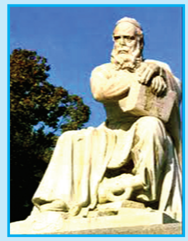


ಮೊದಲು ಶಿರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸಿದರೊ? ಅದಕ್ಕೆ ಕೋಟೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಚಿತ್ರದ ಮಧ್ಯಭಾಗದ ಮೂಲಕ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ನೀಟಕ್ಕೂ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆದು, ಎರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದೆವೆಂದು ಊಹಿಸಿರಿ.

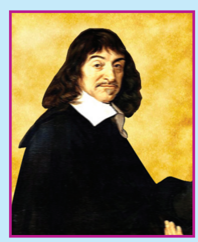


ಸ್ವಲ್ಪ ಚರಿತ್ರೆ

ಕ್ರಿ.ಪೂ ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೆ, ಅಪ್ಪೊಲೋನಿಯಸ್ ಎಂಬ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಇರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ.



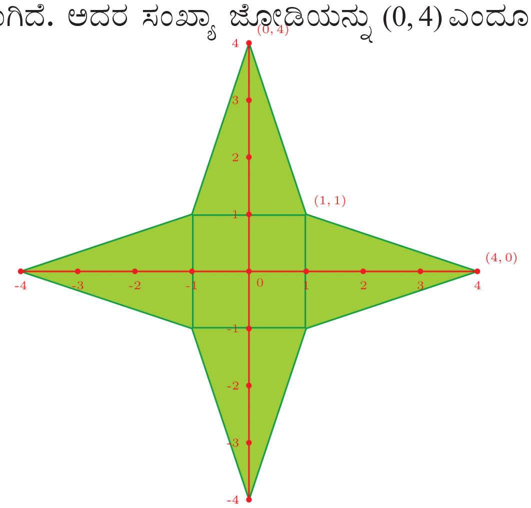
ನಂತರ ಕ್ರಿ.ಶ 11ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಪರ್ಶಿಯಾದ ಗಣಿತ ತಜ್ಞನೂ ಕವಿಯೂ ಆದ ಓಮರ್ ಖಯಾಂ, ಕೆಲವು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದನು. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತದೊಂದಿಗಿರುವ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಒಂದು ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯಾಗಿ ಬೆಳೆದಿರುವುದು 17ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಫ್ರಾನ್ಸಿನ ತತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ರಾನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೇ (Rene Descartes) “ಜ್ಯಾಮಿತಿ” ಎಂಬ ಪ್ರಬಂಧವನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ನಂತರವಾಗಿದೆ.



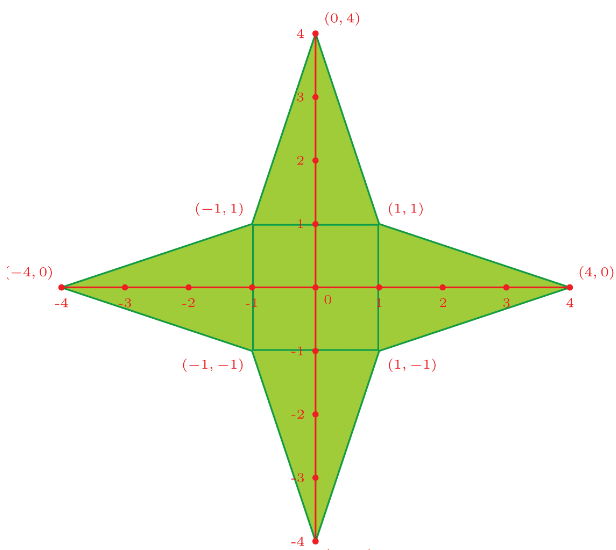
ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದೇ?

ಚೌಕಾಕಾರದ ಬಲಭಾಗದ ಮೇಲಿರುವ ಶಿರವು, ಮಧ್ಯದಿಂದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಬಲಕ್ಕೂ, ಅಲ್ಲಿಂದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮೇಲಕ್ಕೂ ಇರುವುದಾಗಿದೆ. ಆಗ ಅದರ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿ (1, 1).

ಇನ್ನು ಚಿತ್ರದ ಬಲಭಾಗದ ತುದಿಯೋ? ಮಧ್ಯದಿಂದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಬಲಕ್ಕಿದೆ, ಆದರೆ ಮೇಲಕ್ಕೊ ಕೆಳಕ್ಕೊ ಚಲಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆಗ ಅದರ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿ $(4, 0)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅತೀ ಮೇಲಿನ ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಿತಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಾಗಿದೆ; ಮಧ್ಯದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೊ ಎಡಕ್ಕೊ ಚಲಿಸದೆ ನೇರ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಇರುವುದಾಗಿದೆ. ಅದರ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಯನ್ನು $(0, 4)$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.



ಹೀಗೆ, ಇತರ ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಎಡಭಾಗಕ್ಕೂ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೂ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.



ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

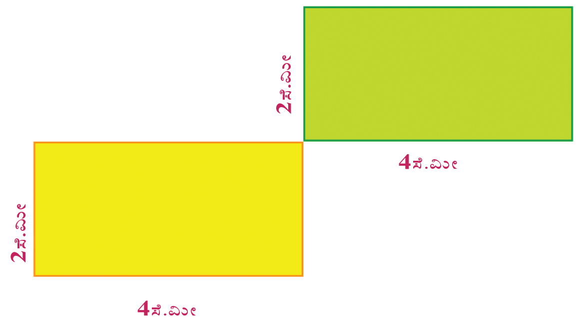
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಹೀಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಸೂಚಕ ಅಕ್ಷಗಳು (axes of co-ordinates) ಎಂದು ಹೆಸರು; ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯು x ಅಕ್ಷ (x axis) ನೀಟಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯು y ಅಕ್ಷ (y axis).

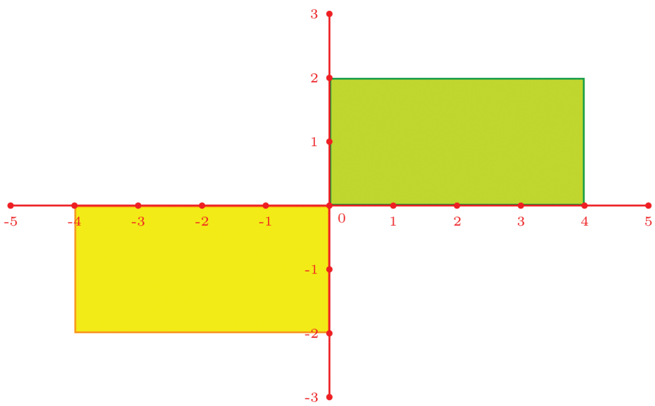
ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೆಳೆದಾದ ನಂತರ, ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (co-ordinates) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಒಂದು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಲು, ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಗೆಯೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. (ಆದರೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರಬೇಕು)

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ:

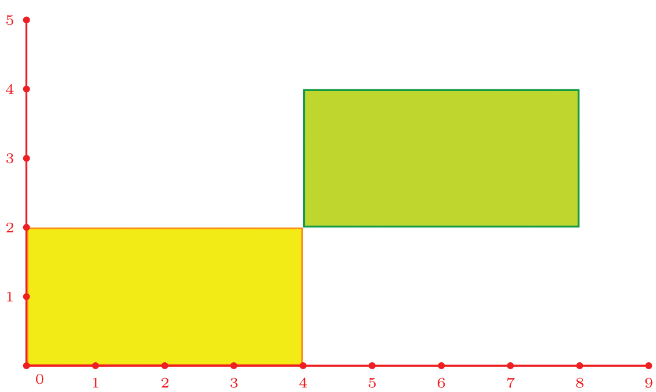


ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಎರಡು ಆಯತಗಳ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

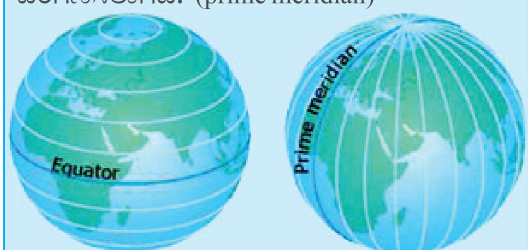
ಇನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎಳೆದರೋ?



ಭೂ ವಿಭಜನೆ

ಭೂಮಿ ಸ್ವತ: ತಿರುಗುತಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಯಾವುದೇ ಗೋಳ ತಿರುಗುತ್ತಿರುವಾಲೂ, ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಅಲುಗಾಡದೆ ಇರುವುದು. ಅವುಗಳೇ ಧ್ರುವಗಳು (poles). ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ತಿರುಗುವುದರ ಅಕ್ಷ (axis of rotation) ಆಗಿದೆ. ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರವು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವೇ ಆಗಿರುವವುಗಳು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಗಳು. ಎರಡು ಧ್ರುವಗಳಿಂದಲೂ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತವು ಭೂಮಧ್ಯರೇಖೆ (equator). ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ವೃತ್ತಗಳು ಅಕ್ಷಾಂಶ ರೇಖೆಗಳು (lines of latitude) ಆಗಿವೆ.

ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಗಳು ರೇಖಾಂಶ ರೇಖೆಗಳು (lines of longitude or meridians) ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ, ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಗ್ರೀನಿಚ್ ಎಂಬ ಸ್ಥಳದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದನ್ನು ಪ್ರಧಾನ ರೇಖಾಂಶ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. (prime meridian)

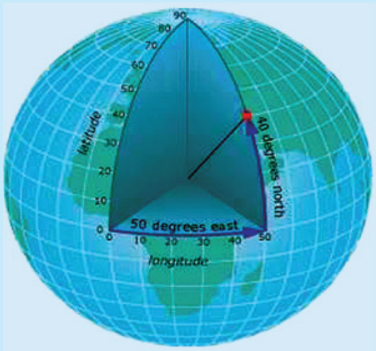


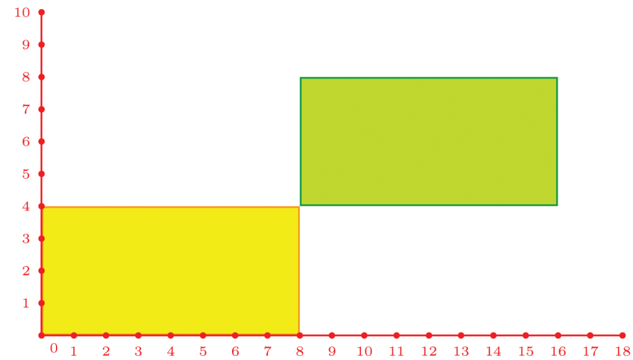
ಈ ಅಕ್ಷಗಳಿಗನುಸರಿಸಿ, ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೆಳೆದ ನಂತರ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಂತರವನ್ನಿಟ್ಟು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾಕಬೇಕು. ಅಂತರವು ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಅನುಕೂಲಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಯಾವುದೇ ಅಂತರವೂ ಆಗಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅರ್ಧಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಡೆಬಿಟ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಾಗಬಹುದು.

ಭೂಸ್ಥಾನಗಳು

ಭೂಮಧ್ಯ ರೇಖೆಯೂ ಗ್ರೀನಿಚ್ ರೇಖೆಯೂ ಸಂಗಮಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು, ಅದನ್ನು ಭೂಮಿಯ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನೂ ಊಹಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಅಕ್ಷಾಂಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ತಲುಪಲು ಉತ್ತರಕ್ಕೊ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕೊ ಚಲಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಭೂ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೂ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೂ ಒಂದು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಬೇಕು. ಇಂತಹ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಕ್ಷಾಂಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. (ಉತ್ತರ, ದಕ್ಷಿಣ ಎಂಬ ವಿಶೇಷಣಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.) ಇನ್ನು ನಮ್ಮ ಮೊದಲಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ರೇಖಾಂಶ ರೇಖೆಗೆ ಬದಲಾಗಬೇಕಾದರೋ? ಪೂರ್ವಕ್ಕೊ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೊ ಬದಲಾಗಬೇಕು; ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಗೆರೆಯೂ ಬಲಕ್ಕೊ ಎಡಕ್ಕೊ ಒಂದು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಬೇಕು. ಈ ಕೋನಗಳು ರೇಖಾಂಶ ರೇಖೆಗಳ ಸೂಚಕಗಳಾಗಿವೆ.

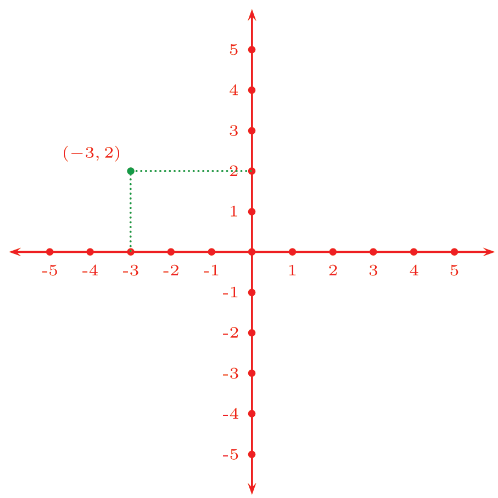




ಈಗ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

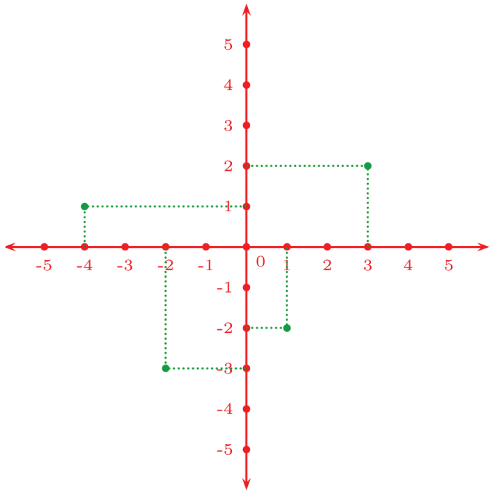
ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೆಳೆದು ಅಂತರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಆದರೆ, ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

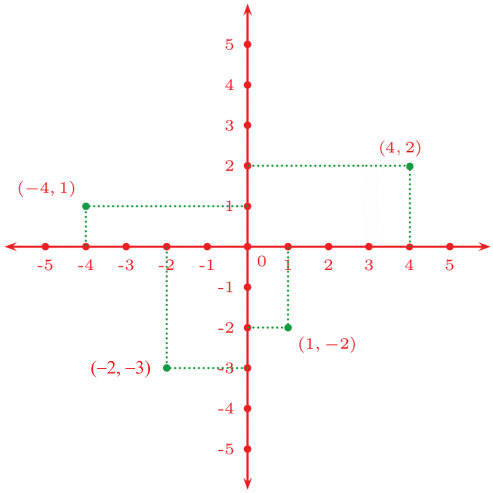
ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(-3, 2)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



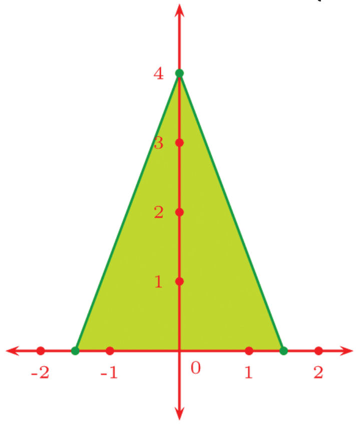
x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ -3 ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಸ್ಥಾನದಿಂದಲೂ, y ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ 2ನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಸ್ಥಾನದಿಂದಲೂ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವುದು $(-3,2)$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಬಿಂದುವಿನಿಂದ X ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ Y ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆದರೆ ಸಾಕು.



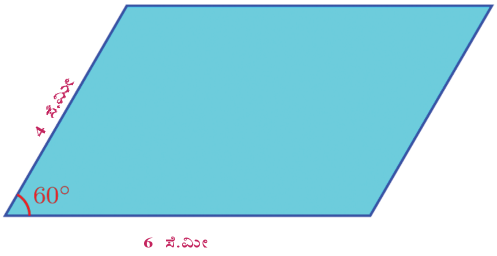


ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಬೇಕೆಂದಿದೆಯೇ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಇಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೂ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಬಹುದು.



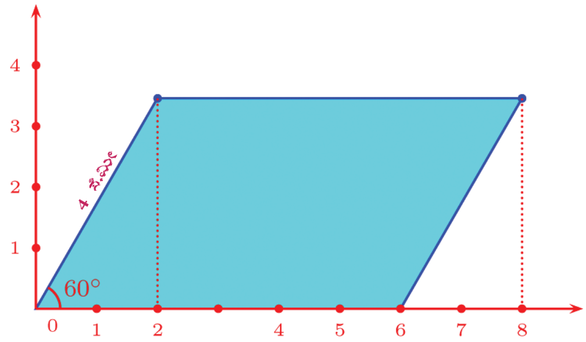
ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಇನ್ನು ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾದರೆ?



ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ a ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ (a, 0) ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರ್ ಚಲಿಸಿ a ಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಬಿಂದು ಸಂಚರಿಸುವ ದಾರಿ ಯಾವುದು? ಹೀಗೆ (a, 2), (a, −1), (0, a), (3, a), (−2, a) ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು a ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಸಂಚರಿಸುವ ದಾರಿಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಏನೆಂದು ನೋಡಿರಿ. ಬಿಂದುವಿಗೆ Trace On ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ.



ಕೋನಗಳು $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಎಡಭಾಗದ ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

ಬಲ ಭಾಗದ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ?

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು ಸಿಗಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Input Bar ನಲ್ಲಿ (2, 2sqrt (3)) ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು.

ಅಕ್ಷಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ XX' ಎಂದೂ (ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ) y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ (ಮೇಲಿನಿಂದ ಕೆಳಕ್ಕೆ) YY' ಎಂದೂ ಗುರುತಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು 'O' ಎಂದೂ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಆಧಾರ ಬಿಂದು (origin) ಎಂದೂ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ.

(1) ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) x ಅಕ್ಷದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

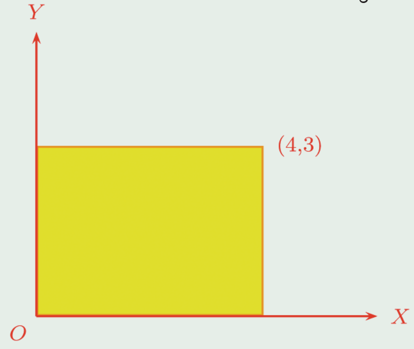
ii) y ಅಕ್ಷದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

iii) ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು

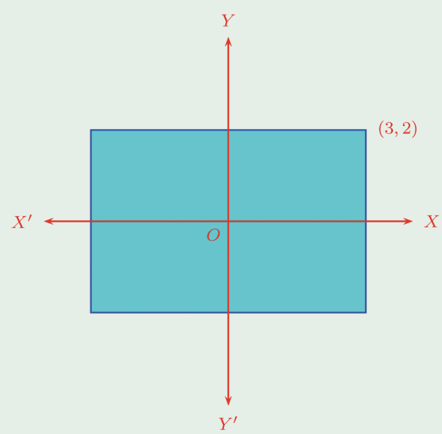
iv) (0, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

v) (1, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

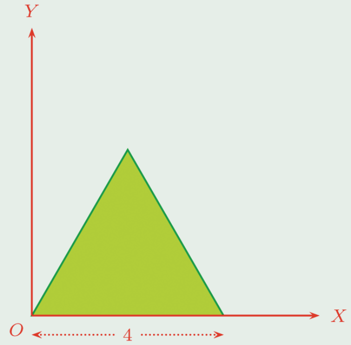
(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಆಯತದ ಉಳಿದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಆಧಾರಬಿಂದುವು ಆಯತದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

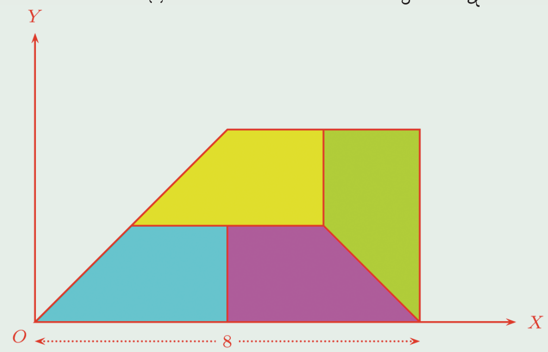


ಆಯತದ ಉಳಿದ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?



(4) ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(5) ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಲಂಬಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಾಗ ದೊಡ್ಡ ಸಮಲಂಬ ದೊರೆಯಿತು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Input Bar ನಲ್ಲಿ

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5]

ಎಂದು ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. a ಯಾಗಿ 0 ಯಿಂದ 5 ರವರೆಗಿರುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ (a, a + 1) ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಿರುವ ಸೂಚನೆಯು ಇದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) ,(5,6) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು.

ಸೂಚನೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದೊಂದು ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿ,

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5, 0.5]

ಎಂದು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ a ಆಗಿ ತೆಗೆಯುವುದು. ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ 0.5 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಕೊನೆಗೆ 0.5 ಎಂದು ಕೊಡುವುದರಿಂದ ಉದ್ದೇಶಿಸುವುದು. (1 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸುವುದಾದರೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಮಾಡಲೇನಿರುವುದಿಲ್ಲ). ಆಗ (0, 1), (0.5, 1.5), (1, 2), ..., ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (5, 6) ರ ವರೆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿರ್ದೇಶಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಬಿಂದುಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

Sequence [(a, 0), a, 0, 5, 0.5]

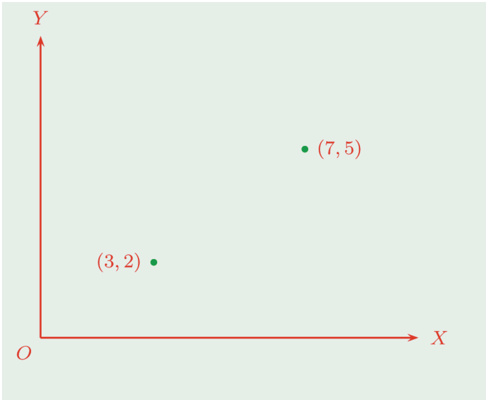
Sequence [(a, 2a), a, –3, 4, 0.25]

Sequence [(a, a^2), a, –3, 3, 0.2]

Sequence [(a, -a^2), a, –3, 3, 0.2]

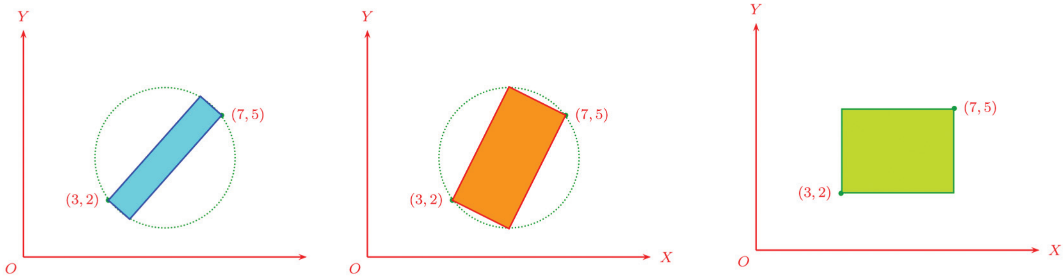
Sequence [(a^2, a), a, –4, 4, 0.1]

ಎಲ್ಲಾ ಸಮಲಂಬಗಳ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.



ಆಯತ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ.

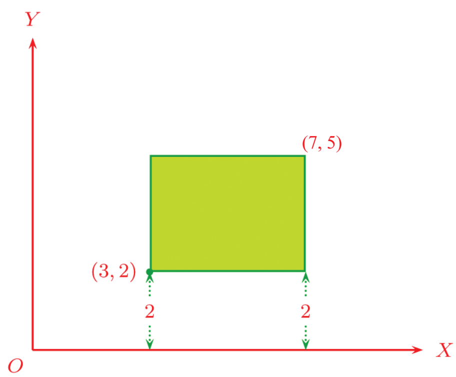


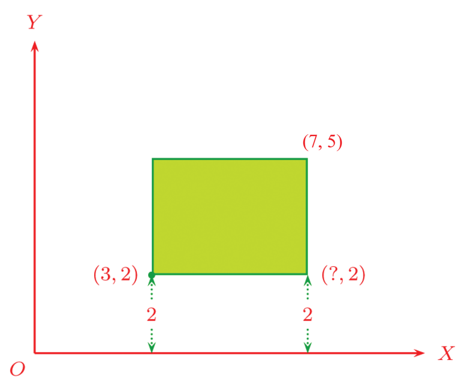
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಭುಜಗಳಿರುವುದು.

ಈ ಆಯತದ ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುವ. ಕೆಳಗಿನ ಎಡಶಿರದ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ x ಅಕ್ಷದಿಂದ ಅದಕ್ಕಿರುವ ಎತ್ತರವು 2 ಆಗಿದೆ.





ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ಶಿರವೂ ಇಷ್ಟೇ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ ಈ ಶಿರದ y ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 2 ಆಗಿದೆ.

ಇದರ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

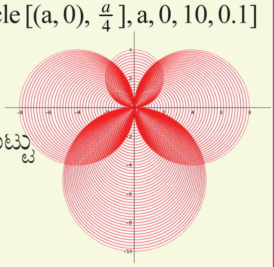
ವೃತ್ತ ಚಿತ್ರಗಳು

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Input Bar ನಲ್ಲಿ circle [(1, 3), 2] ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ (1, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ, ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಸಿಗುವುದು.

Sequence [circle [(a, 0), 1], a, 0, 5, 0.2]

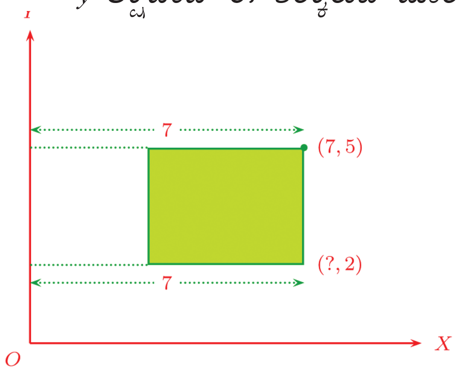
ಎಂಬ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0), ..., (5, 0) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ, ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಿಗುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಊಹಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ನಂತರ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ.

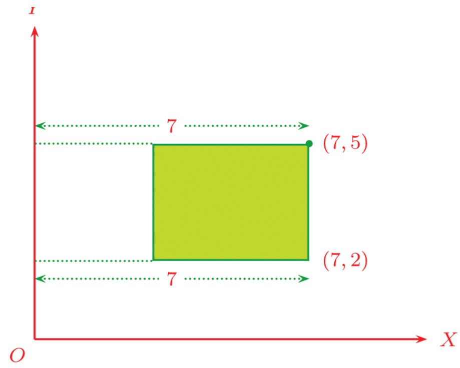
- Sequence [circle [(a, 0), a], a, 0, 10, 0.1]
- Sequence [circle [(a, 0), $\frac{a}{4}$], a, 0, 10, 0.1]



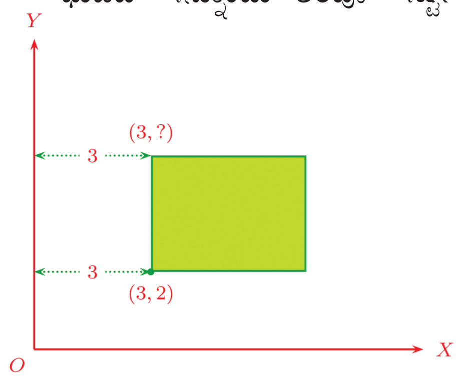
ಅಗತ್ಯವಾದ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

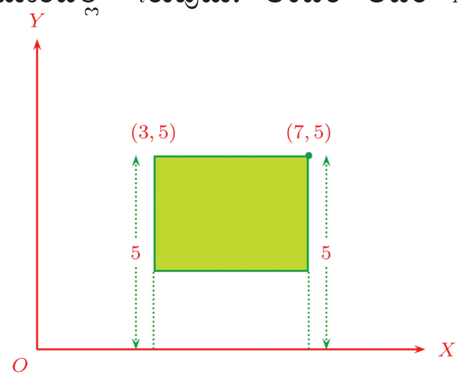
ಮೇಲೆ ಬಲಭಾಗದ ಶಿರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇದರ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 7 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, y ಅಕ್ಷದಿಂದ ಈ ಶಿರಕ್ಕಿರುವ ದೂರವು 7 ಆಗಿದೆ.





ಆಯತದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವು, y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಭುಜದ ಇನ್ನೊಂದು ಶಿರವೂ ಇಷ್ಟೇ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು. ಅಂದರೆ ಅದರ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ 7 ಆಗಿದೆ.



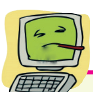


ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಎಡಭಾಗದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಯತದ ನಾಲ್ಕೂ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ನೋಡಿರಿ:

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ತತ್ವ ಯಾವುದು?

x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವಾಗ



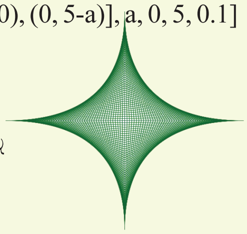
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ

Segment [(2, –1), (3, 5)]

ಎಂಬ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (2,–1), (3, 5) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಲಭಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂಚನೆಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿರಿ.

ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸೂಚನೆ ನೀಡಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

- Sequence [segment [(a, 0), (a, 3)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (a, a)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(0, 3), (a, 0)], a, –4, 4, 0.1]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, a)], a, –3, 3, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, 5-a)], a, 0, 5, 0.1]



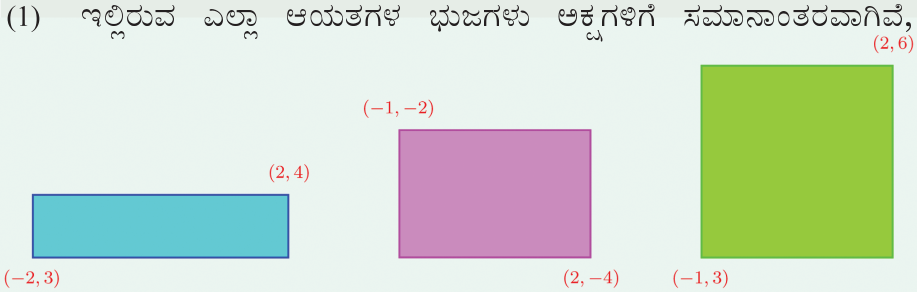
ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ;
y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವಾಗ
x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಇನ್ನೊಂದು

ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:
ಇದರ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

(1) ಇಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳ ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ,



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಯತದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

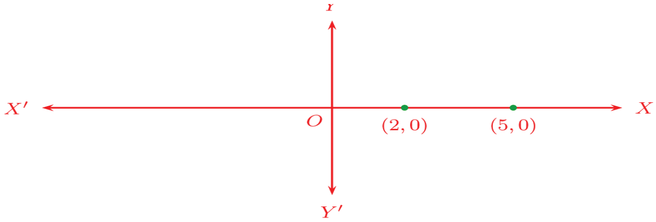
(2) ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೆಳೆಯದೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಎಡ-ಬಲ, ಮೇಲೆ-ಕೆಳಗೆ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತದ ಉಳಿದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) (3, 5), (7, 8) ii) (6, 2), (5, 4)

iii) (–3, 5), (–7, 1) iv) (–1, –2), (–5, –4)

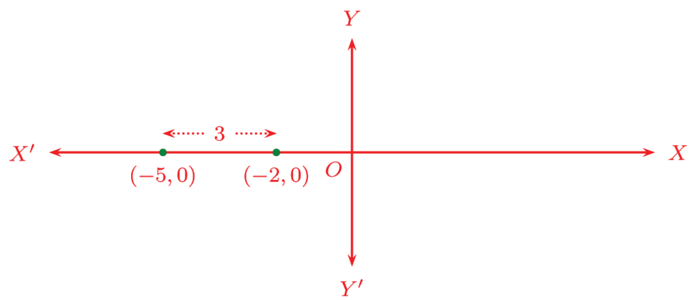
ದೂರಗಳು

ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅಂತರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಯಾವುದೇ ಉದ್ದವನ್ನು ಏಕಕವಾಗಿ ತೆಗೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಒಂದು ಅಕ್ಷದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ

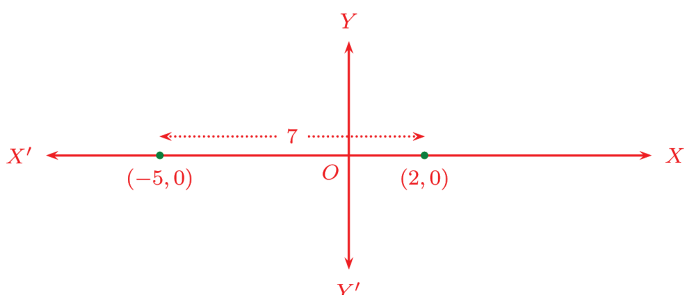


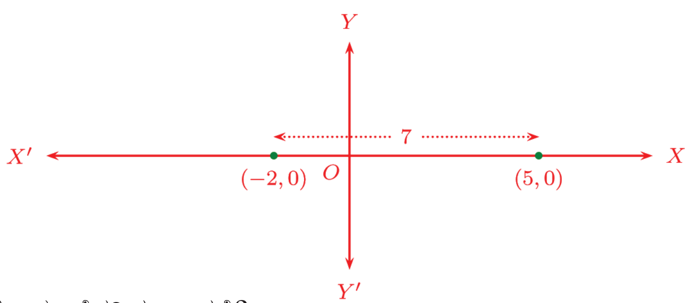
ದೂರವನ್ನು ಈ ಏಕಕದ ಮಡಿಯಾಗಿ ಮಾತ್ರವೇ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ x ಅಕ್ಷದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಈ ಏಕಕದ 2 ಮಡಿ; ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು ಏಕಕದ 5 ಮಡಿ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ, ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು 2 ಎಂದೂ: ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು 5 ಎಂದೂ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.



ಆಗ ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು $5 - 2 = 3$





ಬಿಂದುಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಾದರೆ?

ಬಿಂದುಗಳು ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಾದರೆ?

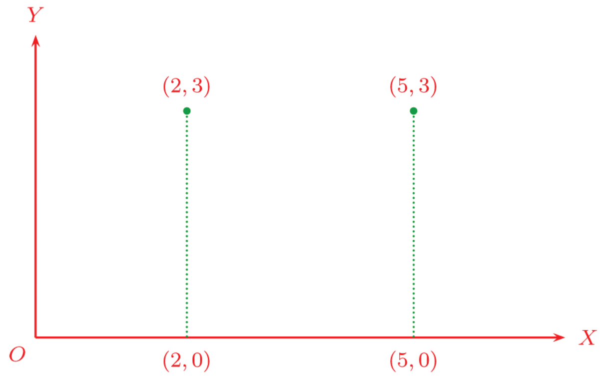
x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವುದನ್ನೂ ನೆನಪಿಸಿರಿ.

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x_1, 0), (x_2, 0)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರ $|x_1 - x_2|$.

ಇನ್ನು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು, ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ



ದೂರವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಯಾಕೆ?)

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ, x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವುದು; ಅಂತಹ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು, ಅವುಗಳ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಕುರಿತು ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೆ:

x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ, y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ರೇಖೆಯಲಿರುವುದು, ಅಂತಹ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು ಅವುಗಳ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

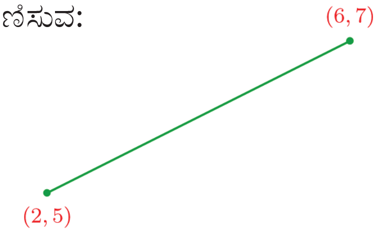
ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x_1, y), (x_2, y)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು $|x_1 - x_2|$

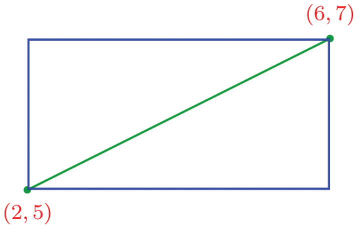
ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x, y_1), (x, y_2)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು $|y_1 - y_2|$

x ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

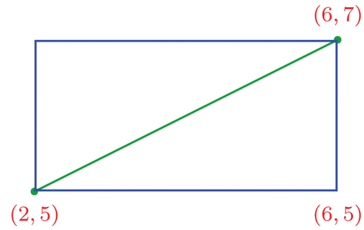
ಉದಾಹರಣೆಗೆ (2, 5), (6, 7) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ:



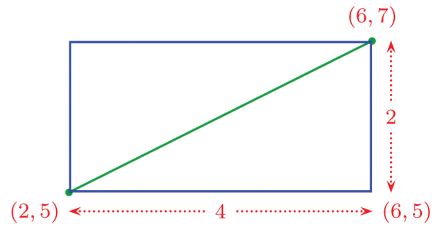
ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇವುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವ :



ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಈ ಆಯತದ ಕರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಕಂಡು ಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು, ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಆಯತದ ಕೆಳಭಾಗದ ಉಳಿದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ:



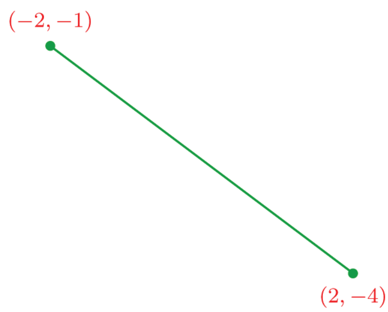
ಇದರಿಂದ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ: ಇನ್ನು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

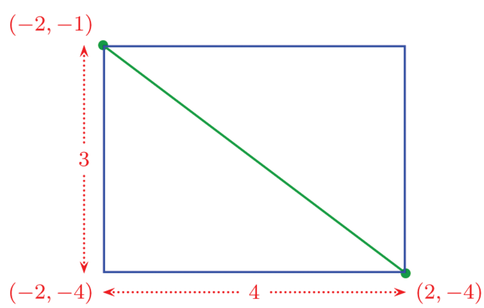


$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ಬಿಂದುಗಳು ಕೆಳಗಿನಂತಾದರೆ?

ಇದರಲ್ಲೂ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಉದ್ದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

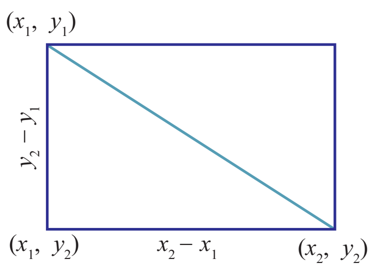


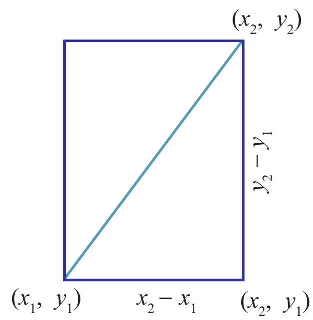


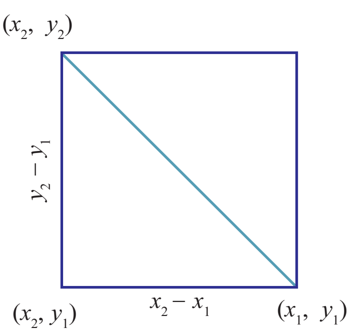
ಆಗ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

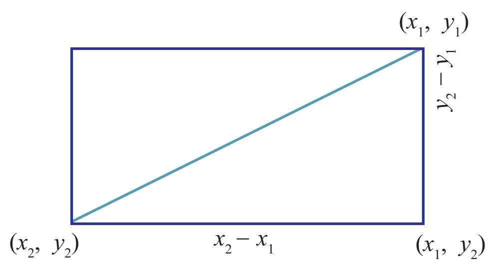
x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ, y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ಯಾವುದಾದರು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಇಂತಹ ಆಯತವೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ).

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇಂತಹ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂದು ತೆಗೆಯುವ. ಇವುಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆಯೂ ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸುವ. ಇದರ ಎರಡು ಶಿರಗಳು (x_1, y_2), (x_2, y_1) ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.









ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು $|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆಗ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮತ್ತು ಅದರ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯ ವರ್ಗವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಈ ದೂರವನ್ನು

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ $y_1 = y_2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು; $x_1 = x_2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಆಗ, ಯಾವುದಾದರೂ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ದೂರವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವು

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(4, -2), (-3, -1)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು

$$\sqrt{((4-(-3))^2 + ((-2-(-1))^2} = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(-2, 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಆಧಾರಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವೊ?

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (x, y) ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಆಧಾರಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರ

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

ಇನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(-1, 2), (3, 5), (9, -3)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವುದೆ?

ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು, ಉಳಿದೆರಡು ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಮೂರುಬಿಂದುಗಳನ್ನು A, B, C ಎಂದು ಹೆಸರಿಸುವ,

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2 + ((5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

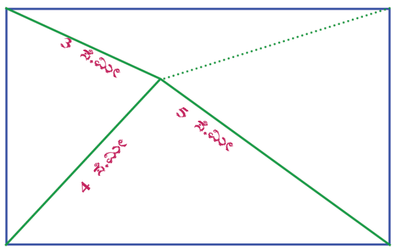
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2 + ((2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು AC (ಹೇಗೆ ಲಭಿಸಿತು?) ಇನ್ನು AB, BC ಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 15; ಇದು AC ಯ ಉದ್ದವಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ A, B, C ಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ.

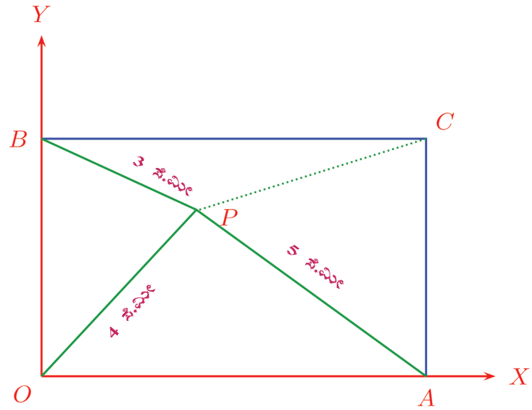
ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವಾ:

ಒಂದು ಆಯತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆಯತದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಶಿರಗಳಿರುವ ದೂರವು 3ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 4ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಎಷ್ಟು?

ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವ.



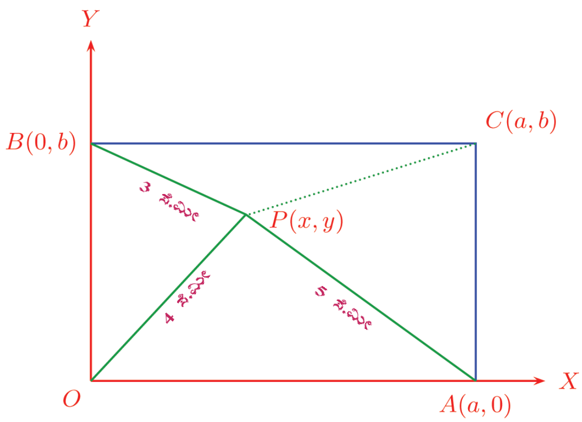
ಆಯತದ ಕೆಳಗಿನ ಎಡಭಾಗದ ಶಿರವನ್ನು ಆಧಾರಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ, ಅದರ ಮೂಲಕವಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, A ಎಂಬ ಬಿಂದು x ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 0 ಆಗಿದೆ; ಅದರ x ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು a ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, A ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(a, 0)$ ಆಗಿವೆ .

ಇದರಂತೆ B ಯು, y ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು bಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದರ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(0, b)$. ಆಗ C ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (a, b) ಆಗಬೇಕು.

P ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ:



ಇನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವ ಉದ್ದಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು PC ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ; ಅದರ ವರ್ಗವು

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಮೂರು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ಆ ಗುಂಪಿನ ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ

$$\left(x^2 + (y - b)^2\right) - (x^2 + y^2) = 9 - 16$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು; ಅಂದರೆ,

$$(y - b)^2 - y^2 = -7$$

ಮೂರನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

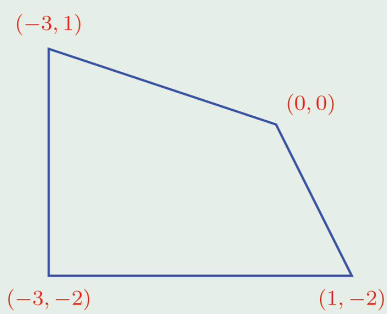
$$(x - a)^2 + y^2 + \left((y - b)^2 - y^2\right) = 25 - 7$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 18$$

ಆಗ PC ಯ ಉದ್ದವು $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) (2, 1), (3, 4), (− 3, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಆಧಾರಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

i) ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(6, 9), (5, 9), (6, 8)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಈ ವೃತ್ತದ ಒಳಗೋ, ಹೊರಗೋ, ವೃತ್ತದಲ್ಲೋ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.

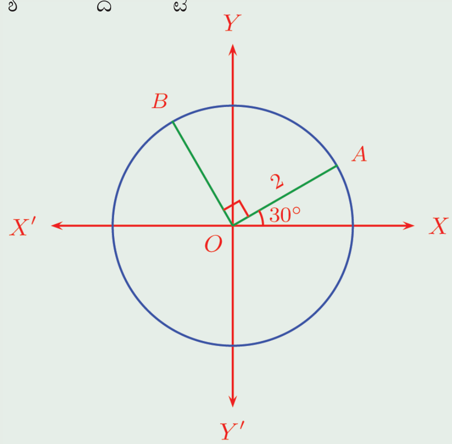
ii) ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ 8 ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(4) ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(1, 1)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ y ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳು $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಇದರ ಪರಿವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಆಧಾರಬಿಂದು ಹಾಗೂ A, B ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳೂ ಆಗಿವೆ.

AB ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?



ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುರುತಿಸುವ ರೀತಿ ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಹಲವು ತರದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.			
• x, y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನೆಳೆದು ಹಲವು ರೀತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			
• ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ನಮೂನೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು.			
• ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳು ನಿರ್ಣಯಿಸುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳ ವಿವಿಧ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ