வகுப்பு X

கணிதம்

பகுதி - 2

Part - 2

MATHS X
TAMIL MEDIUM

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT), கேரளம்
2016

KT 585-1/Maths-10(T) Vol-2

தேசியகீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா,
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா,
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா,
உச்சல ஜலதி தரங்கா,
தவ சுப நாமே ஜாகே,
தவ சுப ஆசிஸ மாகே,
காகே தவ ஜய காதா
ஜனகண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா.
ஜய ஹே, ஜயஹே, ஜயஹே
ஜய ஜய ஜய ஜயஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு . இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர்.எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம்வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்து கொள்வேன். என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். நான் எனது நாட்டினுடையவும், நாட்டு மக்களுடையவும் வளத்திற்காகவும், இன்பத்திற்காகவும் முயற்சி செய்வேன்.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

அன்பு மாணவர்களே,

எண்ணிக்கைகளின், அளவுகளின் கணக்கீடுகளில் இருந்தே கணிதத்தின் தொடக்கம் குறிக்கப்பட்டது. இது வேளாண் யுகத்தில் பரப்பளவுகளின் இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆயிற்று. காலநிலையைக் கணக்கிடும்போது வானவியலாக உயர்ந்து முக்கோணவியல் எனற கணிதக் கிளையாக வளர்ந்தது. மறுமலர்ச்சிக் கால ஐரோப்பாவில், முக்கோணவியல், கடற்பயணங்களின் அடிப்படையாக அமைந்தது. இன்றைய உலகில் கோள்கள் வழியாக உள்ள இட உறுதிப்பாட்டின் அடித்தளம் ஆயிற்று. பதினேழாவது நூற்றாண்டின் கணிதவியலாளர்கள் சார்பு எண்களின் செயல்பாடுகளாக விரித்துரைத்த கோட்பாடுகள், இ–வாணிபத்தின் பாதுகாப்புச் செயல்பாடுகளை நடைமுறைப்படுத்துவதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கணிதத்தின் எல்லையற்ற பயன்பாடுகளைப் பகுத்தறிவுடன் அதன் கோட்பாடுகளில் இலயித்து ஆனந்தம் பெறவும் அனைவருக்கும் இயலட்டும் என வாழ்த்துகிறேன்.

அன்பான வாழ்த்துக்களுடன்,

முனைவர். பி.ஏ. பாத்திமா
இயக்குநர்,
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி

Text Book Development Commite

Participants in Workshop

T.V. Prakasan
GHSS, Vazhakkadu
Malappuram.

Unnikrishnan. M.V.
GHSS, Kumbala
Kasaragod.

Vijayakumar. T.K.
GHSS, Cherkula
Kasaragod.

Ramanujam. R
MNKMGHSS, Pulapatta
Palakkad.

Anilkumar.M.K.
SKNJHSS, Kalpatta
Vyanad

Ubaidhulla.K.C
SOHSS, Areacode.
Malappuram.

Ramesan. N.K.
RGMHSS, Mokeri. Kannur.

Jabir.K
GVHSS, Mogran, Kasaragod.

SreeKumar. T
Govt GHSS, Karamana
Thiruvananthapuram.

K.J. Prakash
GMGHSS, Pattom
Thiruvananthapuram.

C.P.A.Karim
SOHSS Arikkode
Malapuram

Muhammadali. P.P
GMHSS, Collicut Univercity
Campus
Malappuram

P.P.Prabaharan
Rtd. Teacher
Prasanth, Panur,Kozhikodu

Cover

Rajivan. N.T
GHSS, Thariode, Vyanad.

Experts

Dr. E. Krishnan
Rtd Prof. University College
Thiruvananthapuram.

Venugopalan. C
Asst. Prof., Govt College of Teacher
Education, Thiruvananthapuram.

Dr. Rameshkumar
Asst. Prof, Kerala, Univercity
Thiruvananthapuram.

Dr. Sarachandran
Rtd Dy.Directer of Collegeate
Education Kottayam

Accordamic co-ordinator

Sujithkumar. G
Research Officer, SCERT.

TAMIL VERSION

Dr. Kanchana
Former Prof. & Head,
Dept. of Tamil,
University of Kerala.

T.Kumaradhas
Headmaster (Retd.),
GHS Kozhippara,
Palakkad.

Domanatha Sarath Kame
HSA, GHSS, Anakkara,
Idukki

M.J. David
Headmaster (Retd.),
GHS Meenakshipuram,
Palakkad.

S.C. Edwin Daniel
Headmaster (Retd.),
GHS Pambanar,
Idukki.

K. Krishnakumar
HSA GHSS, Kumily, Idukki

Accordamic co-ordinator

Dr. D. Sahayadhas
Research Officer, SCERT.

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidhyabhavan, Poojapura. Thiruvananthapuram - 695 012

உள்ளடக்கம்

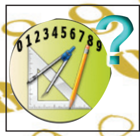
இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில

ஐ.சி.டி. வாய்ப்பு

கணக்கைச் செய்து பார்க்கலாம்

ஆராய்வோம்

மீள்பார்வை

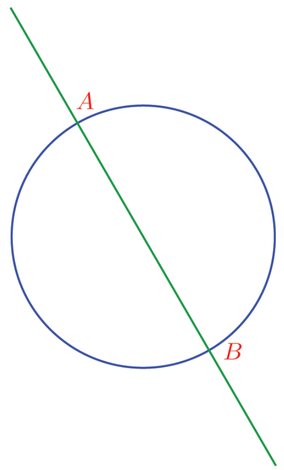


கலந்துரையாடலாம்

7 தொடுகோடுகள்

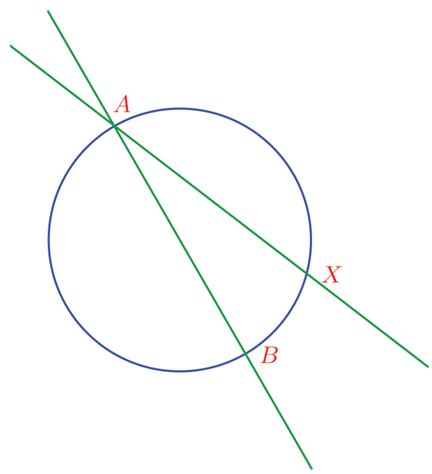
கோடும் வட்டமும்

படத்தைப் பார்க்கவும்:

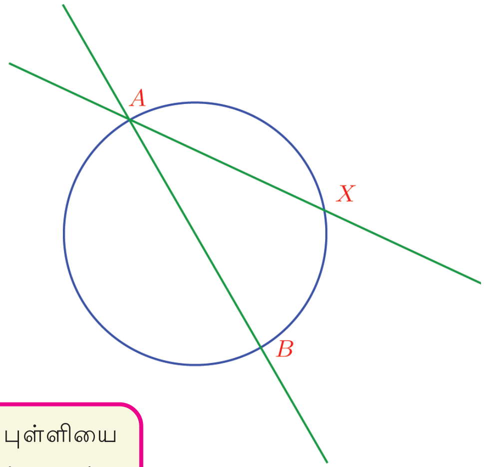


வட்டத்தில் A என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் விட்டம் AB; இது இரு பக்கங்களிலும் மேலும் சிறிதளவு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

விட்டத்திற்குப் பதிலாக A இன் வழியே வேறொரு நாண் வரைந்து, இது போன்று நீட்டியதே இந்தப் படம்.

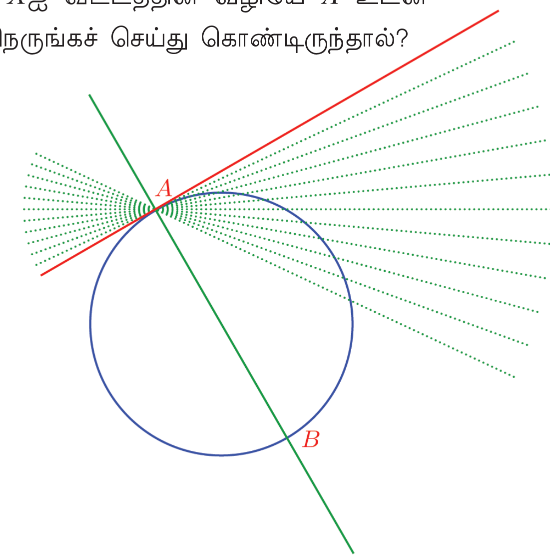


A இன் இடத்தை மாற்றாமல், X ஐ மேலும் A உடன் நெருங்கச் செய்தால்?



ஜியோஜிப்ராவில் O என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் A, X என்ற இரு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். O, A என்ற புள்ளிகளையும் A, X என்ற புள்ளிகளையும் இணைத்துக் கோடுகள் வரையவும். X இன் இடம் A ஐ நோக்கி நகரும் போது AX என்ற கோட்டிற்கு என்ன நிகழ்கிறது? X என்ற புள்ளி A இல் வந்து சேரும் போது? O, X என்பனவற்றை இணைக்கவும். X இன் இடம் A ஐ நோக்கி நகரும் போது OAX, AOX என்ற கோணங்களுக்கு என்ன மாற்றம் நிகழ்கிறது எனப் பார்க்கவும்.

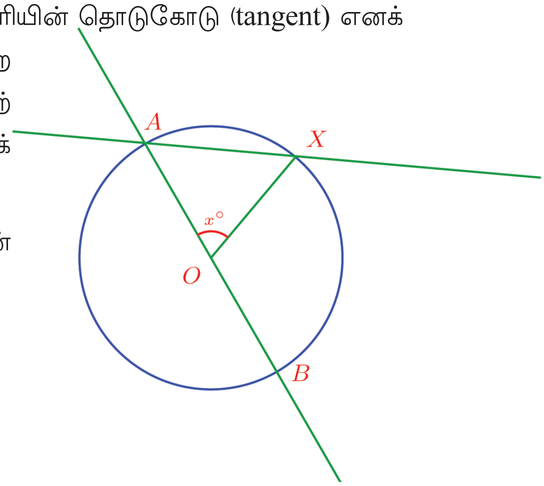
இவ்வாறு Xஐ வட்டத்தின் வழியே A உடன் கூடுதல் நெருங்கச் செய்து கொண்டிருந்தால்?



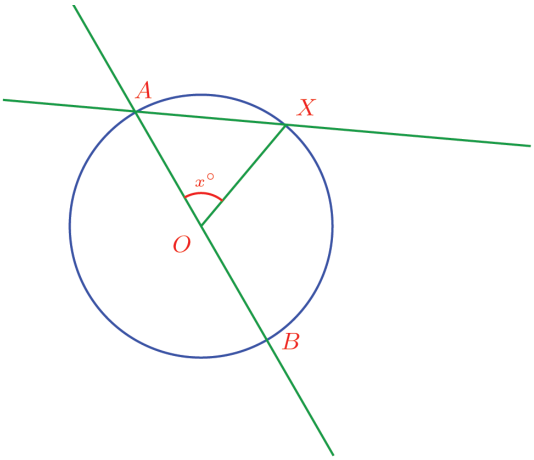
படத்தில் சிவப்புக்கோடு, வட்டத்தை A இல் மட்டுமே தொடுகிறது அல்லவா?

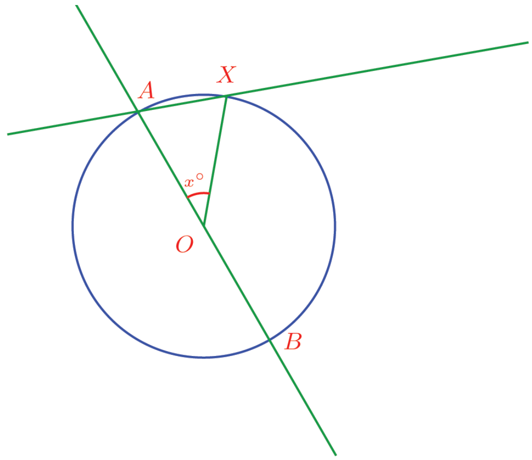
இந்தக் கோட்டை வட்டத்தின் A என்ற புள்ளியின் தொடுகோடு (tangent) எனக் கூறுகிறோம். படத்தை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும். விட்டத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடையில் ஏதேனும் தொடர்பைப் பார்க்கிறீர்களா?

இதைத் தெளிவுபடுத்த, AX என்ற நாணின் மையக்கோணம் $x°$ என எடுப்போம்.



X என்ற புள்ளி A உடன் நெருங்கும் தோறும் AX என்ற நாணின் நீளமும் அதன் மையக்கோணமும் சிறியது ஆகின்றன. அதாவது x என்ற எண் பூஜ்யத்துடன் நெருங்குகிறது.

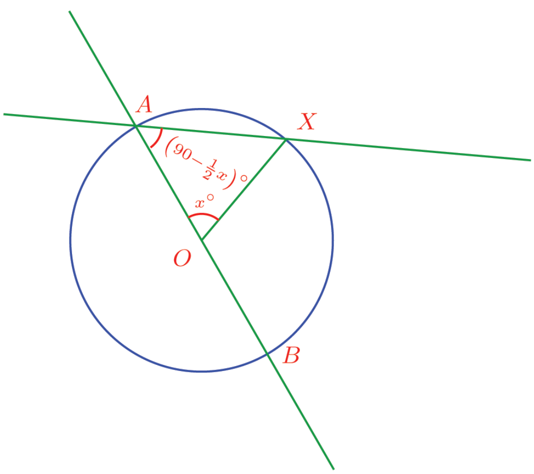




நாணிற்கும் விட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணமோ? AOX இருசமபக்க முக்கோணம் எனில் இந்தக் கோணம்

$$\frac{1}{2}(180 - x)^\circ = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^\circ$$

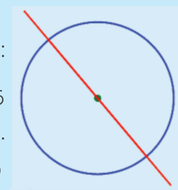
ஆகும்.



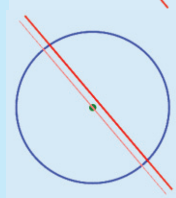
X என்ற புள்ளி, A என்ற புள்ளியை நோக்கி நெருங்கும் தோறும், இந்தக் கோணம் 90° உடன் நெருங்கி வரும் தொடுகோடாகும் போது சரியாக 90° ஆகவும் செய்யும்.

நகரும் கோடுகள்

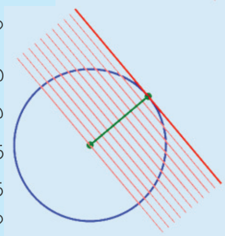
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ஒரு வட்டமும், வட்ட மையத்தின் வழியே ஒரு கோடும். கோட்டைச் சிறிது மேல் நோக்கி, நகரச் செய்தால்?

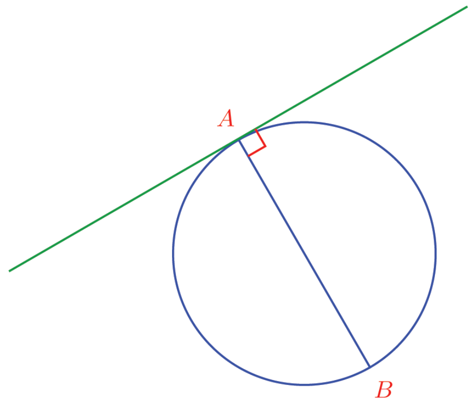


கோட்டை மீண்டும் மீண்டும் நகரச் செய்து கொண்டிருந்தால் வட்டத்தின் ஒரே ஒரு புள்ளி வழியே கடந்து செல்லும் கோட்டில் சென்று சேராதா?



மையத்தையும், இறுதியில் கிடைத்துள்ள புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, இந்த இணை கோடுகள் அனைத்திற்கும் செங்குத்து அல்லவா?

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டமும் அதன் ஓர் ஆரமும் வரையவும். ஆரத்தில் ஒரு புள்ளி எடுத்து அதன்வழியே ஆரத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையவும். புள்ளியின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். இந்தப் புள்ளி வட்டத்தில் வந்து சேரும் போது கோட்டிற்கு என்ன நிகழ்கிறது?



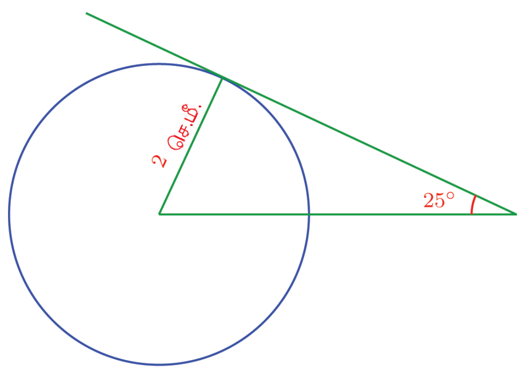
இதை ஒரு பொதுக் கோட்பாடாகக் கூறலாம்.

வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி வழியாக உள்ள தொடுகோடு அந்தப் புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைவதற்கு ஜியோஜிப்ராவில் Tangents எடுத்து வட்டத்திலும் தொடுகோடு கடந்து செல்ல வேண்டிய புள்ளியிலும் கிளிக் செய்தால் போதும். புள்ளி வட்டத்தில் எனில் ஒரு தொடுகோடு கிடைக்கும் அல்லவா. வட்டத்திற்கு வெளியே எனில்?

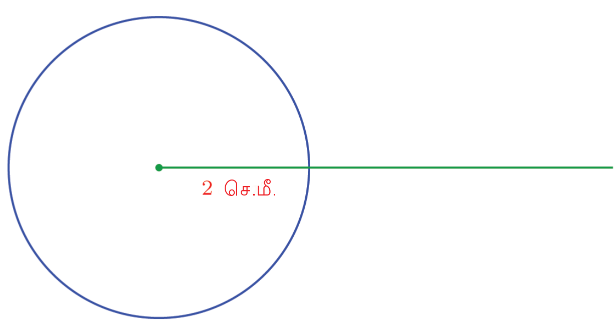
வட்டத்திற்கு அதன் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்து அதன் Trace On கொடுக்கவும். தொடுகோடு வரைந்த புள்ளிக்கு Animation கொடுத்துப் பார்க்கவும்.

இதைப் பயன்படுத்தியுள்ள சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம். கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் மேலே உள்ள கோடு, வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆகும்.



இந்தப் படத்தை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையலாம்.

முதலில் 2 சென்டிமீட்டர் ஆரத்தில் வட்டம் வரையவும். மையத்தின் வழியே ஒரு கிடைமட்ட கோட்டையும் வரைவோம்.

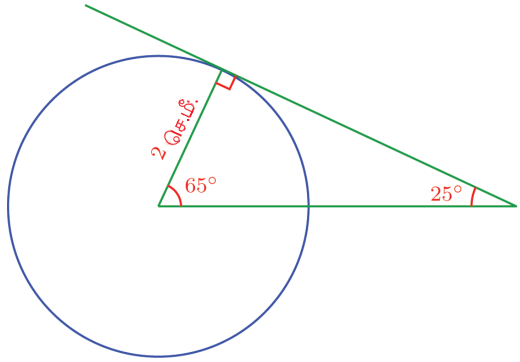


இனி வட்டத்தில் எந்தப்புள்ளி வழியாகத் தொடுகோடு வரைய வேண்டும்? அது முதலில் வரைந்த கோட்டை 25° சாய்வில் சந்திக்க வேண்டும் அல்லவா.

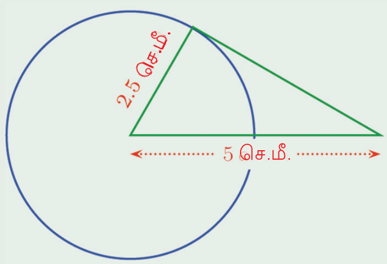
முதல் படத்தை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும். அந்த முக்கோணத்தின் மேல் கோணம் செங்கோணம் ஆகும். வேறொரு கோணம் 25°.

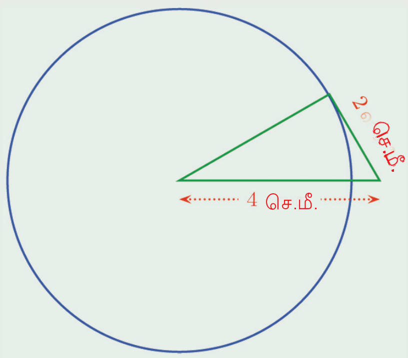
அப்போது மூன்றாவது கோணம் 65°.

இனி படத்தை முழுமைப்படுத்தலாம் அல்லவா?



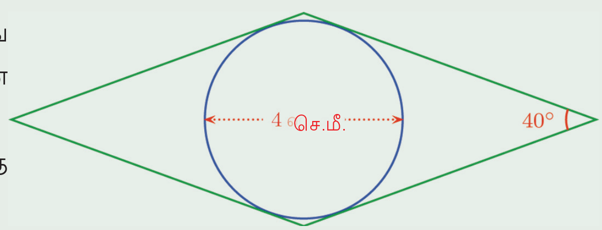
(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள இரு படங்களிலும் வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடும், தொடுகின்ற புள்ளியை நோக்கியுள்ள ஆரமும், மையத்திலிருந்துள்ள வேறொரு கோடும் சேர்த்து முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.





இந்தப் படங்களை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும்.

(2) படத்தில் சாய்வு சதுரத்தின் பக்கங்கள் அனைத்தும் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் ஆகும். இந்தப் படத்தை நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரையவும்.

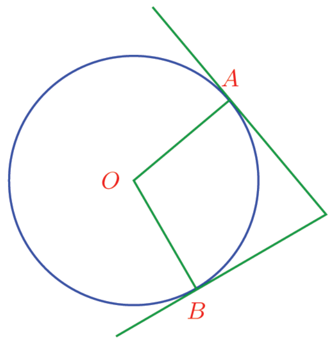


(3) ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு விட்டங்களின் முனைகளில் வரைந்துள்ள தொடுகோடுகள் சேர்ந்து உருவாக்குவது எத்தகைய நாற்கரம் ஆகும்?

(4) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் இரு முனைகளில் வரையும் தொடுகோடுகள் இணைகோடுகள் என நிறுவுக.

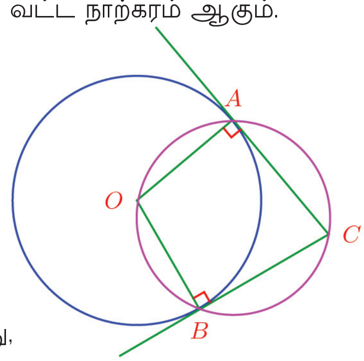
தொடுகோடுகளும் கோணங்களும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



O மையமான வட்டத்தின் A, B என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தொடுகோடுகள், C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

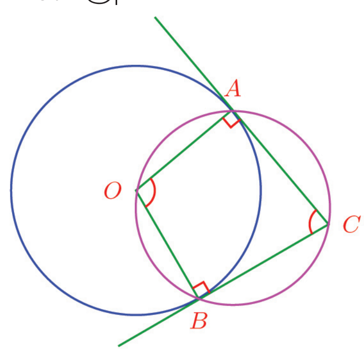
$OACB$ என்ற நாற்கரத்தில் A, B என்ற எதிர்உச்சிகளின் கோணங்கள் செங்கோணங்கள் ஆகும். அதனால், அவற்றின் தொகை 180°. அப்போது இந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் ஆகும்.



அதாவது,

ஒரு வட்டத்தின் மையமும், அதன் இரு புள்ளிகளும், இந்தப்புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியும் உச்சிகள் ஆன நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் ஆகும்.

இத்தகைய நாற்கரத்தின் மற்ற இரு கோணங்களின் தொகையும் 180° அல்லவா.

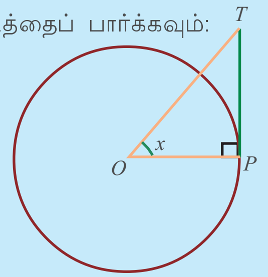


பெயர் விபரம்

தொடவும் எனப்பொருள்தரும் tangere என்ற இலத்தீன் சொல்லில் இருந்து தொடுகோட்டிற்கு ஆங்கிலத்தில் tangent என்ற பெயர் வந்தது.

முக்கோணவியலில் tan என்ற அளவின் முழுப்பெயர் tangent என்பது அல்லவா. இதற்குத் தொடுகோடுடன் என்ன தொடர்பு உள்ளது?

இந்தப்படத்தைப் பார்க்கவும்:

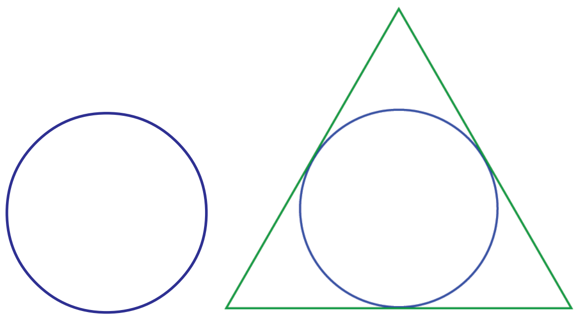


வட்டத்தின் ஆரம் 1 என எடுத்தால், PT என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் $\tan x$ அல்லவா?

இதையும் ஒரு பொதுக்கோட்பாடாகக் கூறலாம்.

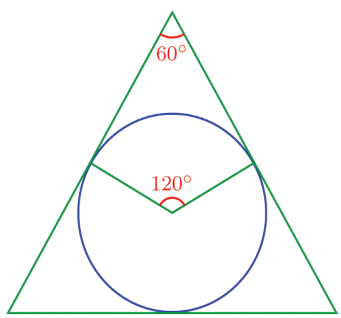
ஒரு வட்டத்தின் இரு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் ஆரங்கள் சேர்ந்துள்ள கோணமும், இந்தப் புள்ளிகளின் தொடுகோடுகள் இணையும் கோணமும் மிகைநிரப்பிகள் ஆகும்.

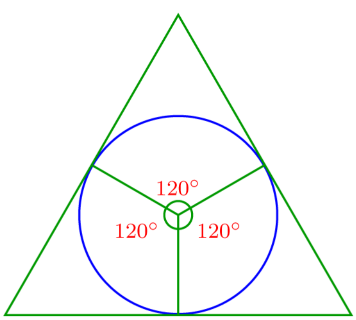
இதைப் பயன்படுத்தி வரையக்கூடிய சில படங்களைப் பார்ப்போம். ஒரு வட்டத்தைச் சரியாக மூடிக்கொள்கின்ற சமப்பக்க முக்கோணம் வரைய வேண்டும்.



முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் அல்லவா. சமப்பக்க முக்கோணம் ஆனதால் இவை சேரும் கோணம் 60°.

இவை வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்கள் இணையும் கோணமோ?

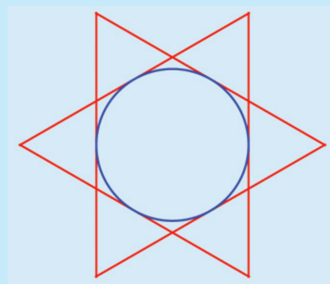




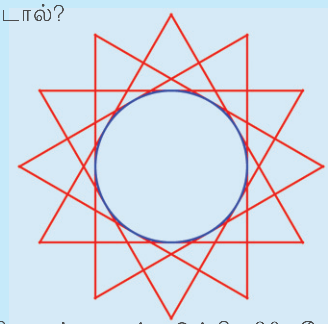
இதைப் போன்று முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளிகளின் வழியாக உள்ள ஆரங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணங்கள் எல்லாம் 120° ஆகும் எனக் காணலாம்.

கோடுகளால் ஒரு வட்டம்

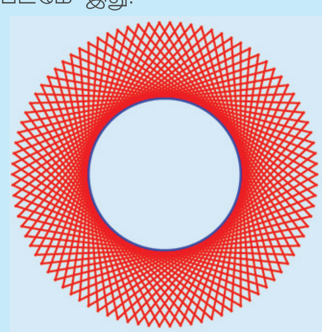
படத்தில் ஒரு வட்டத்தின் ஆறு புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் வரைந்து, ஒரு நட்சத்திரம் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.



கோடுகளின் எண்ணிக்கையை 12 எனக் கொண்டால்?

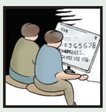


கணினியைப் பயன்படுத்தி, 90 கோடுகள் வரைந்த படமே இது:



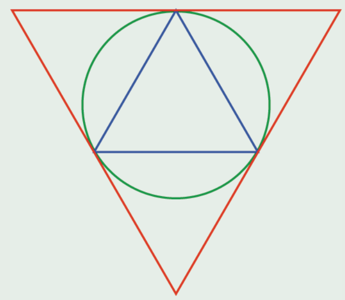
அப்போது, வட்டமையத்திலிருந்து 120° இடைவிட்டு மூன்று ஆரங்கள் வரைந்து, அவற்றின் முனைகள் வழியாகத் தொடுகோடுகள் வரைந்தால் நமக்குத் தேவையான முக்கோணம் கிடைக்கும்.

3 சென்டிமீட்டர் ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரைந்து, இத்தகைய ஒரு சமப்பக்க முக்கோணம் வரைந்து பார்க்கவும்.



(1) ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு வட்டம் வரையவும். பக்கங்கள் அனைத்தும் இந்த வட்டத்தைத் தொடுமாறும் கோணங்கள் 40°, 60°, 80° உம் ஆன முக்கோணம் வரையவும்.

(2) தரப்பட்டுள்ள படத்தில் சிறிய (நீலநிற) முக்கோணம் சமப்பக்கமுக்கோணம் ஆகும். அதன் உச்சிகளின் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு கள் பெரிய (சிவப்புநிற) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஆகும்.

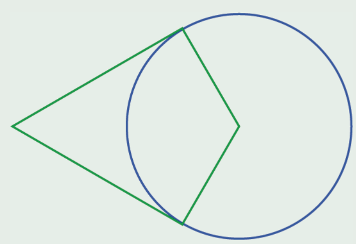


i) பெரிய முக்கோணம் சமப்பக்க முக்கோணம் என்றும் அதன் பக்கங்கள் சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் இரு மடங்கு என்றும் நிறுவுக.

ii) சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும்படி இந்தப்படத்தை வரையவும்.

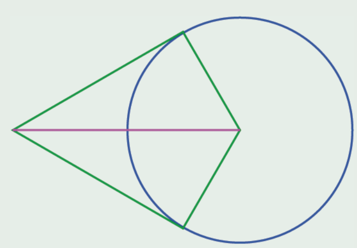
iii) சமப்பக்க முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் முக் கோணத்தின் உச்சிகள் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்குத் தொடு கோடுகள் வரைந்தால், பக்கங்கள் எல்லாம் இரு மடங்கு ஆன வடிவொத்த முக்கோணம் கிடைக்குமா? எதனால்?

(3) ஒரு வட்டத்தின் இரு தொடுகோடுகளும், தொடுகின்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஆரங்களும் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

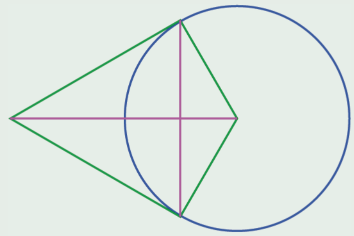


i) தொடுகோடுகளின் நீளம் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

ii) வட்டமையத்தையும் தொடுகோடுகள் சேர்கின்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு, ஆரங்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டி என நிறுவுக.

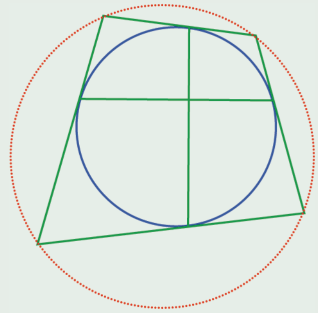


iii) தொடும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் செங்குத்து இரு சமவெட்டியாக இந்தக் கோடு அமையும் என நிறுவுக.



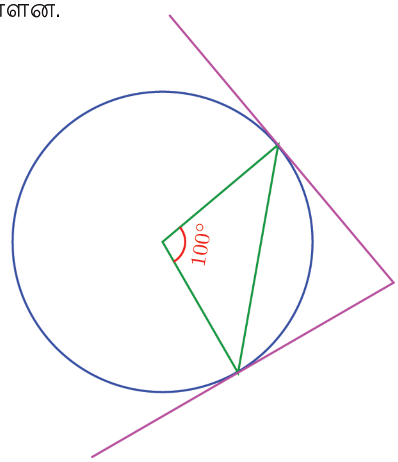
(4) ஒரு வட்டத்தின் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நாண்களின் முனைகள் வழியாக உள்ள தொடுகோடுகள் பக்கங்களாக உள்ள நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் என நிறுவுக.

இதன் ஒரு நாண் விட்டம் எனில் எந்த வகை நாற்கரம் கிடைக்கும்? இரு நாண்களும் விட்டம் ஆனாலோ?

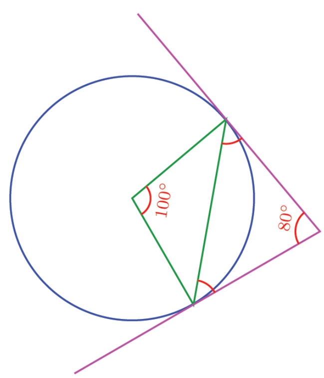


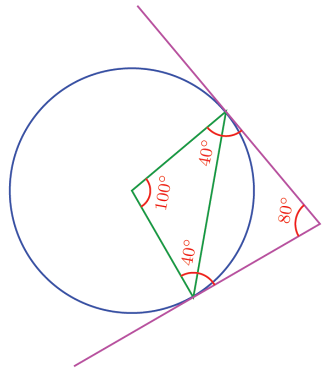
நாணும் தொடுகோடும்

வட்டத்தின் ஒரு நாணின் இரு முனைகளிலும் உள்ள தொடுகோடுகள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.



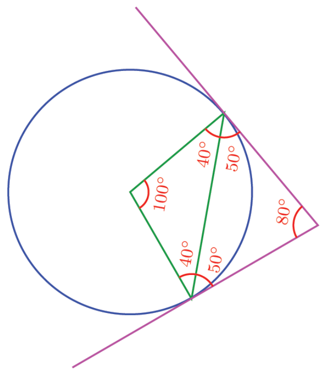
இதில் தொடுகோடுகள் இணைகின்ற கோணம் 80° எனத் தெரியும். நாணுக்கும் தொடுகோடுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணங்களோ?





படத்தில் பச்சை முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் சமம் ஆனதால் அவற்றின் எதிரே உள்ள கோணங்களும் சமம். இவற்றின் தொகை $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. அப்போது ஒவ்வொன்றும் 40°.

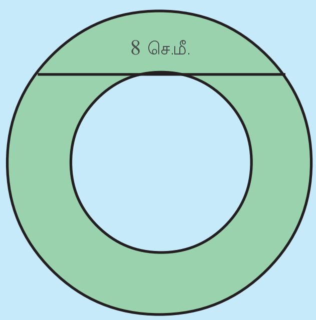
ஆரத்திற்கும் தொடுகோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் 90° ஆகும்; அப்போது நாணும் தொடுகோடுமாக உள்ள கோணம் $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



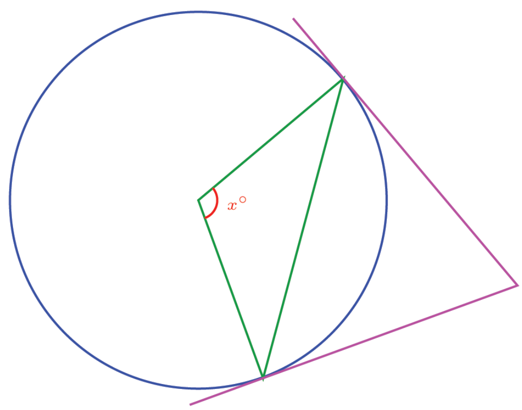
இது வில்லின் மையக்கோணத்தின் பாதி அல்லவா?

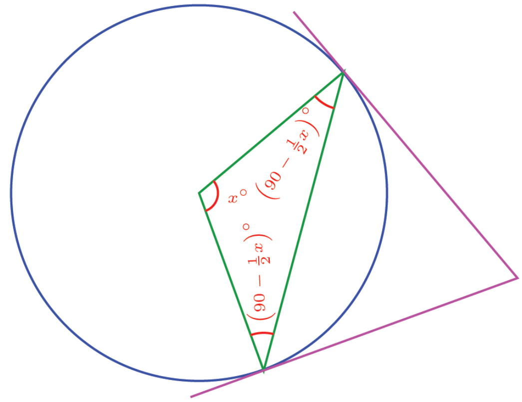
பரப்பளவு பிரச்சினை

கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில், பச்சை நிறப் பாகத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?



எந்த வில்லிற்கும் இது சரியாகுமா? இதனைச் சோதித்துப் பார்ப்பதற்கு, நாணின் மையக்கோணம் x° என எடுத்துப் பார்ப்போம்.

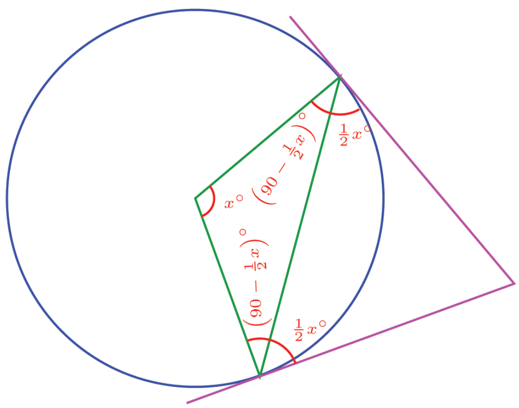




அப்போது பச்சை நிற முக்கோணத்தின் மற்ற இரு கோணங்கள்

$$\frac{1}{2}(180 - x)^{\circ} = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^{\circ}$$

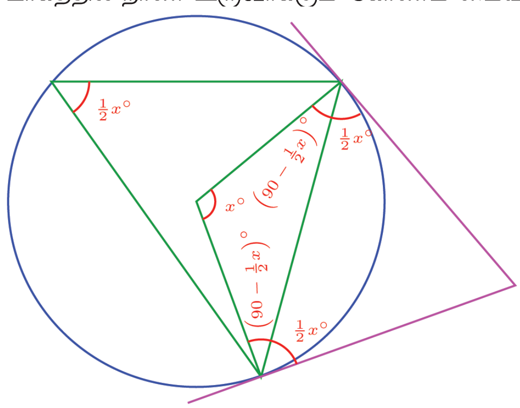
தொடுகோட்டிற்கும் ஆரத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம் 90° ஆனபடியால், இனிமேல் தொடுகோட்டிற்கும் நாணிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் $\frac{1}{2}x^{\circ}$ எனக் காணலாம் அல்லவா.



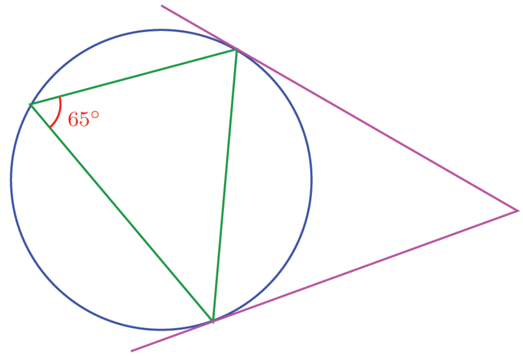
ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் ஒரு நாணும், நாணின் இரு முனைகள் வழியாகத் தொடுகோடுகளும் வரையவும். நாணின் மையக் கோணத்தையும் நாண் தொடுகோட்டுடன் உருவாக்கும் கோணத்தையும் அடையாளப்படுத்தவும். இந்தக் கோணங்களின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? பல நாண்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.

வட்டத்தின் ஒரு நாணின் இரு முனைகள் வழியாக உள்ள தொடுகோடுகள் நாணுடன் உருவாக்கும் கோணம் நாணின் மையக்கோணத்தின் பாதியாகும்.

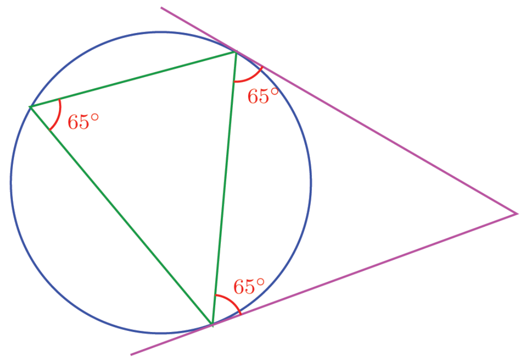
வட்டத்தின் பெரிய பாகத்தில் நாண் உருவாக்கும் கோணம் மையக்கோணத்தின் பாதி அல்லவா?



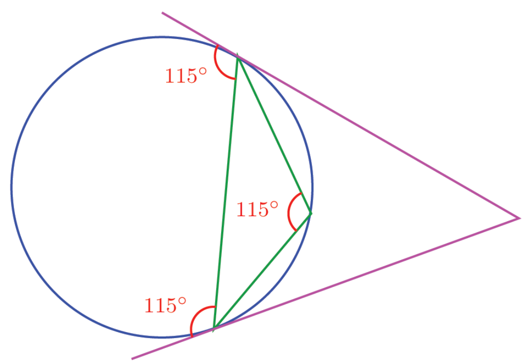
அப்போது இந்தப்படத்தில் தொடுகோடுகள் நாணுடன் உருவாக்கும் கோணம் எது?



வலப்பக்கக் கோணங்கள் 65° அல்லவா.



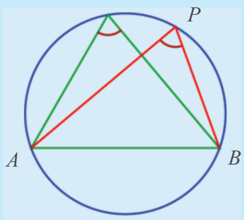
தொடுகோடுகள் நாணின் இடப்பக்கத்தில் உருவாக்கும் கோணங்கள் $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. இது வட்டத்தின் சிறிய பாகத்தில் நாண் உருவாக்கும் கோணம் அல்லவா?



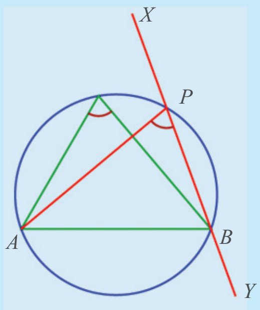
அப்போது, நாண் அதன் முனைகளின் தொடுகோடுகளுடன் உருவாக்கும் கோணங்களுக்கும் வட்டத்தில் உருவாக்கும் கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை இவ்வாறு வரைந்து காட்டலாம்.

மாறாத கோணம்

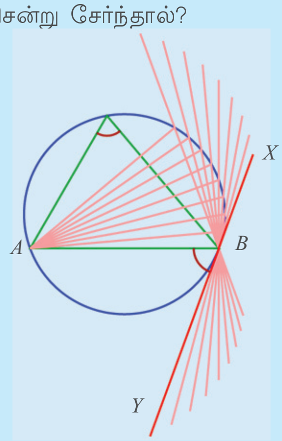
ஒரே வட்டப்பகுதியின் கோணங்கள் சமம் எனக் கண்டீர்கள் அல்லவா:



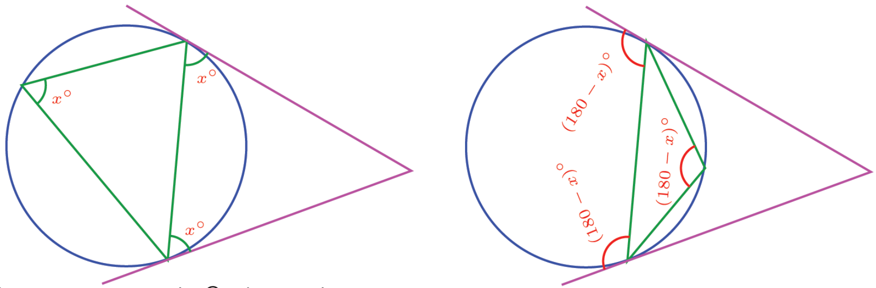
PB ஐச் சிறிது நீட்டி வரைவோம்:



மேலும் *P* வட்டத்தின் வழியே நகர்ந்து, *B* ஐச் சென்று சேர்ந்தால்?



XY என்ற கோடு *B* இன் தொடுகோடாகும். கோணம் சிறிதும் மாறுவதில்லை.

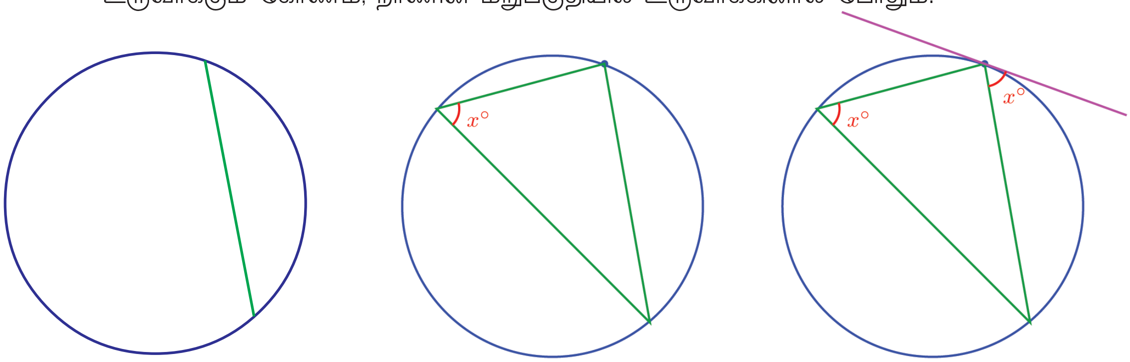


இவ்வாறு எழுதவும் செய்யலாம்.

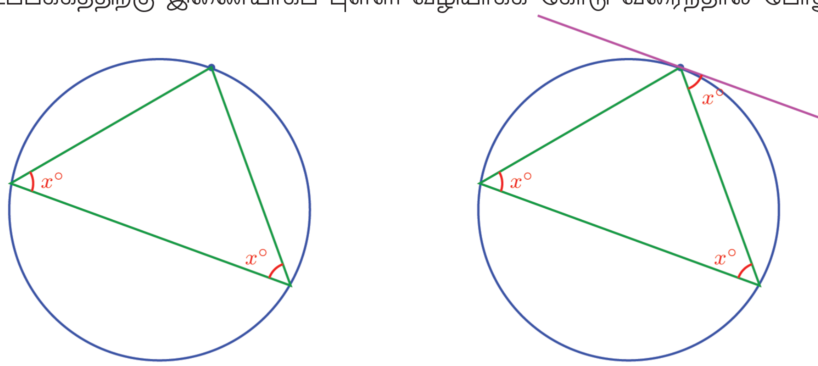
வட்டத்தில் ஒரு நாண், அதன் முனையில் உள்ள தொடுகோட்டுடன் ஒரு பக்கத்தில் உருவாக்கும் கோணம், மறுபக்கத்தில் உள்ள வட்டப்பகுதியில் உருவாக்கும் கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி வழியாகத் தொடுகோடு வரைவது, இந்தப்புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து அல்லவா. மையம் தெரியா விட்டால் தொடுகோடு வரைய, மேலே எழுதிய கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

புள்ளியின் வழியே ஒரு நாண் வரைந்து, அது வட்டத்தின் ஒரு பகுதியில் உருவாக்கும் கோணம், நாணின் மறுபகுதியில் உருவாக்கினால் போதும்.



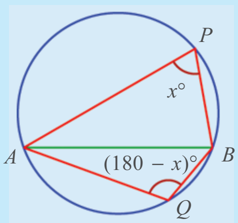
இதில் உள்ள முக்கோணம் இருசமப்பக்க முக்கோணம் ஆக வரைந்தால், அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகப் புள்ளி வழியாகக் கோடு வரைந்தால் போதும்.



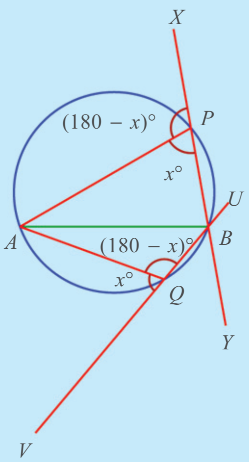
அப்போது ஒரு வட்டத்தில் ஏதேனும் புள்ளி வழியாகத் தொடுகோடு வரைவதற்கு, முதலில் இந்தப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டவில்லை வரைந்து, அது முதல் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

இடம்பெயரும் கோணம்

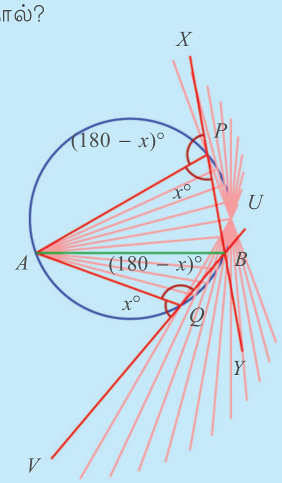
வட்டத்தின் இரு பாகங்களிலும் உள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் அல்லவா:



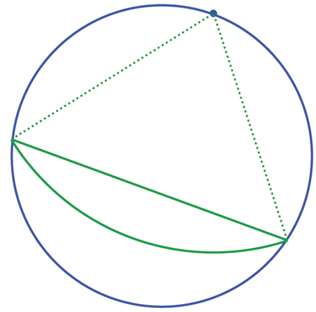
முதலில் செய்ததைப் போன்று கோடுகளை நீட்டி வரைவோம்,



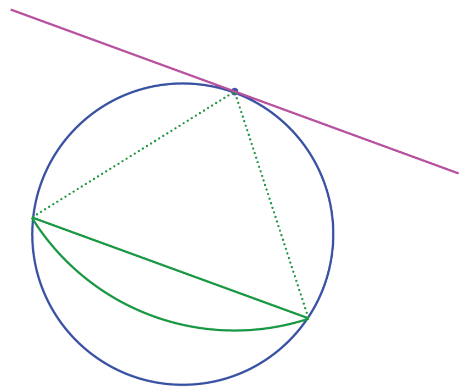
P வட்டத்தின் வழியாக Q ஐ நோக்கி நகர்ந்தால்?

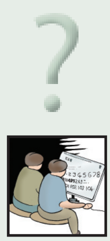


AP இன் கீழே $x°$ உம் மேலே $(180 - x)°$ உம் ஆகும். இடப்பெயர்ச்சியிலும் நீளம் அவ்வாறே அல்லவா?

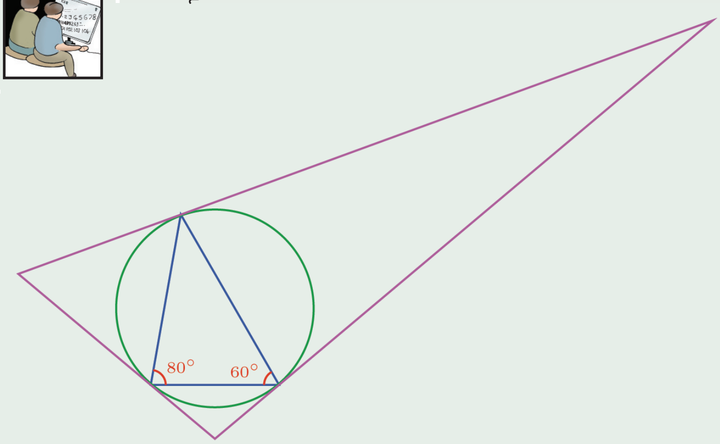


இனி தொடுகோடு வரைய வேண்டிய புள்ளி வழியாக, இந்த கோட்டிற்கு இணைகோடு வரைந்தால் போதும்.





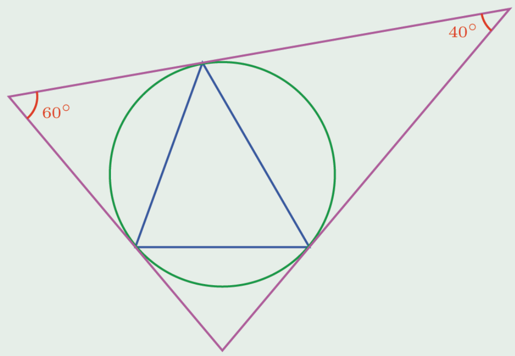
(1) படத்தில் சிறிய முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் வழியே சுற்றுவட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளே பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்.



பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

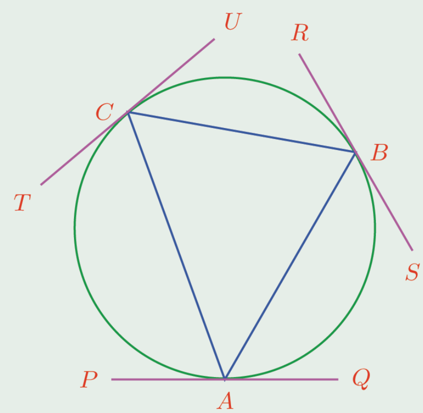
(2) படத்தில் சிறிய முக்கோணத்தின் உச்சிகள் வழியாகச் சுற்றுவட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளே, பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்.

சிறிய முக்கோணத்தின் கோணங் களைக் கணக்கிடுக.



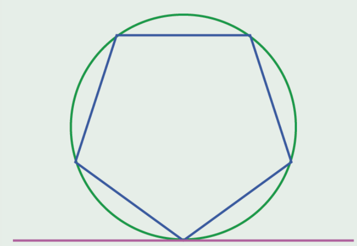
(3) படத்தில், ABC என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் வழியே சுற்றுவட்டத்திற்கு வரைந்த தொடுகோடுகளே PQ, RS, TU என்ற கோடுகள்.

படத்தில் சமமான கோணங்களை வகைப் படுத்தி எழுதவும்.



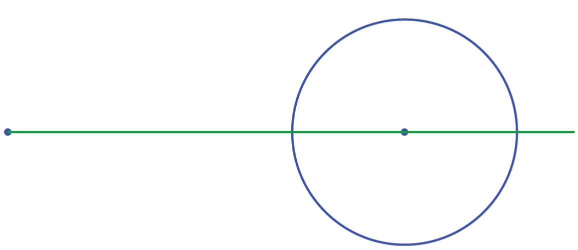
(4) படத்தில் ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் ஓர் உச்சி வழியாக அதன் சுற்றுவட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

தொடுகோடும், தொடுபுள்ளி வழியே உள்ள ஐங்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கும் இடையே உள்ள கோணங்களைக் கணக்கிடுக.



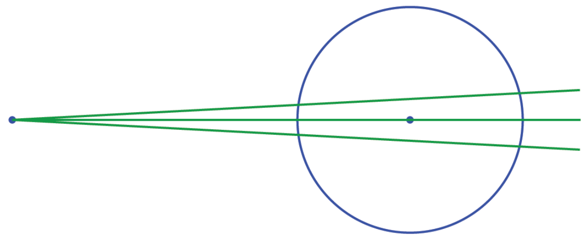
வெளியிலிருந்தும் தொடுகோடு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

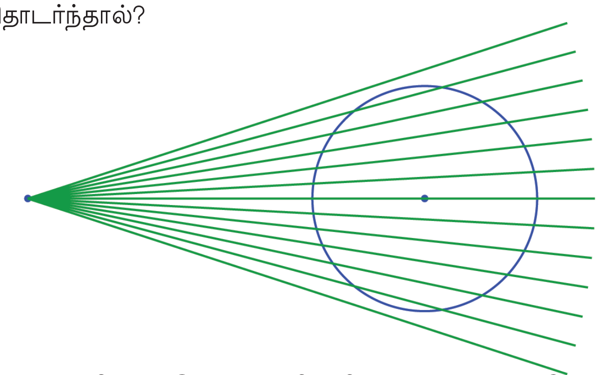


வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியை வட்டமையத்துடன் இணைத்து நீட்டி வரையப் பட்டுள்ளது. அது வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இந்தப்புள்ளிகள், ஒரு விட்டத்தின் முனைகள் ஆகும்.

விட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள இந்தப்புள்ளியை, வட்டத்தின் உள்ளே மையத்தின் சிறிது மேலேயோ, கீழேயோ உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்து வரைந்தால்?

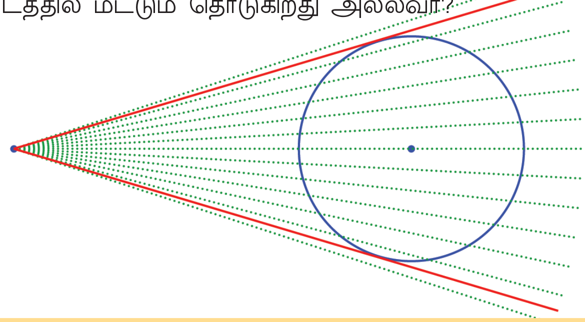


கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் இடைவெளி மேலும் குறைந்தது இவ்வாறு தொடர்ந்தால்?



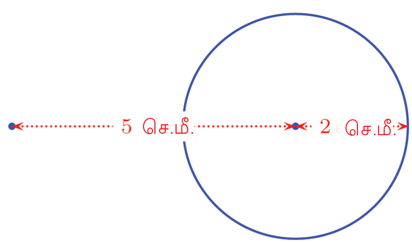
அடுத்தடுத்து வருகின்ற இரு புள்ளிகளில் வட்டத்தை வெட்டிச் செல்லும் கோடுகளுக்கு ஒரு நிலைக்குப் பின்னர் வட்டத்துடன் எந்தத் தொடர்பும் இல்லாமல் ஆகிறது.

ஆனால், அதன் இடையில் எங்கோ ஓரிடத்தில் மேலும் கீழுமாக இரு கோடுகள் வட்டத்தை ஓர் இடத்தில் மட்டும் தொடுகிறது அல்லவா?



ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

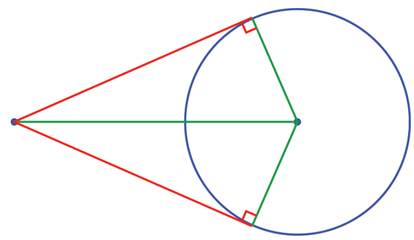
வரையலாம் என்று கூறியதல்லாமல், இத்தகைய ஒரு ஜோடி தொடுகோடுகளை எவ்வாறு வரையலாம் எனக் கூறவில்லை அல்லவா. இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



ஆரம் 2 சென்டிமீட்டர் ஆன வட்டமையத்திலிருந்து 5 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

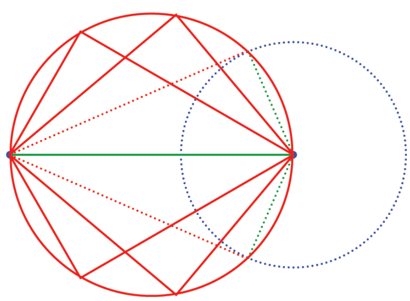
இந்தப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைவது எவ்வாறு?

வரைந்த பின்னர் எவ்வாறு இருக்கும் என்று சிந்தித்தால், வரைவதற்கு உரிய வழிமுறை ஒருவேளை தெளிவாகும்.



வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்தும், வட்டமையத்திலிருந்தும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு ஜோடிகோடுகள் தேவை.

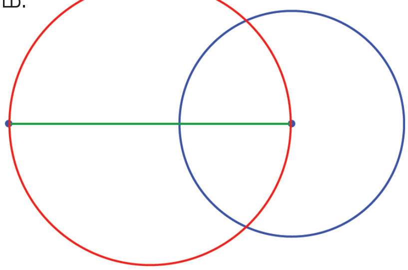
இவ்வாறு வரையப்படும் செங்குத்து ஜோடிகள் எல்லாம் வெட்டிக்கொள்வது வெளியில் உள்ள புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் என்று **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா.



நமக்குத் தேவையான செங்குத்துக்கோட்டு ஜோடியில், ஒரு கோடு முதல் வட்டத்தின் ஆரமாக இருக்க வேண்டும். அதாவது, கோடுகள் வெட்டிக்கொள்வது முதல் வட்டத்தில் ஆக வேண்டும்.

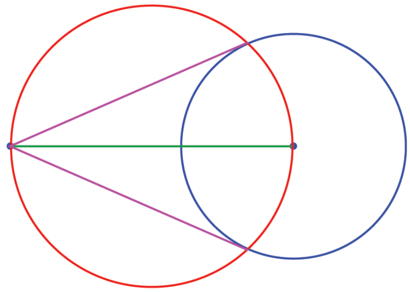
அதற்குப் பழைய வட்டமும், புதிய வட்டமும் வெட்டிச் செல்லும் ஒரு புள்ளி வழியாக வரைந்தால் போதும் அல்லவா?

இனி வரையலாமா; முதலில் வெளியே உள்ள புள்ளியையும் வட்டமையத்தையும் இணைக்கும் கோடு விட்டம் ஆகுமாறு ஒரு வட்டம் வரையவும்.

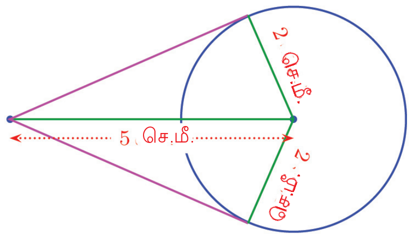


O என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தை ஜியோ ஜிப்ராவில் வரைந்து அதில் A, B என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப்புள்ளிகள் வழியாக வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான C ஐ அடையாளப்படுத்தவும். நாற்கரம் OACB வரைந்து பார்க்கவும். இது வட்டநாற்கரமா? Circle through Three Points பயன்படுத்தி O, A, B என்ற புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டத்தை வரைந்து பார்ப்போம். A, B என்பனவற்றின் இடங்களை மாற்றிப்பார்க்கவும். இவை பக்கத்தில் வரும்போது C க்கு என்ன நிகழ்கிறது? விலகிச்செல்லும் போதோ? இந்தப் புள்ளிகள் ஒரு விட்டத்தின் நுனிப் புள்ளிகள் ஆகும்போது என்ன நிகழ்கிறது?

இந்த வட்டமும் முதல் வட்டமும் வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளை, வெளியே உள்ள புள்ளியுடன் இணைத்தால் நமக்குத் தேவையான தொடுகோடுகள் கிடைக்கும்.



நமது கணக்கில் வட்டத்தின் ஆரம் 2 சென்டிமீட்டரும் வெளியே உள்ள புள்ளி வட்டமையத்திலிருந்து 5 சென்டிமீட்டர் தூரத்திலும் அல்லவா.



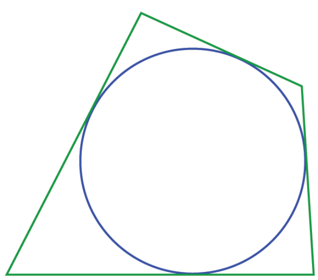
அப்போது பைதகோரஸ் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தித் தொடுகோடுகளின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம்.

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ செ.மீ.}$$

வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளின் வழியே தொடுகோடுகள் வரைந்தால், தொடுபுள்ளி முதல் சந்திக்கும் புள்ளிவரையிலான தொடுகோடுகளின் நீளம் சமம் என்பதை முன்னர் கண்டோம், அதை இவ்வாறும் கூறலாம்.

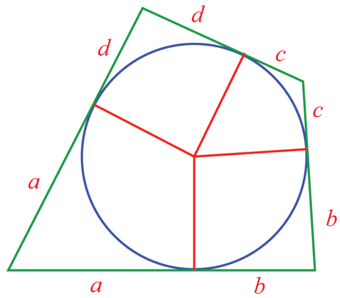
ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் ஆகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கைச் செய்வோம். படத்தில் ஒரு வட்டத்தின் நான்கு புள்ளிகளின் தொடுகோடுகள் பக்கங்களாக வரும் நாற்கரம் வரையப்படுள்ளது.



வட்ட மையத்தையும் இந்தப் புள்ளிகளையும் இணைத்தாலோ?

உச்சிகளிலிருந்து உள்ள தொடுகோடுகளின் நீளம் a, b, c, d என எடுத்தால் கீழே காண்பித்திருப்பதைப் போன்று இந்த நீளங்களை அடையாளப்படுத்தலாம்.



அப்போது நாற்கரத்தின் மேல், கீழ்ப் பக்கங்களின் தொகை $(a + b) + (c + d)$. இடது, வலது பக்கங்களின் தொகையோ?

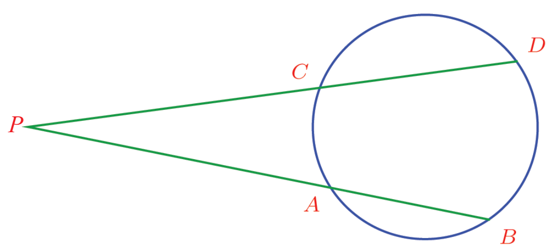
ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் நான்கு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். இந்த நான்கு புள்ளிகள் வழியாக வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு கள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி களை அடையாளப் படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் உச்சிகளாக வரும் நாற்கரம் வரையவும். இனிமேல் தொடுகோடு களை மறைத்து வைக்கலாம். நாற்கரத் தின் பக்கங்களின் நீளத்தை அடையாளப் படுத்தி அவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கவனிக்கவும். வட்டத்தில் புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்க வும்.

$(a + d) + (b + c)$ இரண்டு தொகையும் $a + b + c + d$ ஆகும்; அதாவது,

ஒரு வட்டத்தின் நான்கு புள்ளிகள் வழியாகச்செல்லும் தொடுகோடு கள் சேர்ந்து உருவாக்குகின்ற நாற்கரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களின் தொகை சமமாகும்.

ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களின் தொகை சமமெனில் அந்த நான்கு பக்கங்களும் தொடுகோடுகள் ஆகின்ற ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா?

வட்டத்தில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளை இணைத்து வரையப்படும் நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்களின் தொகை சமம் என்று முன்னர் கண்டதை நினைவில் கொள்க. ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் கோடுகளில், வட்டத்தை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடும் கோடுகள் சமம் எனக் கண்டோம். வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்லும் கோடுகள் அனைத்திலும், முழுக்கோடு வட்டத்திற்கு வெளியில் உள்ள பாகம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் சமமாகும் என **வட்டங்கள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா. இந்தப்படமும் அதன் சமன்பாடும் நினைவில் உண்டு அல்லவா?

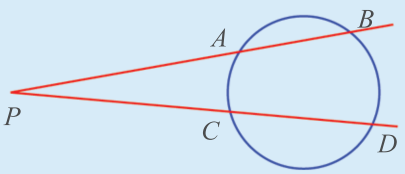


$$PA \times PB = PC \times PD$$

மேலும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தைத் தொடும் ஒரு கோடும் வெட்டும் ஒரு கோடும் வரைந்தால்?

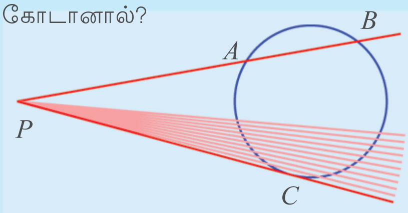
மாறாத உறவு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



இதில் $PA \times PB = PC \times PD$ எனத் தெரியும் அல்லவா.

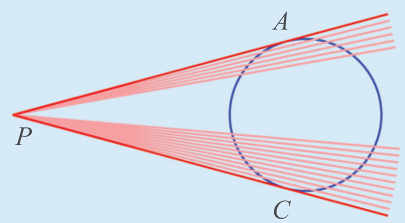
கீழே உள்ள கோடு சுழன்று தொடு கோடானால்?



PD என்பது PC என்பதாகும். முதலில் கண்ட தொடர்பு

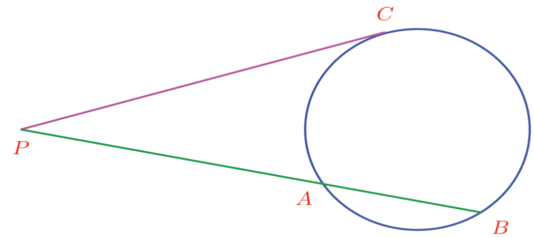
$PA \times PB = PC^2$ என ஆகும்.

மேலே உள்ள கோடும் தொடுகோடா னால்?

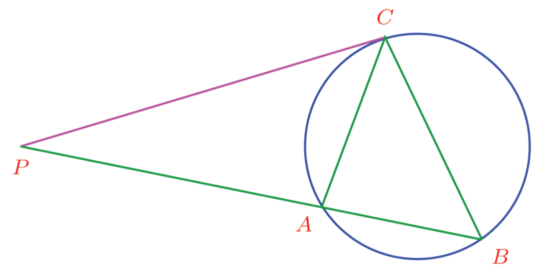


இந்தத் தொடர்பு $PA^2 = PC^2$ அதாவது $PA = PC$ என்று ஆகும்.

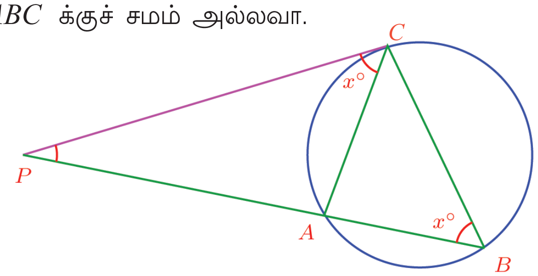
ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள தொடுகோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் என முன்னர் கண்டோம் அல்லவா.



இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பை அறிவதற்கு, AC, BC என்பன இணைத்து முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்.



AC என்ற நாண், PC என்ற தொடுகோட்டுடன் C இல் $\angle PCA$ உருவாக்குகிறது. இது வட்டத்தின் மறுபகுதியில் AC உருவாக்கும் $\angle ABC$ க்குச் சமம் அல்லவா.



அதாவது, முக்கோணம் PAC இல் C இன் கோணம், முக்கோணம் PBC இல் B இன் கோணத்திற்குச் சமமாகும். P இல் இரு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணம் ஆகும்.

அதாவது, இந்த முக்கோணங்களின் கோணங்கள் அனைத்தும் சமம் ஆகும். அதனால் ஒரே கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களின் விகிதமும் சமம் ஆகும்.

PAC இல் x° கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம் PA உம், PBC இல் x° கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம் PC உம் ஆகும். PAC இல் மிகப்பெரிய பக்கம் PC உம் PBC இல் மிகப்பெரிய பக்கம் PB உம் ஆகும்.

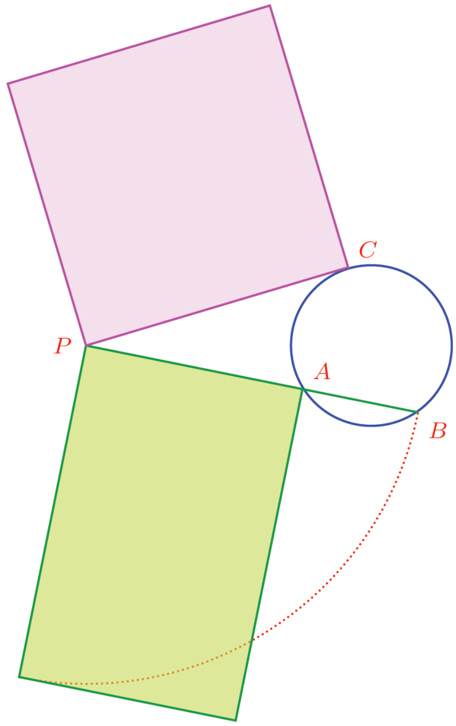
அப்போது

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$$

இதைச் சிறிது மாற்றி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$PA \times PB = PC^2$$

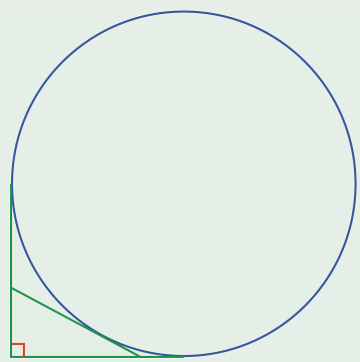
வெட்டும் கோடு, வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள பாகம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன், தொடுகோட்டின் வர்க்கத்திற்குச் சமம் ஆகும்.



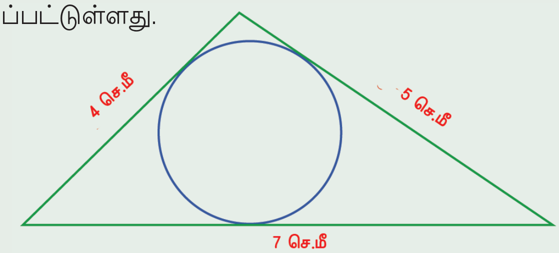
ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் நாண்களில் பார்த்ததைப் போன்று இதனையும் பரப்பளவு களாகக் கூறலாம். வெட்டிக்கொள்ளும் கோடும் வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள பாகமும் பக்கங்கள் ஆன செவ்வகத்திற்கும், தொடுகோடு பக்கம் ஆன சதுரத்திற்கும் ஒரே பரப்பளவு ஆகும்.

(1) ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு தொடுகோடுகளும், மற்றொரு தொடுகோடும் சேர்ந்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கிய படத்தைப் பார்க்கவும்.

முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, வட்டத்தின் விட்டத்திற்குச் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவு படுத்தவும்.

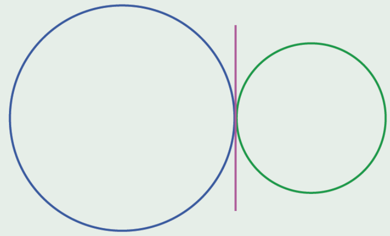


(2) ஒரு வட்டத்தின் மூன்று தொடுகோடுகள் சேர்ந்த முக்கோணம் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

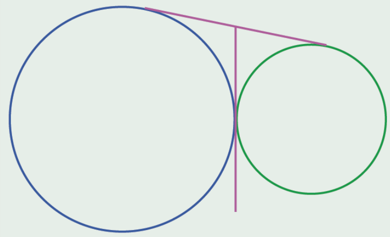


ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் தொடுபுள்ளி வரையுள்ள தொடுகோடுகளின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

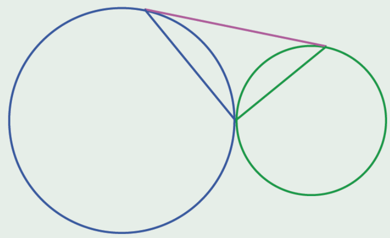
(3) படத்தில், ஒரு புள்ளியில் தொடும் இரு வட்டங்களுக்கு அந்தப்புள்ளியின் வழியாக உள்ள பொதுவான தொடுகோடு வரையப் பட்டுள்ளது.



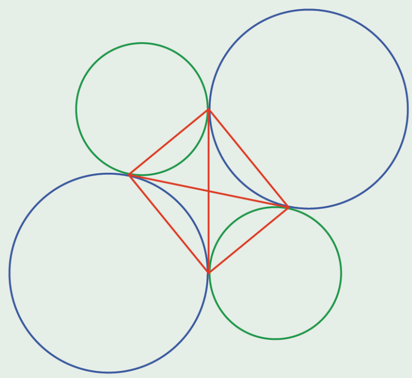
i) இந்த வட்டங்களுக்குப் பொதுவான வேறொரு தொடுகோட்டை முதல் தொடுகோடு சமப் பாகம் செய்யும் என தெளிவுபடுத்தவும்.



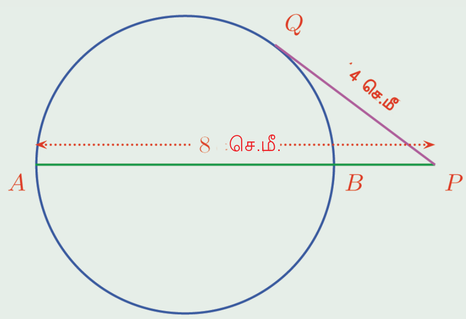
ii) இந்த இரு தொடுகோடுகளும் வட்டங் களைத் தொடும் புள்ளிகளை இணைத் தால் கிடைக்கும் முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக.



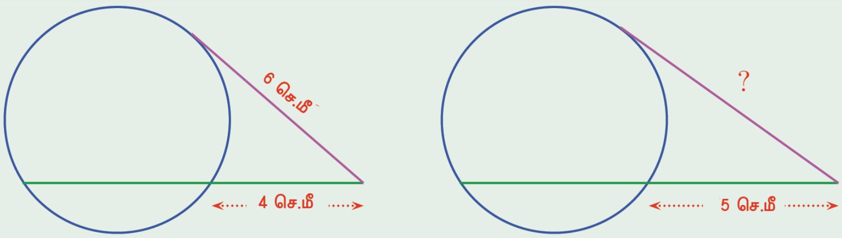
iii) வலப் பக்கத்தில் தரப்பட்டிருக்கும் படத்தைப் போன்று, வசதியான அளவுகள் எடுத்து, நோட்டுப் புத்தகத்தில் வரைய வும். வட்டங்கள் தொடும் புள்ளிகளை இணைத்து வரையப்படும் நாற்கரத்தின் சிறப்புத் தன்மைகள் என்ன?



(4) படத்தில் AB விட்டமும், P அதை நீட்டியதில் உள்ள ஒரு புள்ளியும் ஆகும். P இல் இருந்துள்ள தொடுகோடு வட்டத்தை Q இல் தொடுகிறது. வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?



(5) கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் முதலாவது படம், ஒரு வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளை இணைத்தக் கோட்டை 4 சென்டிமீட்டர் வெளிநோக்கி நீட்டி, அங்கிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர் எனக் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.

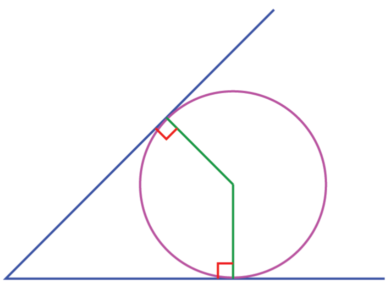


இதே கோட்டை 1 சென்டிமீட்டர் கூடுதலாக வலப்பக்கம் நீட்டிய இடத்திலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடு இரண்டாவது படத்தில் உள்ளது. இந்தத் தொடுகோட்டின் நீளம் என்ன?

(6) 5 சென்டிமீட்டர் பக்கம் உள்ள சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமானதும் ஒரு பக்கம் 6 சென்டிமீட்டரும் ஆன ஒரு செவ்வகம் வரையவும்.

கோட்டைத் தொடும் வட்டம்

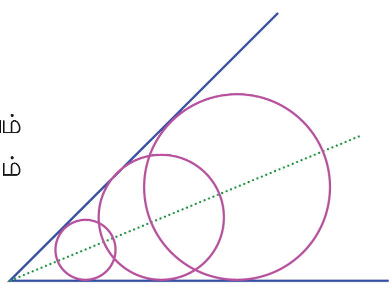
ஒரு விட்டத்தைத் தொடும் இரு கோடுகளை ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையலாம் என்றும் எவ்வாறு வரைவது எனவும் கண்டோம். அப்போது ஒரு வினா. ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் இரு கோடுகளைத் தொடும் வட்டம் வரையலாமா? படத்தைப் பார்க்கவும்.



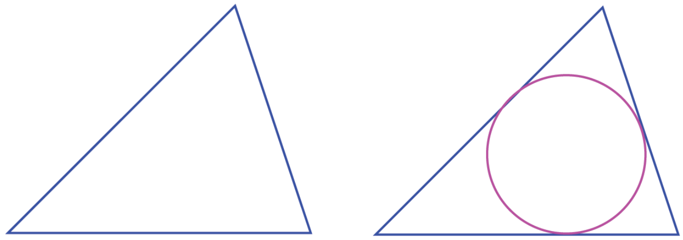
வட்டத்தின் ஆரங்கள் இந்தக்கோடுகளுக்குச் செங்குத்து ஆகும். அதாவது, வட்டமையம் இவ்விரண்டு கோடுகளிலிருந்தும் ஒரே தூரத்தில் ஆக வேண்டும். அப்போது அது இந்தக் கோணத்தின் இருசமவெட்டியில் அல்லவா.

வெட்டும் இரு கோடுகளைத் தொடும் வட்டத்தின் மையம், கோடுகள் சேரும் கோணத்தின் இருசமவெட்டியில் ஆகும்.

கோணத்தின் இரு சமவெட்டியில் எங்கு மையம் எடுத்தாலும், இரு கோடுகளையும் தொடும் வட்டம் வரையலாம்.

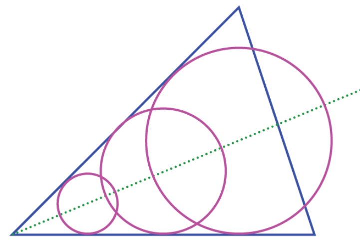


அப்போது ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் தொடும் வட்டம் வரைய இயலுமா என்பதே அடுத்த வினா.

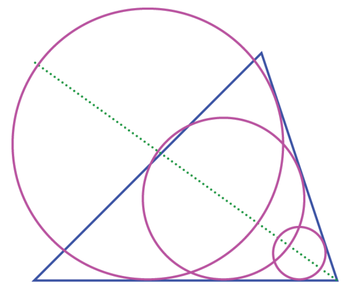


ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு கோணமும் அதன் இருசமவெட்டியும் வரையவும். இரு சமவெட்டியில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப் படுத்தி அந்தப் புள்ளியிலிருந்து கோணத் தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்துக்குச் செங்குத் துக்கோடு வரைந்து, செங்குத்துக் கோடும் பக்கமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். இரு சமவெட் டியிலுள்ள புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு, பக்கத்தின் புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையவும். இந்த வட்டம் கோணத்தின் இரண்டாவது பக்கத்தையும் தொடுகிறது அல்லவா? வட்ட மையத்தை இரு சமவெட்டி வழியாக மாற்றிப்பார்க்கவும்.

கீழேயும் இடதும் பக்கங்கள் சேரும் கோணத்தின் இருசம வெட்டியில் எந்தப்புள்ளியை எடுத்தாலும், அந்த இரு பக்கங் களைத் தொடும் வட்டங்கள் வரையலாம்.

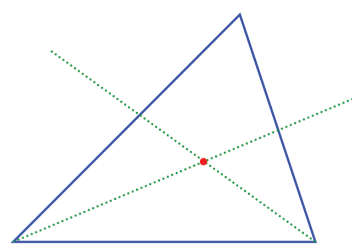


கீழேயும் வலதும் பக்கங்கள் சேரும் கோணத்தின் இருசம வெட்டியின் புள்ளியை எடுத்தால் அந்த இரண்டு பக்கங்களைத் தொடும் வட்டங்களை வரையலாம்.



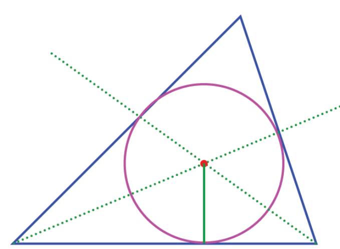
அப்போது இந்த இரண்டு இருசமவெட்டிகளிலும் உள்ள புள்ளியை எடுத்தால்? அதாவது, அவை வெட்டிக் கிடைக்கும் புள்ளி?

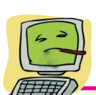
இந்தப் புள்ளியிலிருந்து மூன்று பக்கங்களுக்கும் உள்ள செங்குத்துக்கோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் அல்லவா? இந்த நீளம் ஆரமாக, இந்தப்புள்ளியை மையமாக்கி வட்டம் வரைந்தால்?



இந்த வட்டத்திற்கு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் (incircle) என்று பெயர்.

இங்கு வேறொரு காரியமும் பார்க்க வேண்டும். உள்வட்டத் தின் மையத்திற்கு இடதும் வலதும் உள்ள பக்கங்களுக்கு உள்ள செங்குத்துக்கோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் ஆனதால். வட்டமையம் இந்தப் பக்கங்கள் இணைகின்ற கோணத்தின் இருசமவெட்டியில் ஆகும்.



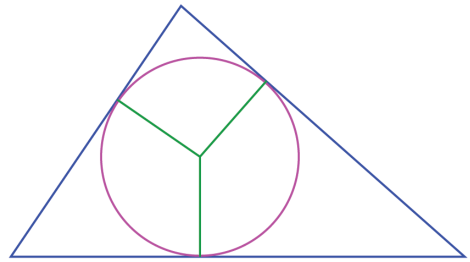


ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு முக் கோணம் வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரையவும்.

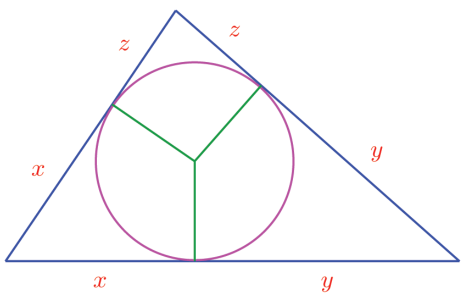
எந்த முக்கோணத்திலும், கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் எல்லாம் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

உள்வட்டம் முக்கோணத்தைத் தொடும் புள்ளிகள், அதன் பக்கங்கள் ஆகிய வற்றின் இடையே சில தொடர்புகள் உள்ளன.

அதைக் காண்பதற்கு, ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம், பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகளை வட்ட மையத்துடன் இணைத்துப் பார்ப்போம்.

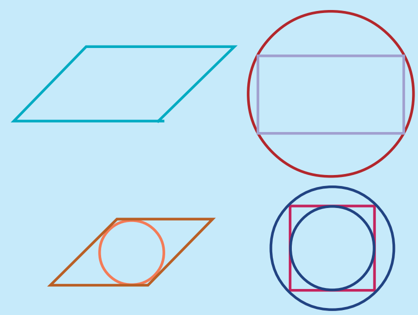


முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் உள்வட்டத்திற்கு உள்ள தொடுகோடுகள் சேர்ந்தது அல்லவா முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும், தொடுபுள்ளி வரையுள்ள தொடுகோடுகளின் நீளம் சமம் ஆகும். அப்போது தொடுகோடுகளின் நீளம் x, y, z என எடுத்து, கீழே காண்பதைப் போன்று அடையாளப்படுத்தலாம்.



சுற்றுவட்டமும் உள்வட்டமும்

எந்த முக்கோணத்திற்கும் சுற்றுவட்டமும், உள்வட்டமும் வரையலாம். ஆனால் நாற்கரங்களை எடுத்தால் சிலவற்றிற்கு இரண்டும் காணப்படுவதில்லை. சிலவற்றிற்கு ஏதேனும் ஒன்று மட்டும், சிலவற்றிற்கு இரண்டும்.



இந்த நீளங்களை எல்லாம் கூட்டினால், முக்கோணத்தின் சுற்றளவு கிடைக்கும். அதாவது $2(x + y + z)$ முக்கோணத்தின் சுற்றளவு ஆகும். மாறாகக் கூறினால், $x + y + z$ என்பது சுற்றளவின்பாதி ஆகும். இதனை s என எழுதினால்,

$$x + y + z = s$$

மேலும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களை a, b, c என எடுத்தால், மேலே உள்ள படத்திலிருந்து,

$$x + y = a$$

$$y + z = b$$

$$z + x = c$$

எனக் காணலாம்.

மேலும் x கிடைக்க $x+y+z$ இல் இருந்து $y+z$ ஐக் கழித்தால் போதும்.

அதாவது,

$$x = (x+y+z) - (y+z) = s - b$$

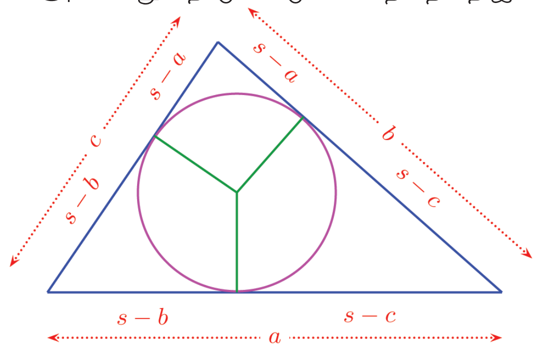
இதைப்போன்று

$$y = (x+y+z) - (z+x) = s - c$$

என்றும்

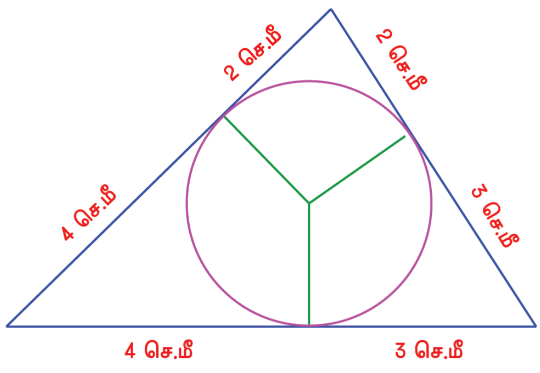
$$z = (x+y+z) - (x+y) = s - a$$

எனவும் காணலாம். அப்போது தொடுகோடுகளின் நீளத்தை இவ்வாறு எழுதலாம்.

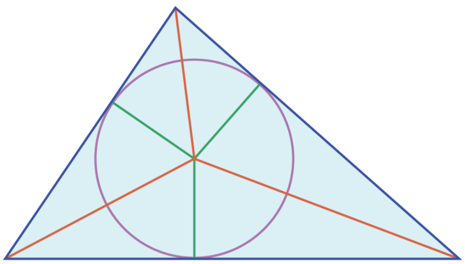


எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டர், 7 சென்டிமீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் சுற்றளவின் பாதி 9 சென்டிமீட்டர்.

அப்போதுஉள்வட்டம் தொடும் புள்ளியின் பக்கங்களைப் பகுப்பது $9-5=4$, $9-6=3$, $9-7=2$ என்றாகும்.



உள்வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு முக்கோணத்தின் பரப்பளவுடன் தொடர்பு உண்டு. உள்வட்ட மையத்திலிருந்து முக்கோணத்தின் உச்சி களுக்கு உள்ள கோடுகள், முக்கோணத்தை மூன்றாகப் பிரிக்கும் அல்லவா.



இந்தச் சிறு முக்கோணங்களின் ஒரு பக்கம், பெரிய முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமே ஆகும். அதற்கு உள்ள உயரம் உள்வட்டத்தின் ஆரமும் ஆகும். அப்போது முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் a, b. c என்றும் உள்வட்ட ஆரம் r என்றும் எடுத்தால், சிறுமுக்கோணங்களின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, என. இவ்வாறாகும். இவற்றின் தொகை பெரியமுக்கோணத்தின் பரப்பளவு ஆகும். அதனை A, என எடுத்தால்,

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)\,r = sr$$

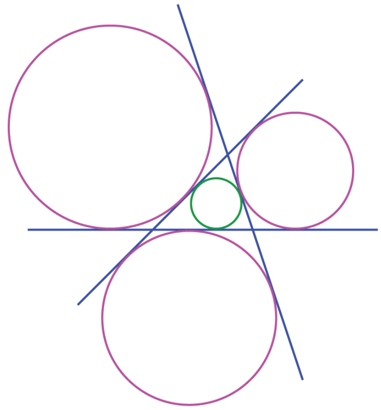
இந்தச் சமன்பாட்டை,

$$r = \frac{A}{s}$$

என எழுதலாம்.

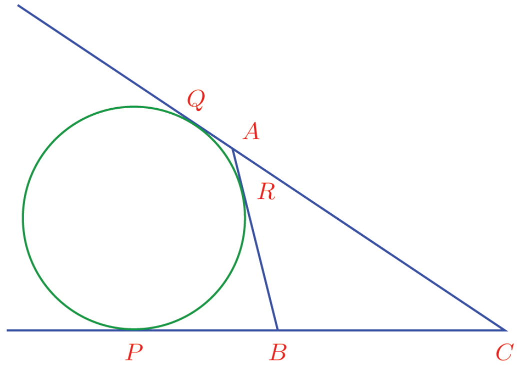
ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தின் ஆரம் என்பது முக்கோணத்தின் பரப்பளவைச் சுற்றளவின் பாதியால் வகுப்பதற்குச் சமம் ஆகும்.

முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் தொட்டுக்கொண்டு, முக்கோணத்தினுள் வரையப்படும் வட்டமே உள்வட்டம். மூன்று பக்கங்களையும் தொட வேண்டும் என்பது மட்டும் தேவையெனில், எந்த முக்கோணத் திற்கும் அத்தகைய மூன்று வட்டங்கள் கூடுதலாக உள்ளன.



முக்கோணத்தின் வெளிவட்டங்கள் (excircles) என்று இவற்றைக் கூறுகிறோம். முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணங்களின் இருசமவெட்டிகளையும் எடுத்தே இவை வரையப்படுகின்றன.

ஒரு முக்கோணத்தையும் அதன் வெளிவட்டத்தையும் சோதித்துப் பார்க்கலாம்.



வட்டம், முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகள் P, Q, R

CP, CQ, என்ற தொடுகோடுகளின் நீளத்தைப் பார்ப்போம். முக்கோணத்தில் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நீளங்களை a, b, c என எடுத்தால்

$$CP = CB + BP = a + BP \qquad CQ = CA + AQ = b + AQ$$

மேலும் B இல் இருந்துள்ள தொடுகோடுகள் ஆனதால், $BP = BR$ எனவும், A இல் இருந்துள்ள தொடுகோடுகள் ஆனதால், $AQ = AR$ எனவும் காணலாம்; அதனால்

$$CP = a + BR \qquad CQ = b + AR$$

$AR + RB = AB$ எனவும் காணலாம். இதையும், மேலே உள்ள சமன்பாடுகளையும் பயன்படுத்தினால்.

$$CP + CQ = a + b + BR + AR = a + b + c$$

எனக் காணலாம்.

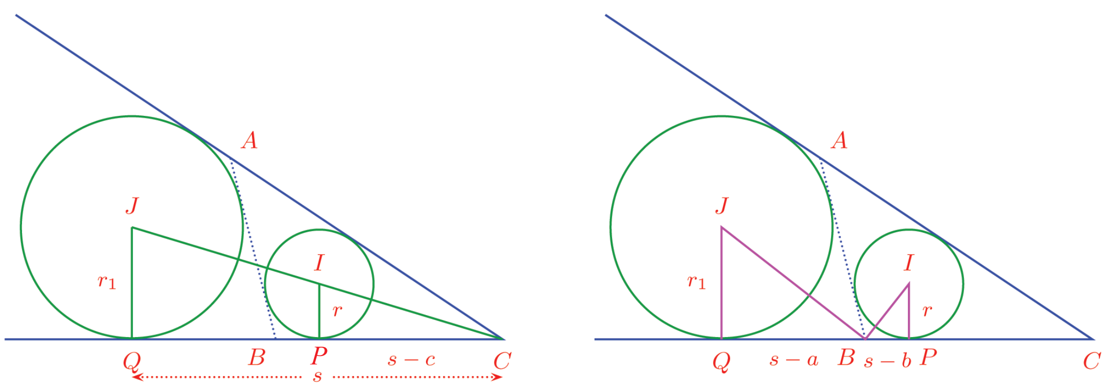
இது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு அல்லவா? மட்டுமல்ல, CP, CQ என்பவற்றிற்கு ஒரே நீளமும் ஆகும். அப்போது என்ன கிடைத்தது?

$$CP = CQ = s$$

அதாவது

> முக்கோணத்தின் ஓர் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிரே உள்ள வெளிவட்டத்திற்கு வரையப்படும். தொடுகோடுகளின் நீளம், முக்கோணத்தின் சுற்றளவின் பாதியாகும்.

மேலும் முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தையும் வரைந்து பார்ப்போம். உள்வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், வெளிவட்டத்தின் ஆரம் r_1 எனவும் எடுக்கலாம்.



இடப்பக்கப் படத்தில் CIP, CJQ எனும் முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் ஆகும். அதனால் சமகோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் விகிதம் சமம் ஆகும்.

(1) $$\frac{r}{r_1} = \frac{s-c}{s}$$

இனி வலப்பக்கப் படத்தைப் பார்க்கவும்: BIP, BJQ என்ற முக்கோணங்களின் B இல் உள்ள கோணங்கள் $\angle PBI$, $\angle PBJ$ பார்க்கவும். BI, BJ என்பன, ABC என்ற முக்கோணத்தின் B இல் உட்கோணம், வெளிக்கோணம் ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ஆனதால்,

$$\angle QBJ = \frac{1}{2}\angle QBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBA) = 90^\circ - \angle PBI$$

அப்போது PBI, QBJ எனும் முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் ஆகும். ஆகவே,

$$\frac{r}{s-a} = \frac{s-b}{r_1}$$

குறுக்குப் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தி, இதனை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்.

(2) $$rr_1 = (s-a)(s-b)$$

(1), (2) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{r}{r_1} \times rr_1 = \frac{s-c}{s} \times (s-a)(s-b)$$

அதாவது,

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, rs என்று முதலில் கண்டோம் அல்லவா. மேலே எழுதப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால் பரப்பளவு

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

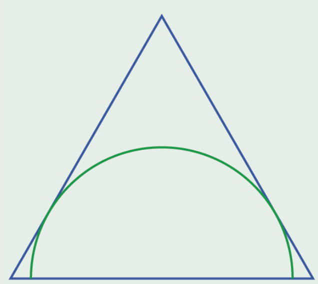
முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் மட்டும் பயன்படுத்திப் பரப்பளவு கண்டு பிடிப்பதற்கு உரிய இந்த வழிமுறை ஹெராணின் சூத்திரம் (Heron's Formula) என அறியப்படுகிறது.

?

(1) பக்கங்களின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டர் ஆன முக்கோணம் வரைந்து, அதன் உள்வட்டம் வரைக. உள்வட்டத்தின் ஆரம் கணக்கிடுக.

(2) பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டரும் ஒரு கோணம் 50° உம் உடைய சரிவகம் வரைந்து அதன் உள்வட்டமும் வரையவும்.

(3) ஒரு சமப்பக்கமுக்கோணம் வரைந்து அதன் இரு பக்கங்களைத் தொடும் ஓர் அரைவட்டத்தைப் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டிருப்பதைப் போன்று வரைக.



(4) ஒரு சமபக்கமுக்கோணத்தின் உள்வட்ட ஆரம், அதன் சுற்றுவட்ட ஆரத்தின் பாதியாகும் என நிறுவுக.

(5) ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் கர்ணம் h உம், உள்வட்டத்தின் ஆரம் r உம் ஆனால் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, $r(h+r)$ ஆகும் என நிறுவுக.

(6) 13 சென்டிமீட்டர், 14 சென்டிமீட்டர், 15 சென்டிமீட்டர் பக்கங்கள் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கண்டுபிடிக்கவும்.

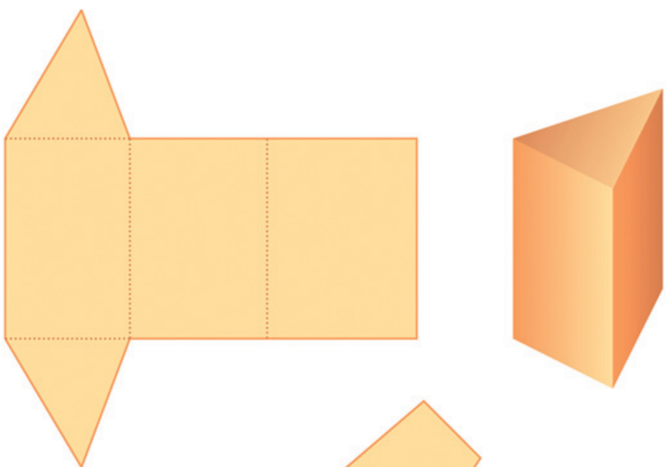
மீள்பார்வை

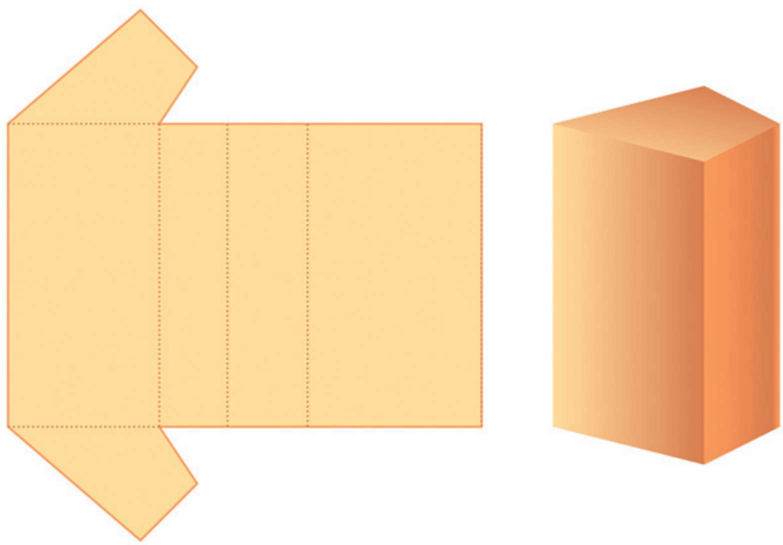
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
✦ வட்டத்தின் இரு புள்ளிகள் அடுத்தடுத்து வரும் போது அவற்றை இணைக்கும் கோட்டிற்கு ஏற்படும் மாற்றத்தைப் புரிந்துகொள்வதன் வாயிலாகத் தொடுகோடு என்ற கருத்தில் சென்று சேர்தல்.			
✦ வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியின் வழியே உள்ள தொடுகோடும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் என அறிதல்.			
✦ வட்டத்தின் ஒரு நாணின் இரு முனைகள் வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சேரும் கோணம், நாணுடன் உருவாகும் கோணம், நாணின் மையக் கோணம் நாண் வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியுடன் உருவாக்கும் கோணம் ஆகியவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பகுத்தறிதல்.			
✦ வட்டத்தின் வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம் என அறிவதுடன் அவற்றை வரைதல்.			
✦ ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் தொட்டுக்கொண்டு அதனுள் ஒரு வட்டம் வரைய இயலுதல்.			

8 கனவடிவங்கள்

கூம்புகள்

பலமுறைகளில் காகிதத்தை வெட்டி எடுத்து மடித்து ஒட்டிப் பட்டகங்கள் உருவாக்கினோம் அல்லவா.





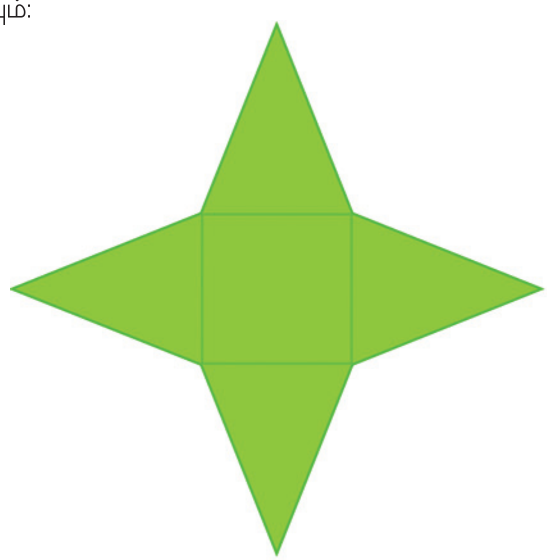
இவ்வகைப் பட்டகங்களைப் பற்றிப் படிக்கவும் செய்தோம்.

இனி வேறொரு வடிவத்தை உருவாக்கிப் பார்க்கலாம்.

கூம்புகள் ஜியோஜிப்ராவில்

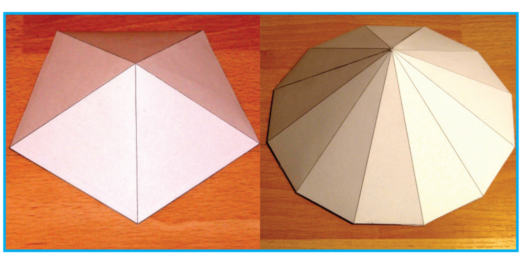
ஜியோஜிப்ராவில் பட்டகங்கள் உருவாக்குவது எவ்வாறு என 9ஆம் வகுப்பில் கண்டோம் அல்லவா? இத்தகைய கூம்புகளை உருவாக்குவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். 3D Graphics திறந்து தேவையான தொடக்கச் செயல்பாடுகளைச் செய்யவும். (9ஆம் வகுப்பில் **பட்டகங்கள்** என்ற அலகில் **கனவடிவங்கள் ஜியோஜிப்ராவில்** என்ற பகுதியைப் பார்க்கவும்). Graphics இல் ஒரு சதுரம் வரையவும். 3D Graphics இல் Extrude to Pyramid or Cone பயன்படுத்திச் செவ்வகத்தில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கூம்பின் உயரத்தைக் கொடுக்கவும். (ஒரு ஸ்லைடர் உருவாக்கி உயரமாக ஸ்லைடரின் பெயரை அளிக்கவும் செய்யலாம்)

முதலில் கீழ்க் காணும் படத்தைப் போன்று காகிதத்தில் வெட்டி எடுக்கவும்:



நடுவில் சதுரம், அதனைச் சுற்றி நான்கு முக்கோணங்கள்; இவை நான்கும் ஒன்று போல் உள்ள (சர்வசமமான) இருசமப் பக்க முக்கோணங்களாக இருக்க வேண்டும். இனி இதனைக் கீழே காண்பித்திருப்பதைப் போன்று மடித்து ஒட்டவும்:

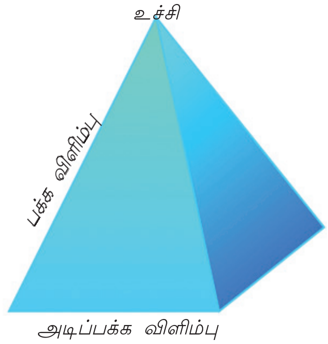
இது என்ன வடிவம்? பட்டகம் எனக் கூறஇயலாது. பட்டகங்களுக்கு ஒன்று போல் உள்ள இரு அடிப்பக்கங்களும் பக்கங்களில் செவ்வகங்களும் வேண்டும். இப்போது உருவாக்கின வடிவத்திலோ, அடிப்பக்கம் சதுரம், மேலே ஓர் உச்சி; சுற்றிலும் முக்கோணங்கள்.



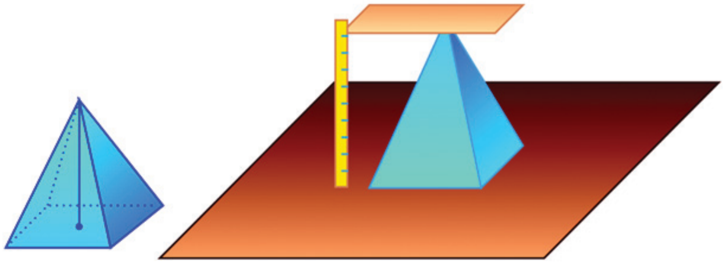
சதுரத்திற்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் செவ்வகங்கள் ஆகலாம். இல்லாவிடில் முக்கோணமோ, வேறு ஏதேனும் பலகோணமோ ஆகலாம். சோதித்துப் பார்க்கலாம். (அடிப்பக்கம் ஒழுங்கு பலகோணம் ஆவதே அழகு).

இத்தகைய வடிவங்களின் பொதுப் பெயரே கூம்புகள் (pyramids).

கூம்பின் அடிப்பக்கமான பலகோணங்களின் பக்கங்களைக் கூம்புகளின் அடிப்பக்கவிளிம்புகள் (base edges) என்றும், முக்கோணங்களின் பிற பக்கங்களைப் பக்க விளிம்புகள் (lateral edges) என்றும் கூறலாம். கூம்பின் மேல்முனையைக் கூம்பின் உச்சி (apex) என்றும் கூறுவர்.



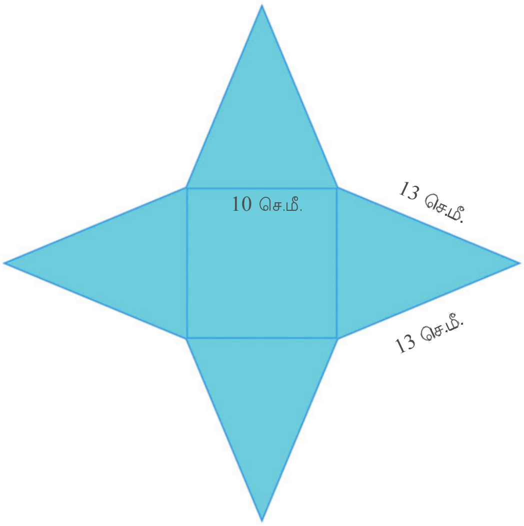
ஒரு பட்டகத்தின் உயரம் என்பது, அதன் அடிப்பக்கங்களின் இடையே உள்ள தூரம் அல்லவா. ஒரு கூம்பின் உயரம் என்பது அதன் உச்சியிலிருந்து அடிப் பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் ஆகும்.



பரப்பளவு

அடிப்பக்க விளிம்புகள் 10 சென்டிமீட்டரும் பக்கவிளிம்புகள் 13 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

மொத்தப்பரப்பளவு என்றால், இது உருவாக்குவதற்குத் தேவையான காகிதத்தின் பரப்பளவு அல்லவா? இந்தக் கூம்பை வெட்டி விரித்து வைத்தால் எவ்வாறு இருக்கும்?



ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த ஒரு கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்தி வைப்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். முன்னர் கலந்துரையாடியதைப் போன்று 3D Graphics இல் ஒரு கூம்பை உருவாக்கவும். Net ஐப் பயன்படுத்தி இந்தக் கூம்பில் கிளிக் செய்யும்போது கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்தி வைத்த வடிவம் கிடைக்கும். (இது கூம்பின் net என அழைக்கப்படுகிறது) இதனுடன் Graphics இல் ஒரு சிலைடரும் கிடைக்கும். இந்தச் சிலைடரைப் பயன்படுத்தி, net இல் இருந்து கூம்பு உருவாவது எவ்வாறு எனக் காணலாம். Algebra இல் Pyramid என்பதில் கூம்பின் பெயருக்கு நேராகக் கிளிக் செய்து கூம்பை மறைத்து வைக்கலாம்.

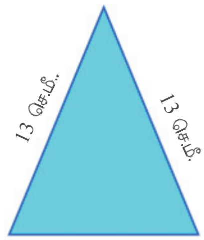
இதில் சதுரத்தின் பரப்பளவு 100 சதுர சென்டிமீட்டர் என்று உடனடியாகக் கூறலாம். முக்கோணத்தின் பரப்பளவோ?

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 10, 13, 13 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இதிலிருந்து பரப்பளவைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, ஹெரோணின் உதவி உண்டு அல்லவா. சுற்றளவின் பாதியிலிருந்து பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கழித்து,

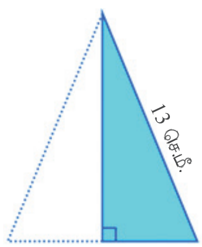
$$\sqrt{18\times8\times5\times5}=\sqrt{9\times16\times5\times5}=60$$

அதாவது, ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவும் 60 சென்டிமீட்டர் ஆகும். அப்போது கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு,

$$100+(4\times60)=340 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்.}$$



முக்கோணத்தின் பரப்பளவை அடிப்பக்கம், உயரம் என்பவற்றின் பெருக்கற் பலனின் பாதியாகவும் கண்டுபிடிக்கலாம்.



அதற்கு முக்கோணத்தின் உயரமும் வேண்டும். இரு சமப்பக்க முக்கோணம் ஆனதால், இந்தச் செங்குத்துக்கோடு அடிப்பக்கத்தைச் சமப்பாகம் செய்யும்.

பைதகோரஸ் தேற்றம் பயன்படுத்திச் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம்

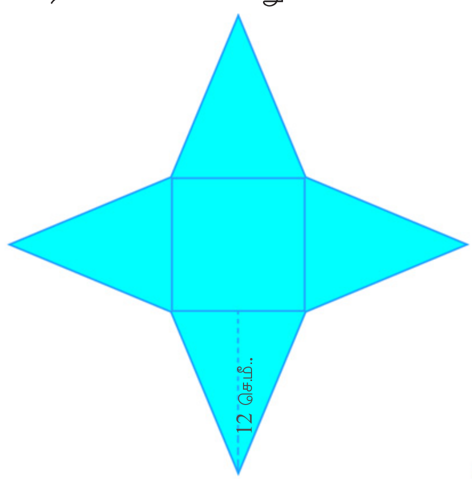
$$\sqrt{13^2-5^2}=12 \text{ செ.மீ.}$$

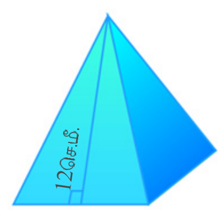
எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். அப்போது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, $5\times12=60$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

காகிதம் கூம்பாக மாறும்போது, இப்போது கண்டுபிடித்த உயரம் என்னவாக மாறும்?

உயரமும் சாய்வுயரமும்

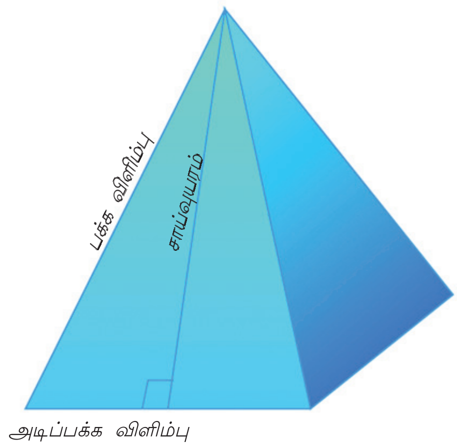
ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு சதுரக்கூம்பு வரையவும் Midpoint or Centre பயன்படுத்திக் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் மையப் புள்ளியையும் அடிப்பக்கத்தின் மூலைவிட்டத்தின் மையப் புள்ளியையும் அடையாளப்படுத்தவும். Segment பயன்படுத்திக் கூம்பின் உயரம், சாய்வுயரம் என்பவற்றை அடையாளப்படுத்தலாம். Polygon பயன்படுத்தி உயரம், சாய்வுயரம், பக்கவிளிம்பு, அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதி ஆகியன பக்கங்களாக வருகின்ற செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைந்து பார்க்கவும். Net பயன்படுத்திக் கூம்பைப் பிரித்து நிமிர்த்திப் பார்க்கவும். கூம்பை மறைத்து வைக்கவும் செய்யலாம்.





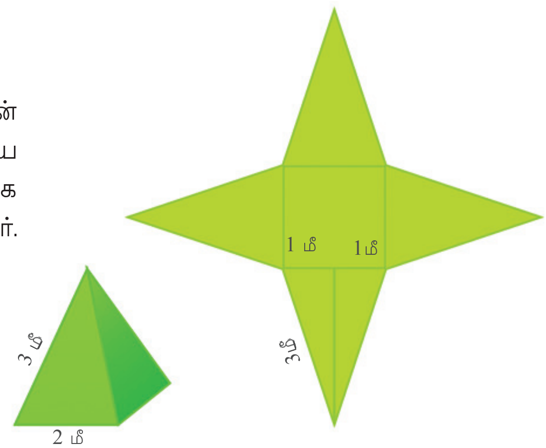
இந்த நீளத்தைக் கூம்பின் சாய்வுயரம் (slant height) என்று கூறலாம்.

இப்போது செய்த கணக்கில் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பு பக்கவிளிம்பு, சாய்வுயரம் ஆகியவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டோம் அல்லவா. தரப்பட்டுள்ள படத்தில் காண்பித்திருப்பதைப் போன்று ஒரு செங்கோண முக்கோணம் சதுரக்கூம்பின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உள்ளது. இவற்றின் சாய்வுயரமும் அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதியும் செங்கோணப் பக்கங்கள்; பக்கவிளிம்பே கர்ணம்.



இனி இந்தக் கணக்கைச் செய்யலாம் அல்லவா?

அடிப்பக்க விளிம்புகள் 2 மீட்டரும், பக்கவிளிம்புகள் 3 மீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?



அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு 4 சதுரமீட்டர். பக்க முகங்களின் பரப்பளவு காண்பதற்குச் சாய்வுயரம் தேவை. முன்னர் கூறிய செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் அதாவது அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதி 1 மீட்டர். கர்ணம் பக்கவிளிம்பான 3 மீட்டர். அதனால் அதன் சாய்வுயரம்,

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ மீட்டர்.}$$

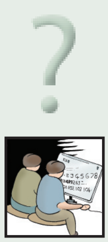
இதைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவையும்,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ சதுரமீட்டர்}$$

எனக் காணலாம். அப்போது மொத்தப் பரப்பளவு,

$$4 + \left(4 \times 2\sqrt{2}\right) = 4 + 8\sqrt{2} \text{ சதுரமீட்டர்.}$$

இதில் ஐயம் இருப்பின் கணிப்பானைப் பயன்படுத்தி (அல்லது $\sqrt{2}$ இன் தோராய மதிப்புள்ள தசம எண்ணை நினைவுபடுத்தி) இதன் தோராய மதிப்பை 15.31 சதுரமீட்டர் என்று கண்டுபிடிக்கலாம்.



(1) எல்லாப் பக்கங்களுக்கும் 5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு சதுரம்; ஒரு பக்கம் 5 சென்டிமீட்டரும் அதிலிருந்து எதிர்உச்சிக்கு உள்ள உயரம் 8 சென்டிமீட்டரும் உடைய நான்கு இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள்; இவற்றைச் சேர்த்து வைத்து ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்கவும். அதற்கு எத்தனை சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை?

(2) சதுரக்கூம்பு வடிவில் உள்ள ஒரு விளையாட்டுப் பொருளின் அடிப்பக்க விளிம்பு 16 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 10 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இத்தகைய 500 விளையாட்டுப் பொருட்களுக்கு நிறம் தீட்டுவதற்கு, சதுரமீட்டருக்கு 80 ரூபாய் வீதம் எவ்வளவு செலவாகும்?

(3) ஒரு சதுரக்கூம்பின் பக்கமுகங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும். அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம் 30 சென்டிமீட்டர். அதன் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

(4) ஒரு சதுரக்கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 40 சென்டிமீட்டரும், விளிம்புகளின் மொத்த நீளம் 92 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

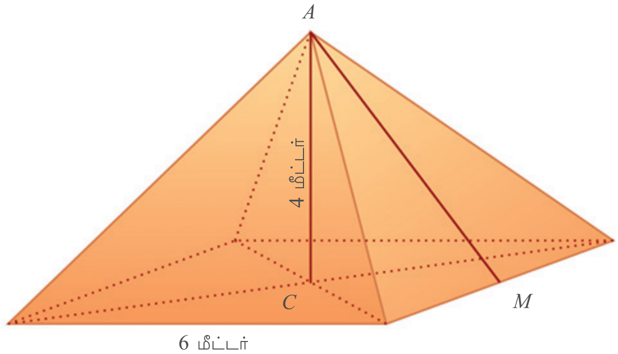
(5) பக்கமுகப் பரப்பளவு, அடிப்பக்கப் பரப்பளவிற்குச் சமமான சதுரக்கூம்பை உருவாக்க இயலுமா?

உயரமும் சாய்வுயரமும்

கூம்புகளின் அளவுகளில் பலவேளைகளில் உயரம் மிக முக்கியமாகும். இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தில் ஒரு கூடாரம் அமைக்க வேண்டும். அடிப்பக்க நீளம் 6 மீட்டரும் கூடாரத்தின் உயரம் 4 மீட்டரும் இருக்க வேண்டும். இதனை அமைப்பதற்கு எத்தனை சதுரமீட்டர் கித்தான் தேவை?

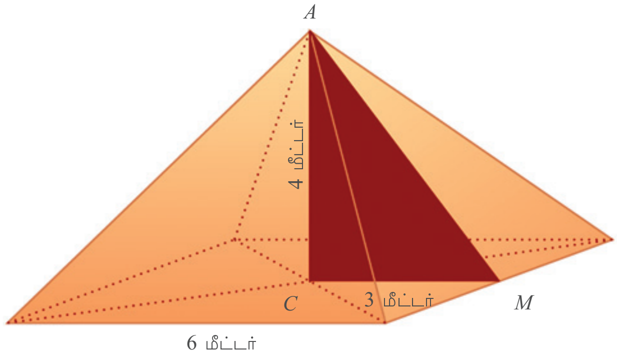
கூடாரத்தின் பக்கங்களான முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்கு, சாய்வுயரம் தேவை அல்லவா? தரப்பட்டுள்ள தகவல்களைப் பயன்படுத்தி, அதனை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்? இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



நமக்குத் தேவையான சாய்வுயரம் AM ஆகும். CMஐ இணைத்தால், AM கர்ணம் ஆன ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும் அல்லவா? அதில் CM இன் நீளம் எத்தனை?

எகிப்தின் பிரமிடுகள்

பிரமிடு எனக்கூறும் போது, மனதில் தோன்றும் வடிவம் எகிப்தின் பிரமிடுகளே. எகிப்தின் பல்வேறு பகுதிகளிலிருந்து 138 பிரமிடுகள் கண்டுபிடித்துள்ளனர். ஏறக்குறைய கி.மு. இரண்டாயிரத்தில் இவற்றில் பல கட்டப்பட்டுள்ளன.



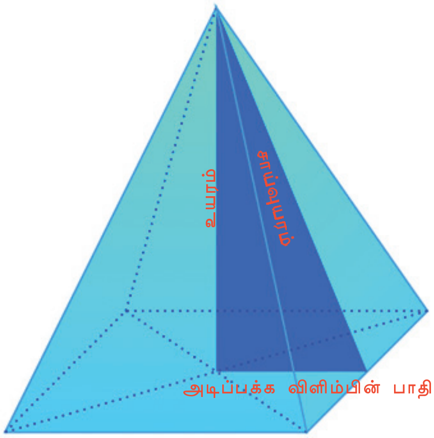
படத்திலிருந்து $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ மீட்டர் எனக் கணக்கிடலாம்.

அப்போது கூடாரம் அமைப்பதற்கு, ஒரு பக்க நீளம் 6 மீட்டரும் அதிலிருந்துள்ள உயரம் 5 மீட்டரும் உடைய நான்கு இரு சமப்பக்க முக்கோணங்கள் வேண்டும்.

அவற்றின் மொத்தப் பரப்பளவு, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \ = 60$ சதுரமீட்டர் அல்லவா.

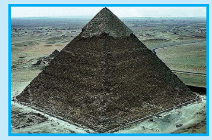
இவ்வளவு கித்தான் கூடாரம் அமைப்பதற்குத் தேவைப்படுகிறது.

இந்தக் கணக்கில் கண்டது, எல்லாச் சதுரக்கூம்புகளுக்கும் பொருந்துகிறது அல்லவா. எந்த ஒரு சதுரக்கூம்பிற்கு உள்ளேயும் சாய்வுரம் கர்ணம் ஆன ஒரு செங்கோண முக்கோணம் உண்டு என ஊகிக்கலாம். கூம்பின் உயரமும், அடிப்பக்க விளிம்பின் பாதியும் அதன் செங்குத்துப் பக்கங்கள்



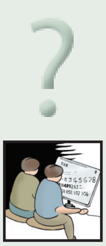
பெரிய பிரமிடு

எகிப்தில் கிஸாவில் உள்ள பெரிய பிரமிடே (Great Pyramid of Giza) மிகப் பெரிய பிரமிடு.

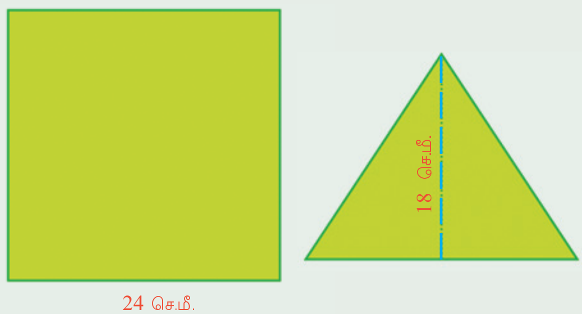


இதன் அடிப்பக்கமான சதுரத்திற்கு ஏறக்குறைய அரை இலட்சம் சதுரமீட்டர் பரப்பளவு உள்ளது. உயரம் ஏறக்குறைய 140 மீட்டர். இதனைக் கட்டுவதற்கு இருபது ஆண்டு கள்வரை தேவைப்பட்டிருக்கும் என்று கணக்கிடப் பட்டுள்ளது.

சரியான சதுரத்திலிருந்து தொடங்கி, பூதாகார மான கற்களால் மேல்நோக்கிக் கட்டியெழுப்பி, ஒரு புள்ளியில் முடிகின்ற இந்த ஆடம்பரக் கல்லறைகள், மனித உழைப்பு, கட்டுமானக் கலை, கணித அறிவு ஆகியவற்றின் குறியீடு களாக உயர்ந்து நிற்கின்றன.

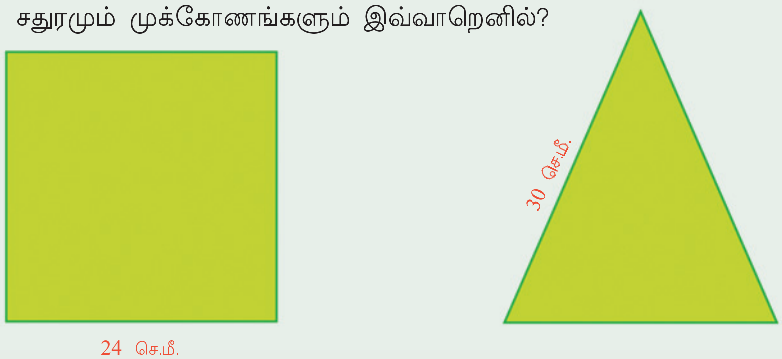


(1) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளில் ஒரு சதுரத்தையும், நான்கு முக்கோணங்களையும் பயன்படுத்திச் சதுரக் கூம்பு உருவாக்கப்பட்டது.



கூம்பின் உயரம் எவ்வளவு?

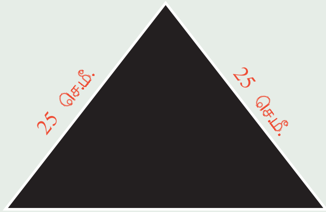
சதுரமும் முக்கோணங்களும் இவ்வாறெனில்?



(2) காகிதத்தை வெட்டி ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்க வேண்டும். அடிப்பக்க விளிம்பு 10 சென்டிமீட்டராகவும், உயரம் 12 சென்டிமீட்டராகவும் இருக்கவேண்டும். முக்கோணங்களின் அளவுகள் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

(3) எந்தச் சதுரக்கூம்பிலும் உயரம், சாய்வுயரம், பக்கவிளிம்பு ஆகியவற்றின் வர்க்கங்கள் ஒரு கூட்டுத்தொடராகும் என நிறுவுக.

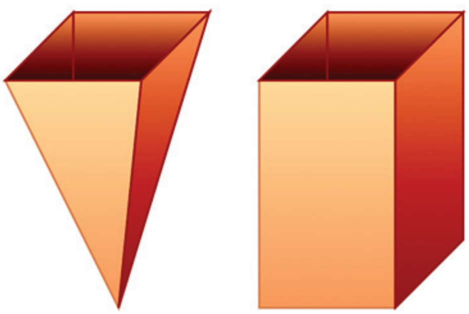
(4) படத்தில் தரப்பட்டிருக்கும் இரு சமப்பக்க முக்கோணம் பக்கங்களாக உள்ள சதுரக்கூம்பை உருவாக்க வேண்டும். அதன் உயரம் எவ்வளவாக இருக்கும்? அடிப்பக்கம் 30 சென்டிமீட்டருக்குப் பதிலாக 40 சென்டிமீட்டர் ஆனால்?



சமமான எந்த நான்கு இரு சமப்பக்க முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தியும் சதுரக்கூம்பு உருவாக்க இயலுமா?

கூம்பின் கனஅளவு

எந்தப் பட்டகத்திலும் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனே அதன் கன அளவு எனக் கண்டோம் அல்லவா. ஒரு கூம்பின் கனஅளவோ?



ஒரு சதுரக்கூம்பு எடுக்கலாம். முதலில் ஒரு செய்முறை பயிற்சியை மேற்கொள்வோம். கட்டி அட்டையைப் பயன்படுத்தி, ஒரு திறந்த சதுரக்கூம்பு உரு வாக்கவும். இனி இதே அடிப்பக்கமும் உயரமும் உள்ள ஒரு திறந்த சதுரப்பட்டகம் உருவாக்கவும்.

ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் உள்ள ஒரு சதுரக் கூம்பையும் சதுரப் பட்டகத்தையும் ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கவும். இதை விரைவாகப் பகுத்தறிய உள்ளே இருக்கும் கூம்பின் நிறத்தை மாற்றிக் கொடுப்பதுடன் Opacity 100 ஆக்கவும் செய்தால் போதும். (Object properties → Colour) Volume பயன்படுத்திக் கூம்பு, பட்டகம் ஆகியவற்றின் கன அளவைக் கணக்கிடுக. இவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? இவற்றின் அடிப்பக்கமும் உயரமும் மாற்றினால்?

கூம்பில் மணல் நிறைத்து பட்டகத்தினுள் போடவும். மணல் நிரம்பிய பாகத்தின் உயரம் பட்டகத்தின் உயரத்தின் எத்தனை பாகம் ஆகும் என அளந்து பார்க்கவும். மூன்றில் ஒன்று அல்லவா? பட்டகம் நிறைவதற்கு எத்தனை முறை இதைப் போன்று கூம்பில் மணல் எடுக்க வேண்டும்.

அப்போது பட்டகத்தின் கனஅளவு, கூம்பின் கனஅளவின் மூன்று மடங்கு ஆகும் எனக் காணலாம். (இதன் கணிதம் சார்ந்த விளக்கம் பாடத்தின் இறுதிப்பகுதியில் தரப்பட்டுள்ளது)

பட்டகத்தின் கனஅளவு அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலன் ஆகும் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டுள்ளோம்.

அப்போது சதுரக்கூம்பின் கனஅளவைக் குறித்து என்ன கூறலாம்.?

சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு என்பது அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனின் மூன்றிலொன்று ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்க விளிம்புகள் 10 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 8 சென்டிமீட்டரும் உள்ள சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ கனசென்டிமீட்டர் ஆகும்.

உலோகத்தால் ஆன ஒரு கன சதுரக்கட்டையின் ஒரு விளிம்பின் நீளம் 15 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இதனை உருக்கி 25 சென்டிமீட்டர் அடிப்பக்க விளிம்பு உள்ள ஒரு சதுரக்கூம்பு உருவாக்கினால், அதன் உயரம் எவ்வளவு?

கன சதுரக்கட்டையின் கனஅளவு 15^3 கனசென்டிமீட்டர்.

உருக்கி உருவாக்குகின்ற சதுரக்கூம்பின் கனஅளவும் இதுவே ஆகும். அடிப்பக்கப் பரப்பளவை உயரத்தின் மூன்றிலொன்றால் பெருக்கிக் கிடைத்தது அல்லவா கூம்பின் அளவு.

தரப்பட்டுள்ள கணக்கில், கூம்பின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு 25^2 சதுரமீட்டர் ஆனதால், உயரத்தின் மூன்றிலொன்று $\frac{15^3}{25^2}$ எனவும், அதிலிருந்து உயரம்

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

எனவும் காணலாம்.

(1) அடிப்பக்க விளிம்பு 10 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 15 சென்டிமீட்டரும் ஆன சதுரக்கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு?

(2) இரு சதுரக் கூம்புகளின் கனஅளவுகள் சமம் ஆகும். முதல் கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளத்தின் பாதி, இரண்டாவது கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம். முதல் கூம்பின் உயரத்தின் எத்தனை மடங்கு இரண்டாவது கூம்பின் உயரம்?

(3) இரு சதுரக்கூம்புகளின் அடிப்பக்க விளிம்புகள் 1 : 2 என்ற விகிதத்திலும் அவற்றின் உயரங்கள் 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் ஆகும். முதல் கூம்பின் கனஅளவு 180 கன சென்டிமீட்டர் ஆகும். இரண்டாவது கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு?

(4) எல்லா விளிம்புகளும் சமமான ஒரு சதுரக்கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பின் நீளம் 18 சென்டிமீட்டர் ஆகும். கூம்பின் கனஅளவைக் கணக்கிடுக.

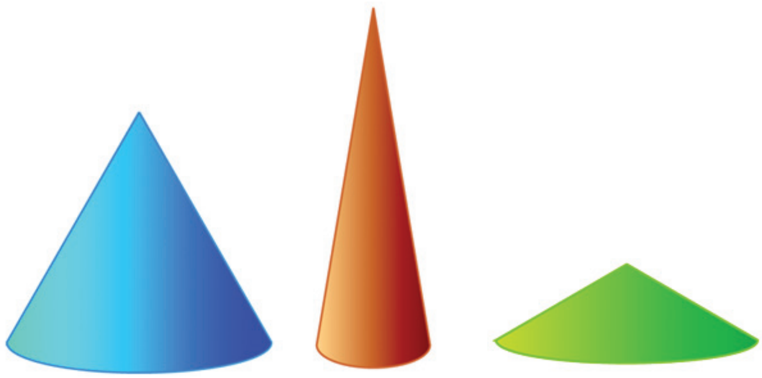
(5) ஒரு சதுரக்கூம்பின் சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் மொத்தப்பரப்பளவு 896 சதுரசென்டிமீட்டரும் ஆகும். கூம்பின் கனஅளவைக் கணக்கிடுக.

(6) எல்லா விளிம்புகளும் சமமான ஒரு சதுரக்கூம்பின் உயரம் 12 சென்டி மீட்டர் ஆகும். அதன் கனஅளவு எவ்வளவு?

(7) அடிப்பக்கச் சுற்றளவு 64 சென்டிமீட்டரும் கனஅளவு 1280 கன சென்டி மீட்டரும் உடைய சதுரக்கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

வட்டக்கூம்பு

உருளையைப் போன்று அடிப்பக்கம் வட்டமான கூம்புகள் உள்ளன:

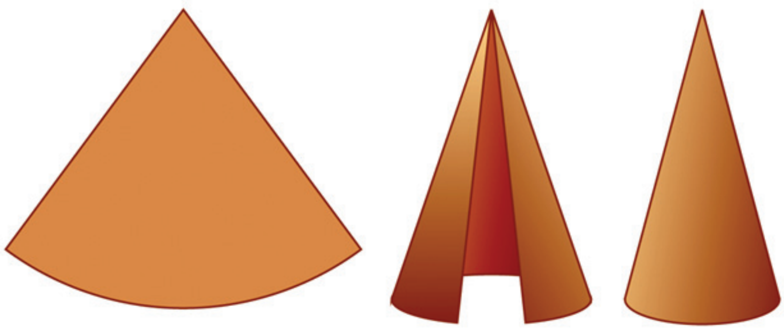


இவற்றை வட்டக்கூம்புகள் (cones) என்று கூறுகிறோம்.

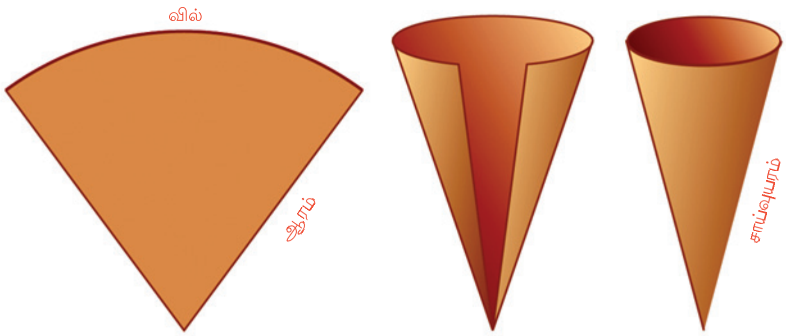
செவ்வகத்தை வளைத்து உருளை உருவாக்கியது போன்று, ஒரு வட்டப்பகுதியை வளைத்து வட்டக்கூம்பை உருவாக்கலாம். (மூடிய கூம்பு உருவாக்க வேண்டுமெனில் மேலும் ஒரு சிறிய வட்டம் தேவை)

வட்டக்கூம்பு

சதுரக்கூம்பைப் போன்று வட்டக் கூம்பையும் ஜியோ ஜிப்ராவில் வரையவும். Graphics இல் ஒரு வட்டம் வரைந்து 3D Graphics இல் Extrude to Pyramid or Cone பயன்படுத்தி வட்டக்கூம்பு வரையலாம். தேவையெனில் ஆரமும் உயரமும் மாற்று வதற்கு சிலைடர்களைப் பயன் படுத்தலாம்.



இதில் வளைக்கும் வட்டப்பகுதியின் அளவுகளுக்கும், உருவாக்கிய வட்டக்கூம்பின் அளவுகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?



வட்டப்பகுதியின் ஆரம், கூம்பின் சாய்வுயரம் ஆகும். வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு ஆகும்.

வட்டப்பகுதியின் அளவு மையக்கோணத்தின் அடிப்படையிலாகும். இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

> ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு வட்டத்திலிருந்து 45° மையக்கோணம் உள்ள வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுத்து, அதை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் சாய்வுயரமும் அடிப்பக்கத்தின் ஆரமும் எவ்வளவு?

கூம்பின் சாய்வுயரம், வட்டத்தின் ஆரமான 12 சென்டிமீட்டர் அல்லவா. அடிப் பக்கத்தின் ஆரம்?

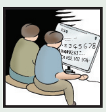
45° என்பது, 360° இன் $\frac{1}{8}$ பாகம் அல்லவா. வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், மையக்கோணத்திற்கு விகித சமத்திலாகும். அப்போது இந்த வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{8}$ பாகம் ஆகும். இந்த வில்லே கூம்பின் அடிப்பக்க வட்டம். அதாவது கூம்பின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு ஆகும். அதாவது, கூம்பின் அடிப்பக்க வட்டத்தின் சுற்றளவு, வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுத்த பெரிய வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் ஆகும். ஆரங்கள், சுற்றளவுகளுக்கு விகித சமம் ஆனதால், சிறிய வட்டத்தின் ஆரம், பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகமே ஆகும். அதாவது கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் $12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ சென்டிமீட்டர்.

மீண்டும் ஒரு வினா எழுப்பினால்?

> அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 5 சென்டி மீட்டரும், சாய்வுயரம் 15 சென்டி மீட்டரும், ஆகுமாறு ஒரு வட்டக்கூம்பை உருவாக்குவது எவ்வாறு?

வட்டக்கூம்பு உருவாக்குவதற்கு வட்டப்பகுதி தேவை. சாய்வுயரத்திற்கு 15 சென்டி மீட்டர் தேவை என்பதால், 15 சென்டி மீட்டர் ஆரம் உள்ள வட்டத்திலிருந்தே வட்டப்பகுதியை வெட்டியெடுக்க வேண்டும். அதன் மையக்கோணம் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

கூம்பின் அடிப்பக்கமான சிறிய வட்டத்தின் ஆரம், வட்டப்பகுதியை வெட்டி யெடுக்கின்ற பெரியவட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ பாகம் அல்லவா. (அது எவ்வாறு) அப்போது சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, பெரியவட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும். சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, வட்டப்பகுதியின் வில்லின் நீளம் அல்லவா. அப்போது வட்டப்பகுதியின் வில் அது வெட்டியெடுத்த வட்டத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும். ஆகவே, அதன் மையக்கோணம் $360 \times \frac{1}{3} = 120°$.



(1) ஆரம் 10 சென்டிமீட்டரும், மையக்கோணம் 60°உம் உள்ள வட்டப்பகுதியை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் அடிப்பக்கத் தின் ஆரமும் சாய்வுயரமும் எவ்வளவு?

(2) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 10 சென்டிமீட்டரும் சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் உடைய வட்டக்கூம்பு உருவாக்குவதற்குத் தேவையான வட்டப்பகுதியின் மையக்கோணம் என்ன?

(3) ஓர் அரைவட்டத்தை வளைத்து உருவாக்குகின்ற வட்டக்கூம்பின் ஆரத்துக்கும் சாய்வுயரத்துக்கும் இடையில் உள்ள விகிதம் என்ன?

வளைதளப் பரப்பளவு

உருளையில் உள்ளதைப் போன்று, வட்டக்கூம்பிற்கும் ஒரு வளைதளம் உள்ளது. அது சரிந்து உயர்கின்ற பாகம் ஆகும். வட்டக்கூம்பு வளைத்து உருவாக்குவதற்குப் பயன்படுத்திய வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவே இந்த வளைதளத்தின் பரப்பளவு (உருளையிலும், வளைத்து உருவாக்கப் பயன்படுத்திய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அல்லவா வளைதளப்பரப்பளவு)

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்

> ஆரம் 8 சென்டிமீட்டரும் சாய்வுயரம் 30 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பு வடிவில் ஒரு தொப்பி செய்வதற்கு எத்தனை சதுரசென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவைப்படும்?

இத்தகைய தொப்பியைச் செய்வதற்குத் தேவையான வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். சாய்வுயரம் 30 சென்டிமீட்டர் வேண்டும் என்பதால், இத்தகைய ஆரம் உள்ள வட்டத்திலிருந்தே வட்டப்பகுதி .வெட்டி எடுக்க வேண்டும்

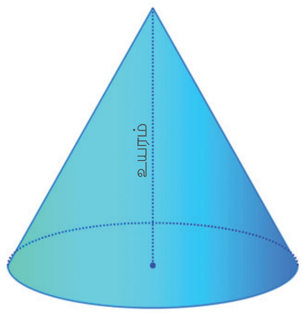
மேலும், கூம்பின் அடிப்பக்கமான சிறிய வட்டத்தின் ஆரம் 8 சென்டிமீட்டராக இருக்க வேண்டும். அதாவது வட்டப்பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படும் பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ பாகமாகும். அப்போது சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவும், பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இதே பாகம் ஆகும். சிறிய

வட்டத்தின் சுற்றளவே, வெட்டியெடுக்க வேண்டிய வட்டப் பகுதியின் வில்லின் நீளம் ஆகும். இவ்வாறு பார்க்கும் போது, வெட்டி யெடுக்க வேண்டிய வட்டப்பகுதி வட்டத்தின் $\frac{4}{15}$ பாகம் எனக் காணலாம். அதனால், அதன் பரப்பளவு, இந்த வட்டத்தின் இதே பாகம் ஆகும். அதாவது

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

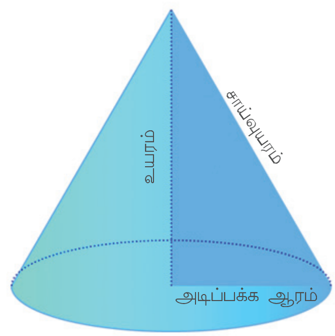
அப்போது தொப்பி செய்வதற்கு 240π சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை. (செயல் செய்து, இது ஏறக்குறைய 754 சதுர சென்டிமீட்டர் எனக் காணலாம்)

சதுரக்கூம்பைப்போன்று வட்டக் கூம்பிலும் உச்சியிலிருந்து அடிப் பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரமே உயரம். இது வட்டக் கூம்பில் அடிப்பக்கமான வட்டத்தின் மையத்திற்கும், உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தூரமாகும்.



சதுரக்கூம்பைப் போன்று வட்டக்கூம்பிலும், உயரம், சாய்வுயரம் என்பனவற்றின் இடையே ஒரு செங்கோண முக்கோணத் தொடர்பு உண்டு:

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர், உயரம் 10 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டக்கூம்பின் சாய்வுயரம் $\sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ சென்டிமீட்டர் ஆகும்.



வளைதளப்பரப்பளவு

ஒரு வட்டக்கூம்பின் வளைதளப்பரப்பளவு, அதை உருவாக்குவதற்குப் பயன்படுத்திய வட்டக்கூம்பின் பரப்பளவு அல்லவா. கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரம் r எனவும், சாய்வுயரம் l எனவும் எடுத்தால், வட்டப்பகுதியின் ஆரம் l எனவும், மையக்கோணம் $\frac{r}{l} \times 360^\circ$ எனக் கிடைக்கும். அப்பொழுதும் அதன் பரப்பளவு,

$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

எனக் கணக்கிடலாம். (ஒன்பதாம் வகுப்பில் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு கண்டு பிடித்ததை நினைவில் கொள்க) அதாவது, வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு என்பது அடிப்பக்கச்சுற்றளவு , சாய்வுயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதி ஆகும்.

(1) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டரும், சாய்வுயரம் 25 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(2) அடிப்பக்கத்தின் விட்டம் 30 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 40 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பின் மொத்தப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) வட்டக்கூம்பு வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பூவாணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் விட்டம் 10 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 12 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். 10000 பூவாணங்களின் வெளிப்பக்கம் முழுவதும் வண்ணக்காகிதம் ஒட்ட வேண்டும். வண்ணக் காகிதத்தின் ஒரு சதுரமீட்டருக்கு 2 ரூபாய் எனில் மொத்தம் எவ்வளவு செலவாகும்?

(4) ஓர் அரைவட்டத்தை வளைத்து உருவாக்கும் வட்டக்கூம்பின் வளைதளப் பரப்பளவு அதன் அடிப்பக்கப் பரப்பளவின் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

சதுரக் கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடிப்பதற்குச் செய்ததைப் போன்று ஒரு செய்முறைப் பயிற்சியை இங்கும் மேற்கொள்வோம் ஒரு வட்டக்கூம்பு உருவாக்கவும். இதே அடிப்பக்கமும் உயரமும் உள்ள ஓர் உருளையை உருவாக்கவும் கூம்பில் மணல் நிறைத்து உருளையில் போடவும். இங்கும் கூம்பின் கனஅளவு, உருளையின் கனஅளவில் மூன்றிலொரு பாகம் எனக் காணலாம். அதாவது,

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு என்பது அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கற் பலனின் மூன்றிலொன்றாகும்.

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

கூம்புகளின் கனஅளவு என்ற பகுதியில் செய்ததைப்போன்று ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் உள்ள ஒரு வட்டக் கூம்பும் ஓர் உருளையும் உருவாக் கவும். இவற்றின் கனஅளவுகளை ஒப்பிடுக.

(இதன் கணிதம் சார்ந்த விளக்கம், பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது).

எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 4 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 6 சென்டிமீட்டரும் உள்ள வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$

கனசென்டிமீட்டர்

(1) உருளை வடிவில் உள்ள ஒரு மரக்கட்டையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 15 சென்டிமீட்டர், உயரம் 40 சென்டிமீட்டர். இதிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு எவ்வளவு?

(2) அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 20 சென்டிமீட்டரும் உள்ள கட்டியான உருளையை உருக்கி, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 4 சென்டிமீட்டரும் உயரம் 5 சென்டிமீட்டரும் உடைய எத்தனை வட்டக்கூம்புகள் உருவாக்கலாம்?

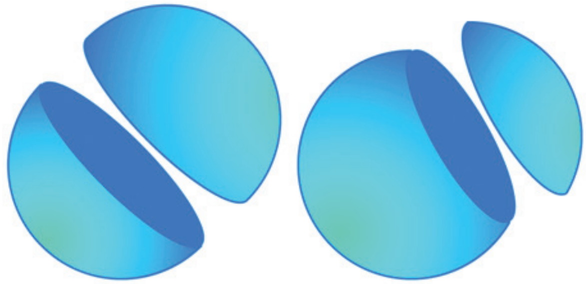
(3) 216° மையக்கோணமும் 25 சென்டிமீட்டர் ஆரமும் உள்ள ஒரு வட்டப்பகுதியை வளைத்து, வட்டக்கூம்பு உருவாக்கினால், அதன் ஆரமும் உயரமும் எவ்வளவாக இருக்கும்? கனஅளவு?

(4) இரு வட்டக்கூம்புகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 3 : 5, உயரங்களின் விகிதம் 2 : 3, இவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதம் எவ்வளவு?

(5) ஒரேகன அளவு உள்ள இரு வட்டக்கூம்புகளின் ஆரங்கள் 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் ஆகும். அவற்றின் உயரங்களின் விகிதத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

கோளம்

பந்து விளையாட்டின் ஈர்ப்பு, இனிப்பான லட்டு ஆகியவற்றின் வழியாகக் கோளங்களை அனுபவித்து உள்ளோம். இனி கோளத்தின் கணிதம் பற்றிப் பார்க்கலாம். (ஆங்கிலத்தில் கோளத்தை sphere என்று கூறுவர்)



உருளையையோ வட்டக்கூம்பையோ அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வெட்டினால் வட்டம் கிடைக்கும். கோளத்தை எவ்வாறு வெட்டினாலும் வட்டம் கிடைக்கும்:

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து அதில் உள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் சமம் அல்லவா. கோளத்திற்கும் இது போன்ற மையம் உள்ளது. அதிலிருந்து கோளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் உள்ள தூரம் சமமாகும். இந்தத் தூரத்தை கோளத்தின் ஆரம் என்று கூறுவர். ஆரத்தின் இருமடங்கு விட்டம் ஆகும்.

ஒரு கோளத்தை இரு சமபகுதிகளாக வெட்டினால் கிடைக்கும் வட்டத்தின் மையம், ஆரம் விட்டம் இவை எல்லாம் கோளத்தின் மையமும், ஆரமும், விட்டமும் ஆகும்.

இதுவரை கண்ட வடிவங்களில் செய்ததைப்போன்று கோளத்தை வெட்டி நிமிர்த்தி மேற்பரப்பளவு கண்டுபிடிக்க இயலாது. சிறிய சுருக்கோ, இழுத்து நீட்டலோ இல்லாமல், கோளத்தை வெட்டி நிரப்பாக வைக்க இயலாது என்பதே காரணம்.

ஆகையால், ஒரு கோளத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால், மேற்பரப்பளவு $4\pi r^2$ ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தலாம். (விளக்கம் பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.)

வேறொரு முறையில் கூறினால்,

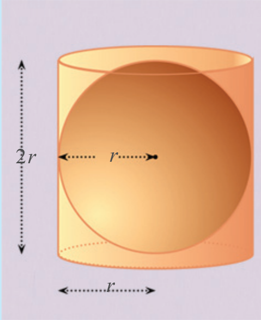
கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு அதன் ஆரத்தின் வர்க்கத்தை 4π ஆல் பெருக்கியதாகும்.

மேலும், ஆரம் r ஆன கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{4}{3}\pi r^3$ என்று விளக்கப்பட்டுள்ளது. (இதன் விளக்கமும் பாடத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.)

கோளமும் உருளையும்

ஒரு கோளத்தை மிகச்சரியாக உட்கொள்ளும் உருளையின் ஆரம் கோளத்தின் ஆரம் ஆகும். உயரம் இந்த ஆரத்தின் இரு மடங்கு அல்லவா:

அதாவது, கோளத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால், உருளையின் ஆரம் r, உயரம் $2r$. அப்போது உருளையின் மொத்தப் பரப்பளவு



$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு $4\pi r^2$. இந்த இரு பரப்பளவுகளின் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 2

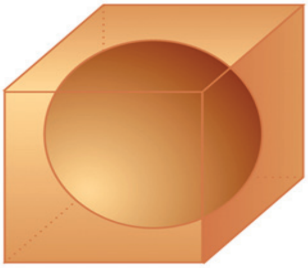
மேலும் உருளையின் கனஅளவு

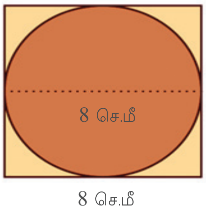
$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \text{ உம்}$$

கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{4}{3}\pi r^3$ உம் ஆனதால், கனஅளவுகளின் இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 2 ஆகும்.

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

எல்லா விளிம்புகளின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒரு சதுரக் கட்டையிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கப்படும் மிகப்பெரிய கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு?



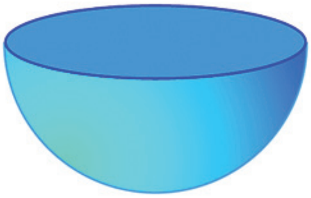


கோளத்தின் விட்டம், சதுரக் கட்டையின் விளிம்பின் நீளம் ஆகும் என்று படத்திலிருந்து காணலாம் அல்லவா. அப்போது கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு

$4\pi \times 4^2 = 64\pi$ சதுரசென்டிமீட்டர்

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

12 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள கட்டியான ஒரு கோளத்தை இரு சமப்பாகங்களாக வெட்டினால் கிடைக்கும் ஓர் அரைக்கோளத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு?



கோளத்தின் மேற்பரப்பளவின் பாதியும் ஒரு வட்டமும் சேர்ந்தது அல்லவா அரைக்கோளம்.

கோளத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், அதன் மேற்பரப்பளவு

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

இதன் பாதியும் வட்டத்தின் பரப்பளவும் சேர்ந்ததே அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு. வட்டத்தின் ஆரம் 12 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், அதன் பரப்பளவு

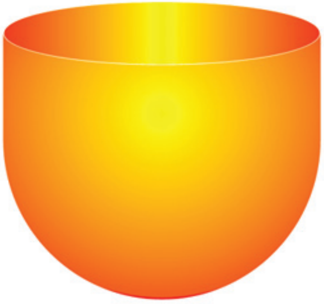
$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

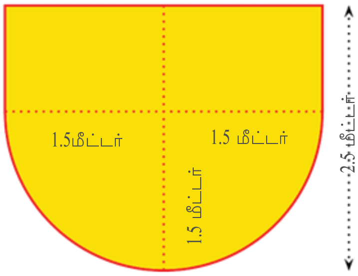
அப்போது அரைக்கோளத்தின் மொத்த மேற்பரப்பளவு

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

மேலும் ஓர் எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கலாம்:

உருளையின் அடிப்பக்கத்தில் அரைக்கோளம் இணைத்த வடிவில் உள்ள ஒரு தண்ணீர்த் தொட்டியின் உயரம் 2.5 மீட்டர், அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 1.5 மீட்டர் ஆகும். இதில் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் நிறைக்கலாம்?





தண்ணீர்த்தொட்டியின் அரைவட்டப் பாகத்தின் கனஅளவு

$$\frac{2}{3}\pi \times (1.5)^3 = 2.25\pi \text{ கனமீட்டர்}$$

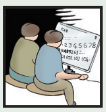
உருளைப்பாகத்தின் கனஅளவு

$$\pi \times (1.5)^2 (2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ கனமீட்டர்}$$

அப்போது தொட்டியின் மொத்தக் கனஅளவு

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ கனமீட்டர்}$$

ஒரு கனமீட்டர் என்பது, 1000 லிட்டர். அதனால் தண்ணீர்த்தொட்டியில் தோராயமாக 14130 லிட்டர் தண்ணீர் நிறைக்கலாம்



(1) கட்டியான ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு 120 சதுரசென்டிமீட்டர் ஆகும். அதை வெட்டி இரு அரைக்கோளங்கள் ஆக்கினால் ஒவ்வொன்றின் மொத்த மேற்பரப்பளவு எவ்வளவு?

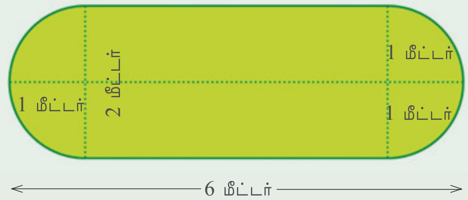
(2) இரு கோளங்களின் கனஅளவுகளின் விகிதம் 27 : 64 ஆகும். அவற்றின் ஆரங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் எவ்வளவு? பரப்பளவுகளின் விகிதமோ?

(3) உலோகத்தால் உருவாக்கிய ஓர் உருளையின் நீளம் 10 சென்டிமீட்டரும், ஆரம் 4 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இதை உருக்கி 2 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள எத்தனை கோளங்களை உருவாக்கலாம்?

(4) 12 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள ஓர் உலோகக்கோளத்தை உருக்கி சமஅளவு உள்ள கட்டியான 27 சிறிய கோளங்கள் உருவாக்கப்பட்டன. சிறிய கோளங்களின் ஆரம் என்னவாக இருக்கும்?

(5) 10 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள கட்டியான ஒரு கோளத்திலிருந்து 16 சென்டிமீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு வட்டக்கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டது. கூம்பின் கனஅளவு கோளத்தின் கனஅளவின் எத்தனை பாகமாகும்?

(6) பெட்ரோல் டாங்கின் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:



இதில் எத்தனை லிட்டர் பெட்ரோல் நிரப்ப முடியும்?

(7) கட்டியான ஒரு கோளம், இரு அரைவட்டங்களாக வெட்டப்பட்டுள்ளன; ஒன்றிலிருந்து மிகப்பெரிய சதுரக்கூம்பும், மற்றொன்றிலிருந்து மிகப்பெரிய வட்டக்கூம்பும் செதுக்கி எடுக்கப்படுகின்றன. இவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதம் எவ்வளவு?

கட்டியான ஓர் அரைவட்டத்திலிருந்து செதுக்கி எடுக்கப்படும் மிகப் பெரிய சதுரக்கூம்பின் பக்கமுகங்களின் சிறப்புத்தன்மை என்ன?

மீள்பார்வை

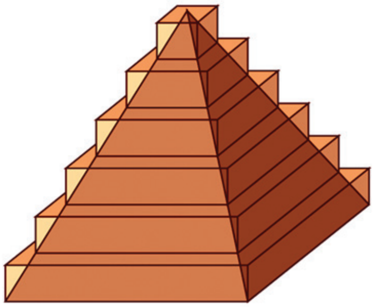
கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ சதுரக்கூம்பின் அடிப்பக்க விளிம்பு, சாய்வுயரம் , பக்கவிளிம்பு, உயரம், அடிப்பக்க மூலைவிட்டம் என்பனவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்க இயலுதல். ⌘ பொருத்தமான அளவுகளில் சதுரமும், இரு சமபக்க முக்கோணங்களும் வெட்டியெடுத்து சதுரக்கூம்பு உருவாக்குதல். ⌘ தரப்பட்டுள்ள அளவுகளைப் பயன்படுத்திச் சதுரக்கூம்பின் பரப்பளவையும் கனஅளவையும் கணக்கிடுதல் ⌘ குறிப்பிட்ட அளவுகள் உள்ள வட்டக்கூம்பு உருவாக்குவதற்குத் தேவையான வட்டப் பகுதி களின் அளவுகளை உறுதிப்படுத்துதல். ⌘ வட்டக்கூம்பின் அடிப்பக்க விட்டம், உயரம், சாய்வுயரம் என்பனவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடித்து நிறுவுதல். ⌘ வட்டக் கூம்பின் மொத்தப் பரப்பளவும் கனஅளவும் கணக்கிடும் வழிமுறையை விளக்குதல். ⌘ கோளம், அரைக்கோளம் என்பனவற்றின் மொத்தப் பரப்பளவு, கனஅளவு என்பனவற்றைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.			

பின்னிணைப்பு

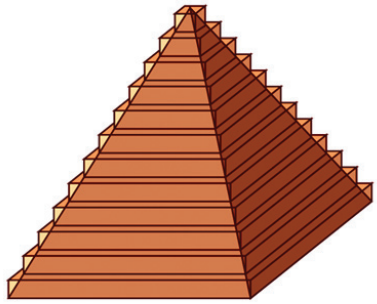
கூம்பின் கனஅளவு, கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு, கனஅளவு என்பனவும் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய செயல்பாடுகள் மட்டும் அல்லவா பார்த்தோம். இவை எவ்வாறு கிடைத்தன என்று அறிய ஆர்வமுள்ளவர்களுக்காக அவற்றின் விளக்கம் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

சதுரக் கூம்பின் கனஅளவு

ஏறக்குறைய ஒரு சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தில் சில சதுரப்பலகைகளை அடுக்கி வைத்ததாக நினைத்துக்கொள்வோம்.



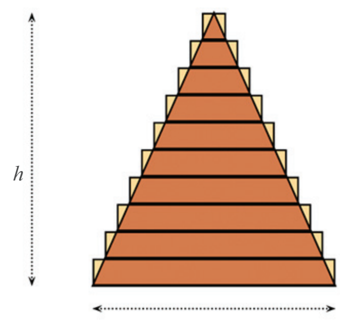
பலகைகளின் தடிமன் குறையும்போது அவற்றின் எண்ணிக்கை கூடுவதைப் பொறுத்து அவற்றின் அடுக்கு கூடுதல் கூம்பு வடிவில் ஆகிறது..



அப்போது இந்தப் பலகைகளின் கனஅளவுகளின் தொகை, கூம்பின் கனஅளவுடன் நெருங்கி வரும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 10 பலகைகள் பயன்படுத்தியதாகக் கருதவும், ஒவ்வொரு பலகையும் ஒரு சதுரப் பட்டகம் அல்லவா. இவற்றின் உயரங்களைச் சமமாக எடுக்கலாம். அப்போது கூம்பின் உயரம் h என எடுத்தால், ஒரு பலகையின் உயரம் $\frac{1}{10}h$. இனி ஒவ்வொரு பலகையின் அடிப்பக்கத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

கூம்பையும் அதைச் சுற்றியுள்ள பலகைகளின் அடுக்கையும் உச்சியின் வழியே செங்குத்தாக வெட்டினால் இத்தகைய வடிவம் கிடைக்கும்:



மேலிருந்து தொடங்கி, இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள் பெரியதாகி வருகின்றன அல்லவா. இவற்றின் உயரம் அதிகரிப்பது, ஒவ்வொரு பலகையிலும் $\frac{1}{10}h$ என்ற

அளவில் ஆகும். இவையெல்லாம் வடிவொத்தவைகள் ஆனதால் (எதனால்?) அடிப்பக்கங்களும் இந்த அளவில் அதிகரிக்கும். அதாவது கூம்பின் அடிப்பக்கத்தை b என எடுத்தால், மேலிருந்துள்ள முக்கோணங்களின் அடிப்பக்கம் $\frac{1}{10}b,\ \frac{2}{10}b,\ ....,\ b$ என்பதாகும்.

அப்போது இந்தப் பலகைகளின் கனஅளவு

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2\times\frac{1}{10}h,\left(\frac{2}{10}b\right)^2\times\frac{1}{10}h,...b^2\times\frac{1}{10}h$$

என்பதாகும். அவற்றின் தொகையோ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2}+\frac{2^2}{10^2}+...+\frac{9^2}{10^2}+\frac{10^2}{10^2}\right)=\frac{1}{1000}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

இத்தகைய தொகைகள் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறை, **கூட்டுத் தொடர்கள்** என்ற பாடத்தில் **வர்க்கங்களின் தொகைகள்** என்ற பாகத்தில் கூறப் பட்டுள்ளது.

$$1^2+2^2+3^2+...+10^2=\frac{1}{6}\times 10\times(10+1)\times(2\times 10+1)$$

அப்போது கனஅளவுகளின் தொகை

$$\frac{1}{1000}b^2h\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{10}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{21}{10}=\frac{1}{6}b^2h\times1.1\times2.1$$

இனி இதைப்போன்று 100 பலகைகள் உள்ளன என நினைத்துப் பார்க்கவும். (அது எதுவாயினும் வரைய இயலாது)

பலகைகளின் தடிமன் $\frac{1}{100}h$ ஆகும். அடிப்பக்கங்களின் விளிம்புகள் முறையே $\frac{1}{100}b,\frac{2}{100}b,\frac{3}{100}b,...,b$ என இவ்வாறாகும். கனஅளவுகளின் தொகை

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+100^2\right)=\frac{1}{100^3}b^2h\times\frac{1}{6}\times100\times101\times201$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{100}{100}\times\frac{101}{100}\times\frac{210}{100}$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times1.01\times2.01$$

பலகைகளின் எண்ணிக்கையை 1000 எனக்கொண்டால்? கணக்கீடு செய்யாமல் கனஅளவுகளின் தொகை

$$\frac{1}{6}b^2h\times1.001\times2.001$$

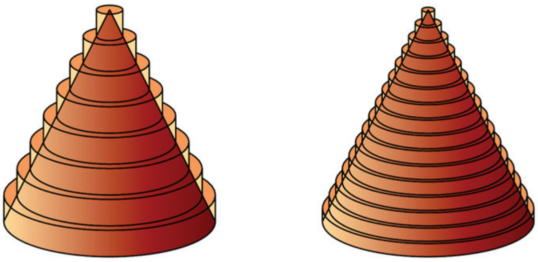
எனக் காணலாம் அல்லவா. இந்தத் தொகைகள் எந்த எண்ணுடன் நெருங்கி வருகின்றன?

இதுவே கூம்பின் கனஅளவு. அதாவது,

$$\frac{1}{6}b^2h\times1\times2=\frac{1}{3}b^2h$$

வட்டக்கூம்பின் கனஅளவு

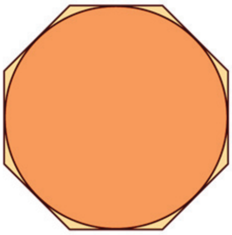
சதுரப் பலகைகளை அடுக்கி, ஏறக்குறைய சதுரக்கூம்பின் வடிவத்தை உருவாக்கியது போன்று, வட்டப்பலகைகளை அடுக்கி ஏறக்குறைய வட்டக் கூம்பின் வடிவத்தை உருவாக்கலாம்.:



இதைப் பயன்படுத்தி வட்டக்கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடிக்கலாம். (முயற்சித்துப் பார்க்கவும்)

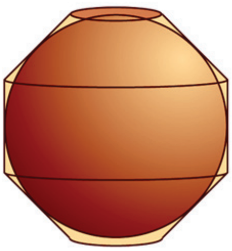
கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு

இதற்கு முதலில் கோளத்தின் நடுப்பாகம் வழியாக ஒரு வட்டத்தையும் பக்கங்களெல்லாம் அதை தொடும் ஓர் ஒழுங்கு பலகோணத்தையும் கற்பனை செய்யவும்.



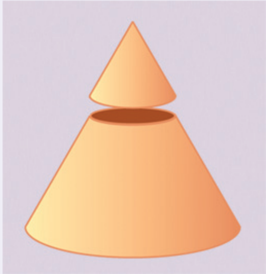
இனி இந்த வடிவம் சுழன்றால் உள்ளே ஒரு கோளமும் வெளியே வேறு ஒரு வடிவமும் கிடைக்கும்;

இந்தப் படத்தில் வெளியே உள்ள வடிவத்தை இரு கூம்பின் அடிக்கண்டங்கள் ஆகவும் (அடுத்தப் பக்கம் பார்க்கவும்) ஓர் உருளை ஆகவும் பிரிக்கலாம்:



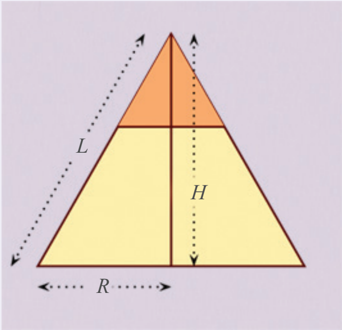
சிறியதும் பெரியதும்

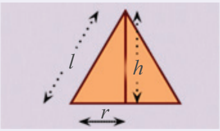
ஒரு வட்டக்கூம்பின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வெட்டினால் மேலே ஒரு சிறிய வட்டக்கூம்பு கிடைக்கும்.



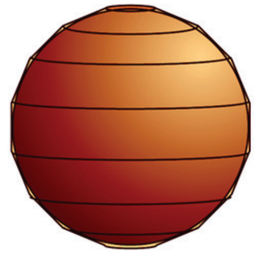
சிறிய கூம்பின் அளவுகளுக்கும் பெரிய கூம்பின் அளவுகளுக்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா? அடிப்பக்கத்தின் ஆரம், உயரம், சாய்வுயரம் என்பன பெரிய கூம்பில் R, H, L என்றும், சிறிய கூம்பில் r, h, l என்றும் எடுத்தால், படத்திலிருந்து,

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$



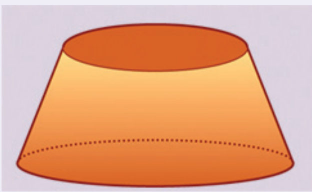


பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப் பதற்கு ஏற்ப வெளியே உள்ள வடிவம் கோளத்துடன் கூடுதலாக நெருங்குகிறது:

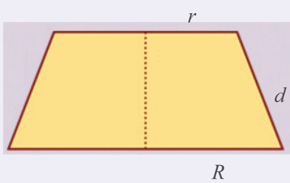


அடிக்கண்டம்

ஒரு வட்டக்கூம்பின் மேலிருந்து ஒரு சிறு உருளையை வெட்டியெடுத்தால் கீழே மீதியாக வரும் பகுதிக்கு அடிக் கண்டம் என்பதே பெயராகும் (frustum of a cone).



ஓர் அடிக்கண்டத்தின் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள வட்டங்களின் ஆரமும் சாய்வுயரமும் தெரியுமெனில் பக்கமுகப் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?



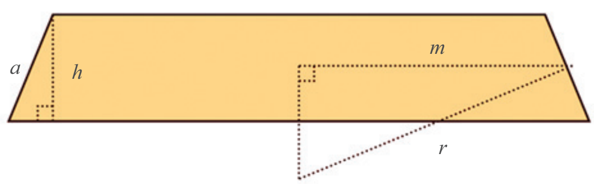
பெரிய கூம்பிலும் சிறிய கூம்பிலும் உள்ள சாய்வுய ரங்கள் L, l என எடுத்தால் படத்தில் $d = L - l$. அப்போது அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு,

$$\begin{aligned}\pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl)\\ &= \pi\big(R(l+d) - rl\big)\\ &= \pi(Rl + Rd - rl)\end{aligned}$$

இதில் முன்னர் கண்டதற்கு ஏற்ப, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ஆனதால், $Rl = rL$ எனக் கிடைக்கும். அப்போது அடிக்கண்டத் தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு

$$\begin{aligned}\pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L-l) + Rd\big)\\ &= \pi(rd + Rd)\\ &= \pi(r+R)d\end{aligned}$$

இந்தக் கூம்பின் அடிக்கண்டங்களின் பக்கமுகப் பரப்பளவு கண்டுபிடிப்பதற்கு அவற்றில் ஒன்றை எடுத்துப் பார்க்கலாம். இதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரம் m என்றும், உயரம் h என்றும் எடுக்கலாம். வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், அதனைச் சுற்றியுள்ள பலகோணத்தின் ஒரு பக்கம் a என்றும் எடுத்தால் கீழே காணப்படும் படம் கிடைக்கும்.



இதில் இரு செங்கோணங்களும் வடிவொத்தவை. ஆதலால்,

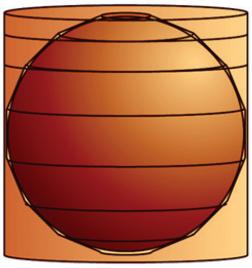
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

அதாவது,

$$am = rh$$

இது சுழன்று உருவாகின்ற அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவு $2\pi ma$ ஆகும் என **அடிக் கண்டமும் பட்டகமும்** என்ற பாகத்தில் பார்த்தோம் அல்லவா, மேலே உள்ள சமன்பாட்டின்படி, இது $2\pi rh$க்குச் சமமாகும். அதாவது, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் r உம், உயரம் h உம் உடைய உருளையின் வளைதளப் பரப்பளவாகும்.

அப்போது என்ன கிடைத்தது? மேலே பார்த்த கோளத்தின் ஏறக்குறைய வடிவத்தில் ஒவ்வொரு அடிக்கண்டத்தின் வளைதளப்பரப்பளவு, அதே உயரமும் கோளத்தின் ஆரமும் ஆன உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவாகும்.



அப்போது ஏறக்குறைய இதன் வடிவத்தின் மொத்த பக்கமுகப் பரப்பளவு இந்த உருளையின் மொத்த வளைதளப் பரப்பளவு அல்லவா. இந்த உருளைகளைச் சேர்த்து வைத்தால் கிடைப்பது? பெரிய ஓர் உருளை ஆகும்:

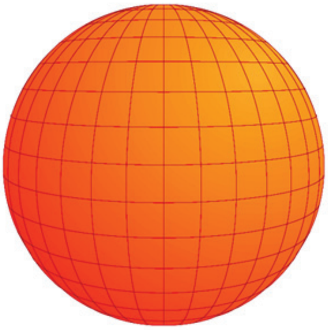
வட்டத்தை முழுமையாகப் பொதிந்துள்ள ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுவதற்கு ஏற்ப அது வட்டத்துடன் நெருங்குகிறது. கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவம் கோள வடிவத்தில் ஆகும். இப்போது நாம் பார்த்ததற்கு ஏற்ப பக்கங்கள் எத்தனை அதிகரித்தாலும் இந்த வடிவத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு, கோளத்தைப் பொதிந்த உருளையின் வளைதளப் பரப்பளவு ஆகும். அப்போது கோளத்தின் மேற்பரப்பளவும், அதனைப் பொதிகின்ற உருளையின் பக்கமுகப் பரப்பளவே. உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் r உம், உயரம் $2r$ உம் எனக் கொண்டால், அதன் வளைதளப்பரப்பளவு

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

இதுவே கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு

கோளத்தின் கனஅளவு

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

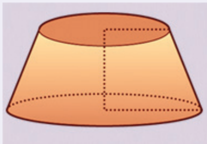


நெடுக்காகவும் குறுக்காகவும் வட்டங்கள் வரைந்து கோளம் சிறிய கட்டங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய ஒரு கட்டத்தின் உச்சிகளைக் கோள மையத்துடன் இணைத்தால், சதுரக் கூம்பு போன்ற ஒரு வடிவம் கிடைக்கும்:

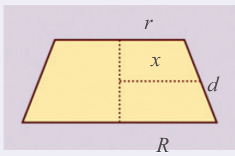
இத்தகைய வடிவங்கள் சேர்ந்ததே கோளம். அதனால் கோளத்தின் கனஅளவு இந்த வடிவங்களின் கனஅளவுகளின் தொகை ஆகும். இனி கோளத்தின் கட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் கோளத்தைத் தொடுகின்ற சிறிய சதுரங்களாக ஆக்கினால், கோளத்தைப் பொதிந்த ஒரு வடிவம் கிடைக்கும். அது சரியான சதுரக்கூம்புகளை இணைத்தது ஆகும். இந்தக் கூம்புகளின் உயரம் கோளத்தின் ஆரம் ஆகும். இதனை r என்றும், ஒரு கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு a என்றும் எடுத்தால், அதன் கனஅளவு $\frac{1}{3}ar$ எனக்கிடைக்கும். கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவத்தின் கனஅளவு, இந்தக் கூம்புகளின் கனஅளவுகளின்

அடிக்கண்டமும் உருளையும்

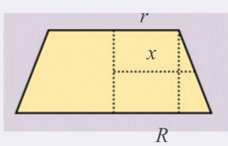
படத்தில் வட்டக்கூம்பின் அடிக்கண்டத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு $\pi(r + R)d$ எனக் கண்டோம் அல்லவா.



இதன் நடுவிலுள்ள வட்டத்தின் ஆரம் x என எடுத்தால், இத்தகைய ஒரு படம் கிடைக்கும்?



இவ்வாறு மேலும் ஒரு கோடு வரைந்தாலோ?



வலப்பக்கம் உள்ள இரு வடிவொத்த செங்கோண முக்கோணங்களிலிருந்து,

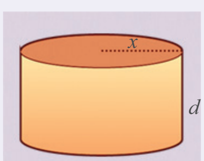
$$\frac{x-r}{R-r} = \frac{1}{2}$$

என்று காணலாம். இதனை எளிதாக்கினால்,

$$x = \frac{1}{2}(R+r)$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது அடிக்கண்டத்தின் பக்கமுப்பரப்பளவு, $2\pi xd$.

இது, அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் x உம், உயரம் d உம் உடைய உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவு அல்லவா.



தொகை அல்லவா. கூம்புகளின் அடிப்பக்கங்கள் சேர்ந்தால், இந்த வடிவத்தின் மேற்பரப்பளவு. அப்போது இந்த வடிவத்தின் கூம்புகளின் அடிப்பக் கப் பரப்பளவுகளின் தொகை ஆகும். அப்போது s என எடுத்தால் வடிவத்தின் கனஅளவு $\frac{1}{3}sr$ எனக் கிடைக்கும்.

கோளத்தின் கட்டங்கள் சிறியதாக மாறும்போது அவற்றின் எண்ணிக்கை கூடுகிறது. மேலும் கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவம் கோளத்துடன் நெருங்குகிறது; s என்பது கோளத்தின் மேற் பரப்பளவினோடும் நெருங்கும், அது $4\pi r^2$ ஆகும் எனப் பார்த்தோம் அல்லவா? அப்போது கோளத்தைப் பொதிந்துள்ள வடிவத்தின் கனஅளவு

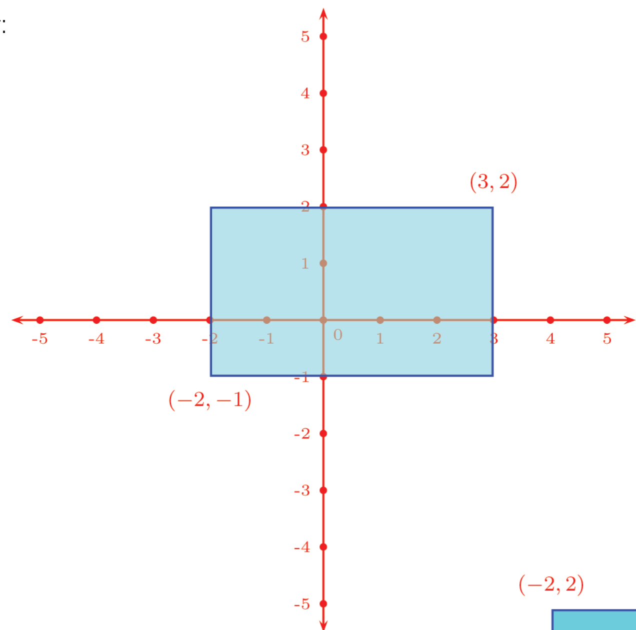
$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

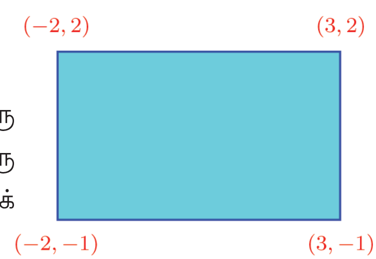
என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி வருகிறது. இதுவே கோளத்தின் கனஅளவு.

9 வடிவியலும் இயற்கணிதமும்

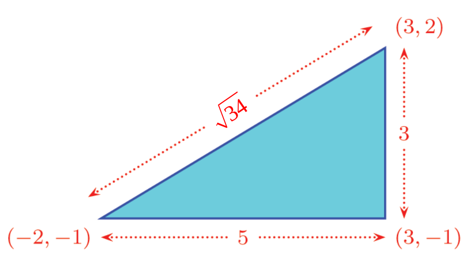
முக்கோணக் கணக்குகள்

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும்கோடு ஏதேனும் அச்சுக்கு இணையாக இல்லாமலிருந்தால் அவற்றை எதிர் உச்சிகளாகவும், பக்கங்களை அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் கொண்டு ஒரு செவ்வகம் வரையலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா:



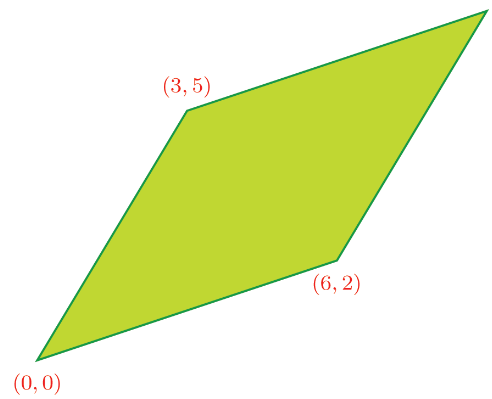


மட்டுமல்ல, அச்சுகளைப் பார்க்காமல், முதலாவது இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களிலிருந்து செவ்வகத்தின் பிற இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடலாம் எனக் கண்டோம்:



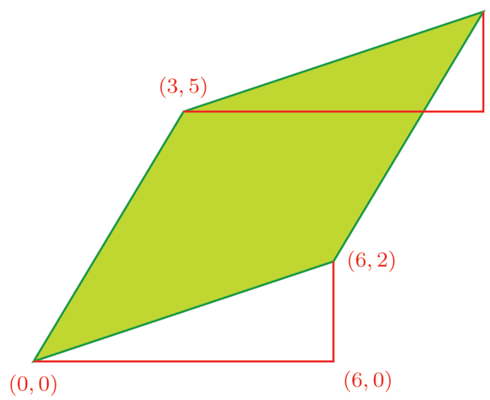
இத்தகைய ஒரு செவ்வகம் பயன்படுத்தி இரு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களிலிருந்து அவற்றின் இடையே உள்ள தூரம் கணக்கிடப்பட்டது. சரியாகக் கூறினால், இந்தக் கணக்கீட்டில் செவ்வகம் முழுவதும் பயன்படுத்தப்படவில்லை; அதில் பாதியான செங்கோண முக்கோணம் மட்டுமே பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.

இவ்வாறு செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைந்துள்ள கணக்கீடுகளைப் பல சூழல்களிலும் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஆதிப்புள்ளியையும் பிற இரு புள்ளிகளையும் உச்சிகளாகக் கொண்டு வரைந்த இந்த இணைகரத்தைக் காணவும்:



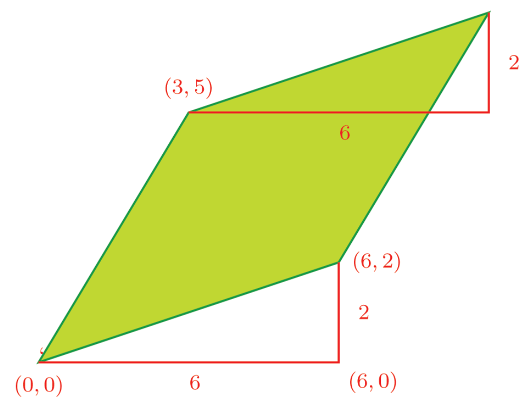
இதன் நான்காவது உச்சியைக் காண வேண்டும்.

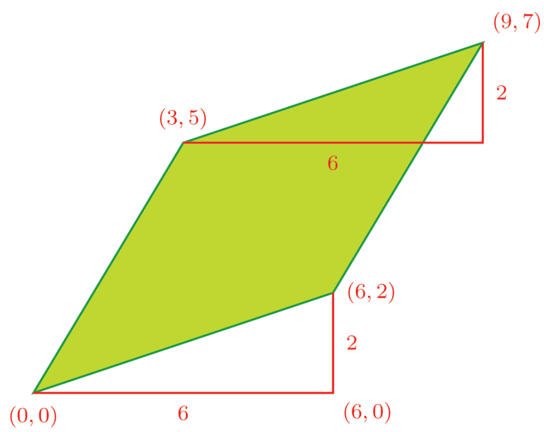
அதன் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்களைக் கர்ணங்களாகவும்; அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகளைச் செங்குத்துப் பக்கங்களாகவும் கொண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையலாம்:



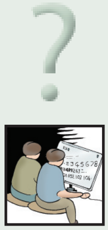
இந்த இரு முக்கோணங்களின் கர்ணங்களும், அதிலுள்ள இரு கோணங்களும் சமமாகும். (காரணம்?) அதனால் அவற்றின் செங்குத்துப் பக்கங்களும் சமமாகும்.

கீழே உள்ள முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளங்களை எளிதில் கணக்கிடலாம். அதுவே மேலே உள்ள முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளங்களும் ஆகும்.

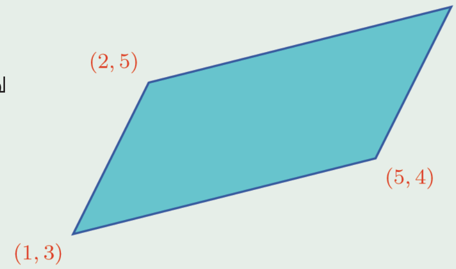




இனி மேலே உள்ள முக்கோணத்தின் கீழே உள்ள வலது உச்சி (9, 5) எனவும் தொடர்ந்து முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி (9, 7) எனவும் கணக்கிடலாம் அல்லவா. (எவ்வாறு?)

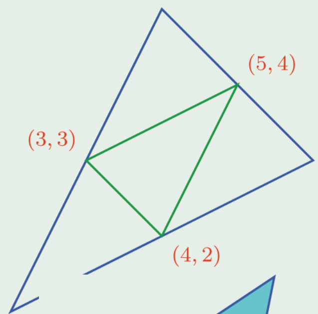


(1) படத்தில் இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

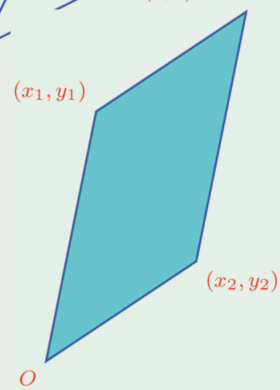


(2) படத்தில் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து அதன் உள்ளே சிறிய முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது:

பெரிய முக்கோணத்தின் அனைத்து உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களையும் கணக்கிடுக.



(3) (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் ஆதிப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோடுகள் அடுத்துள்ள பக்கங்களான இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

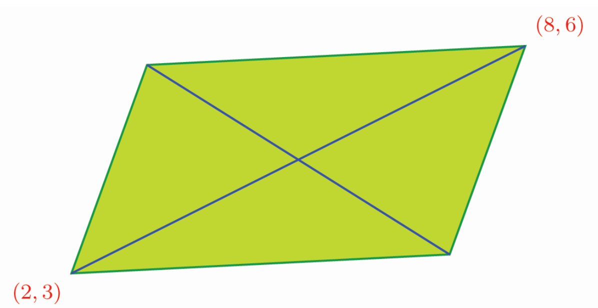


(4) எந்த இணைகரத்திலும் பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் தொகை, மூலைவிட்டங்களின் வர்க்கங்களின் தொகைக்குச் சமம் எனத் தெளிவு படுத்தவும்.

விகிதம்

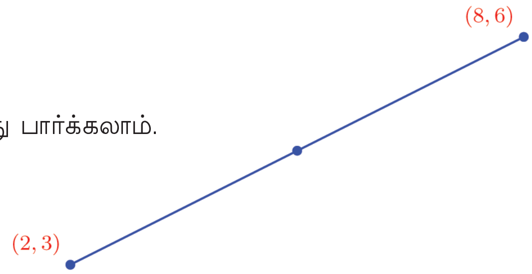
இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

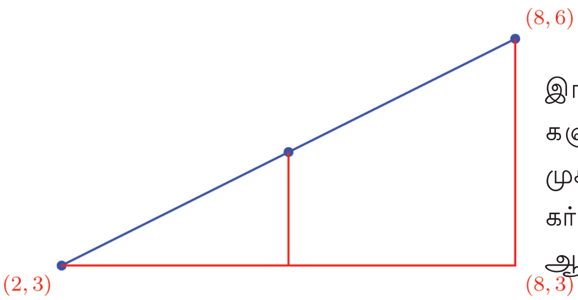
(2, 3), (8, 6), என்பன எதிர் உச்சிகள் ஆன ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.



இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இரு சமவெட்டிகள் அல்லவா. எனவே மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி அவற்றின் மையப்புள்ளி ஆகும்.

இனி மூலைவிட்டம் மட்டும் வரைந்து பார்க்கலாம்.



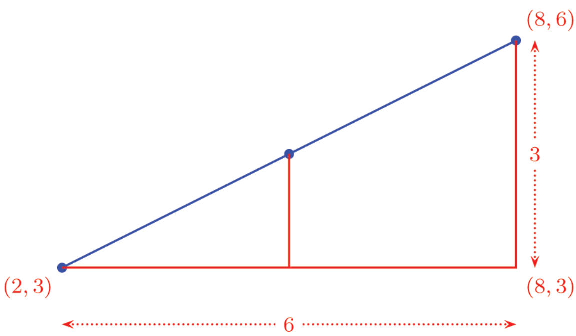


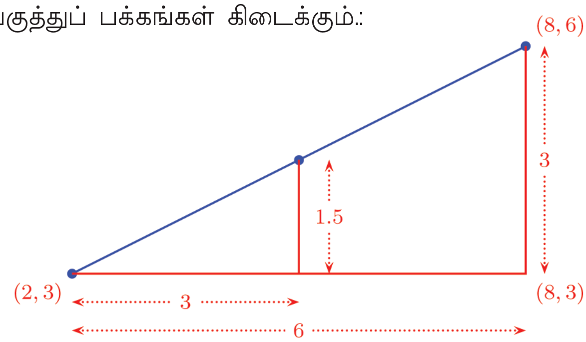
இங்கும் செங்குத்துப் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையானவாறு செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையலாம். முழுக்கோடும் கர்ணம் ஆன ஒன்றும், ஒரு பாதி கர்ணம் ஆன வேறொன்றும்:

இவற்றில் பெரிய முக்கோணத்திலும், அதன் உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்திலும் செங்குத்தாக உள்ள பக்கங்கள் இணையானவை. இதிலிருந்து இந்த முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் எனக் காணலாம். (எவ்வாறு?)

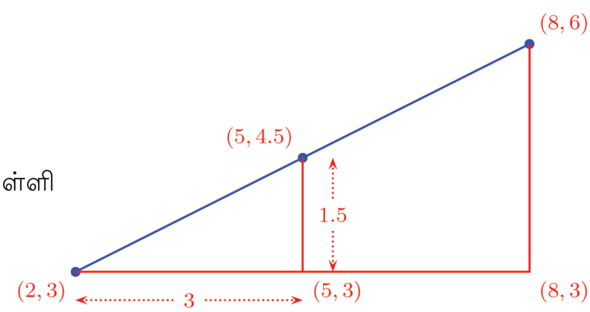
எனவே இம்முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதமும் சமம் ஆகும்.

சிறிய முக்கோணத்தின் கர்ணம் பெரியதன் கர்ணத்தின் பாதி ஆனதால், அதன் செங்குத்துப் பக்கங்களும் பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் பாதி ஆகும். பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்கள் தெரியும். அவ்வாறு சிறிய முக்கோணத்திலும் செங்குத்துப் பக்கங்கள் கிடைக்கும்.:



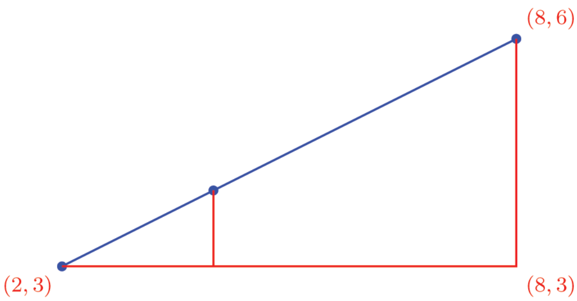


இனி நமக்குத் தேவையான மையப் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா:



இது போன்று இரு முனைகளில் உள்ள புள்ளிகள் (–3, 5), (7, 3) உள்ள கோட்டின் மையப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடித்துப் பார்க்கவும்.

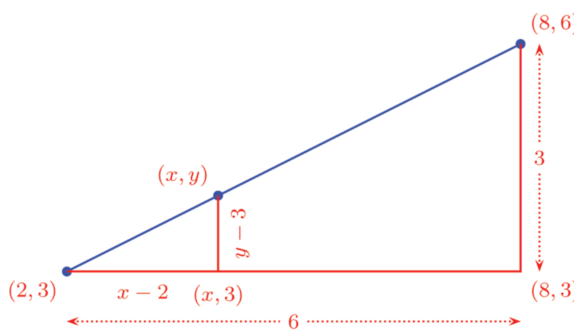
மையப்புள்ளிக்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியே அவசியமெனில்? எடுத்துக்காட்டாக, மேலே உள்ள மூலைவிட்டக் கணக்கில் கோட்டை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளியைக் காண இம்முறையைத் தேவையான மாற்றங்கள் செய்து பயன்படுத்தலாம்.



இங்குக் கோடுகளின் பாகங்களின் இடையில் உள்ள விகிதம் $1:2$ ஆனதால், சிறிய பகுதி மொத்தக் கோட்டின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும்.

அதாவது, சிறிய முக்கோணத்தின் கர்ணம் பெரிய முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகம் ஆகும். எனவே சிறிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களும் பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் $\frac{1}{3}$ பாகமே ஆகும். இனி மையப்புள்ளியைக் கண்டு பிடித்தது போன்றே இங்கும் தொடரலாம். சிறிது வித்தியாசமாக இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி இதனைச் செய்து பார்க்கலாம்.

கண்டுபிடிக்க வேண்டிய குறிகாட்டி எண்களை (x, y) என எடுத்துக் கொள்வோம், அப்போது முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் இவ்வாறாகும்:



முக்கோணங்களின் செங்குத்துப் பக்கங்களின் இடையே உள்ள தொடர்பை இவ்வாறு எழுதலாம்

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{1}{3}$$

இதிலிருந்து $\frac{x-2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{y-3}{3} = \frac{1}{3}$ எனவும் தொடர்ந்து

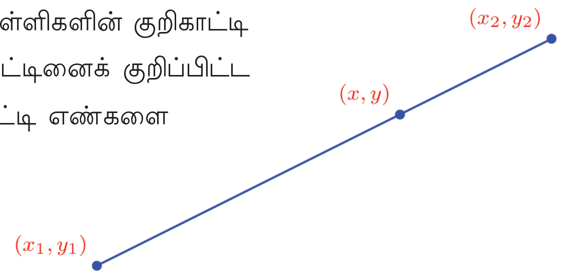
$$x = 6 \times \frac{1}{3} + 2 = 4$$

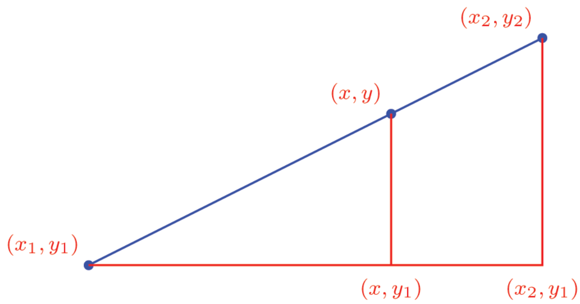
$$y = 3 \times \frac{1}{3} + 3 = 4$$

எனவும் கணக்கிடலாம். அதாவது கோட்டினை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் (4, 4).

படம் வரையாமலே இத்தகைய ஒரு கணக்கு செய்வதற்கு இக்கணக்குகள் செய்த முறையைப் பொதுவாகப் பார்க்கலாம்.

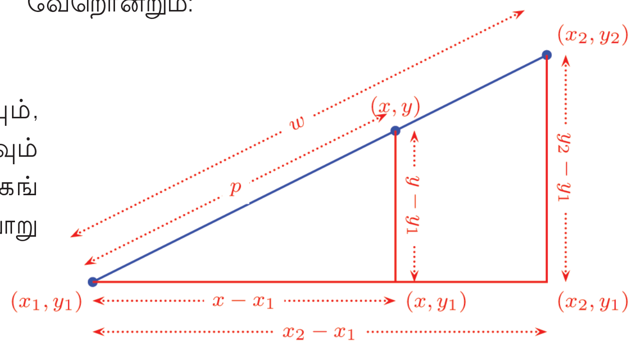
கோட்டின் இரு முனைகளிலும் உள்ள புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனவும் கோட்டினைக் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களை (x, y) எனவும் எடுக்கலாம்:





முன்னர் செய்ததைப் போன்று அச்சுகளுக்கு இணையான செங்குத்துப் பக்கங்கள் உள்ள இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையலாம். கோடு முழுவதும் கர்ணம் ஆன ஒன்றும், கோட்டின் ஒரு பாகம் கர்ணம் ஆன வேறொன்றும்:

சிறிய கர்ணத்தின் நீளம் p எனவும், பெரிய கர்ணத்தின் நீளம் w எனவும் எடுத்தால், முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் அனைத்தையும் இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தலாம்.



முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் இடையே உள்ள விகிதம் சமம் என்பதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{p}{w}$$

இதில் p, கோட்டின் ஒரு பாகத்தின் நீளமும், w முழுக்கோட்டின் நீளமும் ஆகும். பாகங்களின் இடையில் உள்ள விகிதம் தெரியுமெனில் பாகத்திற்கும், முழுவதற்கும் உள்ள விகிதத்தையும் கணக்கிடலாம். எனவே $\frac{p}{w}$ அறியலாம். மேலும் மேலே எழுதிய சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y என்பனவற்றைக் கணக்கிடலாம்:

$$x = x_1 + \frac{p}{w}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{p}{w}(y_2 - y_1)$$

எடுத்துக்காட்டாக, $(2, 4)$, $(8, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $3 : 5$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இப்புள்ளியை (x, y) என எடுத்துக்கொண்டால் கோட்டில் $(2, 4)$ முதல் (x, y) வரை உள்ள பாகம் முழுக்கோட்டின் $\frac{3}{8}$ பாகம் ஆகும். எனவே மேலே எழுதிய சமன்பாடுகளுக்கு ஏற்ப,

$$x = 2 + \frac{3}{8} \times (8 - 2) = 4\frac{1}{4}$$

$$y = 4 + \frac{3}{8} \times (7 - 4) = 5\frac{1}{8}$$

அதாவது நமக்குத் தேவையான புள்ளி $\left(4\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{8}\right)$

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு ஏதேனும் அச்சுக்கு இணையெனில் இதைப் போன்று முக்கோணங்கள் வரைய இயலாது. ஆனால், அத்தகைய சூழல்களில் குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

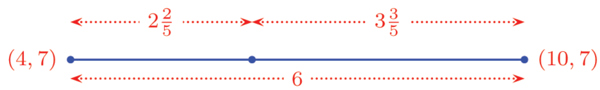
எடுத்துக்காட்டாக, $(4, 7)$, $(10, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு x அச்சுக்கு இணை ஆகும் (x அச்சிலிருந்துள்ள தூரம் 7) இக் கோட்டை $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

இக்கோட்டின் நீளம் $10 - 4 = 6$ அல்லவா. எனவே கோட்டின் $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் உள்ள பாகங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம்:

$$6 \times \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$6 \times \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$$

எனவே இந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் $\left(6\frac{2}{5}, 7\right)$ எனக் காணலாம்.



இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியைக் காண வேண்டிய பல சூழல்களும் உள்ளன. பொதுவாகக் கூறினால், (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளி எது?

மையப்புள்ளி ஆகும் போது கோட்டின் பாகங்கள் முழுக்கோட்டின் பாதி ஆகும்.

அதாவது, பொதுச் சமன்பாட்டில் $\frac{p}{w}$ என்பது, $\frac{1}{2}$ என எடுக்க வேண்டும்.

அதாவது,

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளி

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

(1) A, B என்ற புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் $(3, 2), (8, 7)$. AB என்ற கோட்டில்

i) $AP : PB = 2 : 3$ ஆகும். P என்ற புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்.

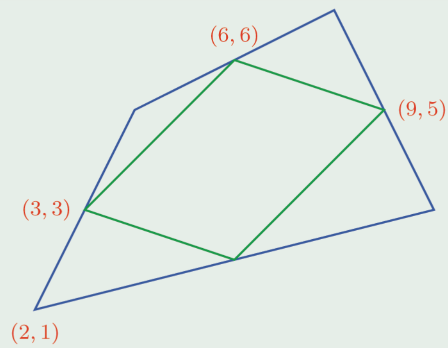
ii) $AQ : QB = 3 : 2$ ஆகும். Q என்ற புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(2) ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் முறையே $(2, 1), (5, 3), (8, 7), (4, 9)$ என்பவை ஆகும்.

i) எல்லாப் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கணக்கிடவும்.

ii) இந்த மையப்புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் நாற்கரம் இணைகரம் என நிறுவுக.

(3) படத்தில் பெரிய நாற்கரத்தின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து அதனுள் சிறிய நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது:



i) சிறிய நாற்கரத்தின் நான்காவது உச்சியின் குறிகாட்டி எண்களைக் காணவும்.

ii) பெரிய நாற்கரத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் காணவும்.

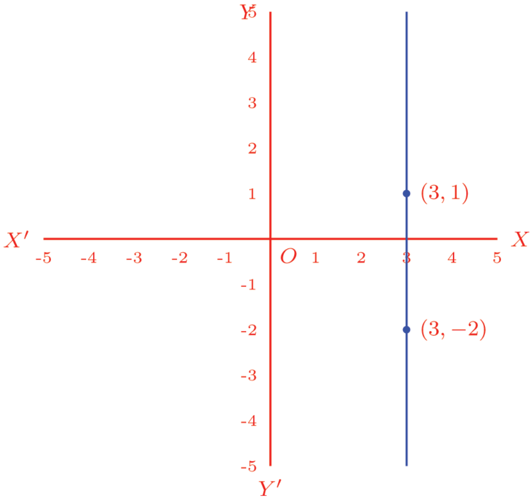
(4) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(3, 5)$, $(9, 13)$, $(10, 6)$ என்பவையாகும். இது இருசமப்பக்க முக்கோணம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும். அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

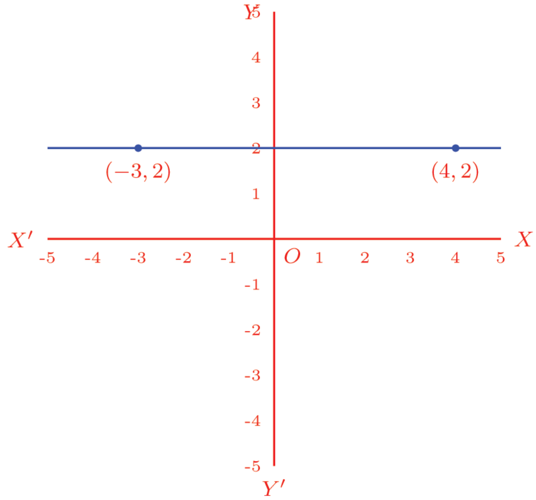
(5) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(-1, 5)$, $(3, 7)$, $(1, 1)$ என்பவை ஆகும். இம்முக்கோணத்தின் முக்கோண மையம் கண்டுபிடிக்கவும்.

(6) ஒரு வட்டதத்தின் மையம் (1, 2) உம், அதில் உள்ள ஒரு புள்ளி (3, 2) உம் ஆகும். இப்புள்ளி வழியாக உள்ள விட்டத்தின் மறுமுனையைக் காணவும்.

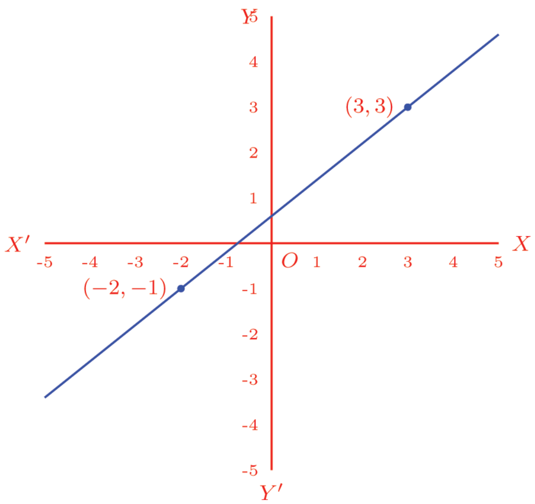
கோட்டுக் கணக்கு

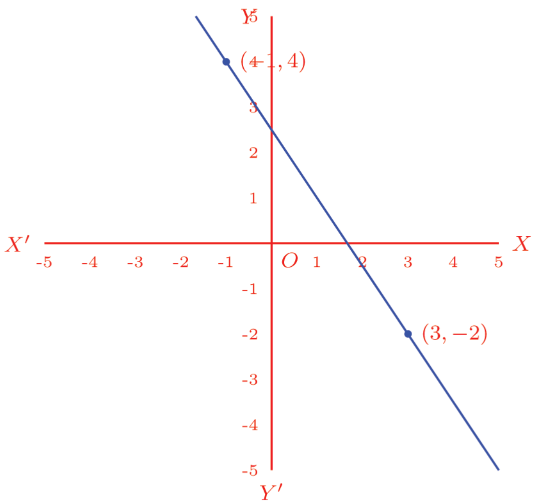
எந்த இரு புள்ளிகளையும் இணைத்து ஒரு கோடு (ஒரு கோடு மட்டும்) வரையலாம். அதனை இரு பக்கங்களிலும் எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் நீட்டலாம். புள்ளிகளின் x குறிகாட்டி எண் சமம் எனில், கோடு y அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்; y குறிகாட்டி எண் சமம் எனில், கோடு x அச்சுக்கு



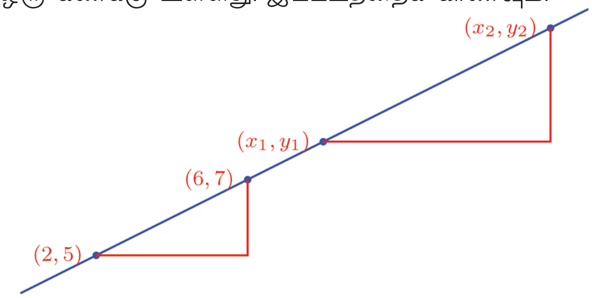


x குறிகாட்டி எண்களும் y குறிகாட்டி எண்களும் வெவ்வேறானவை எனில் கோடு எந்த ஓர் அச்சுக்கும் இணையாக இல்லாமல் சாய்வாக இருக்கும்:

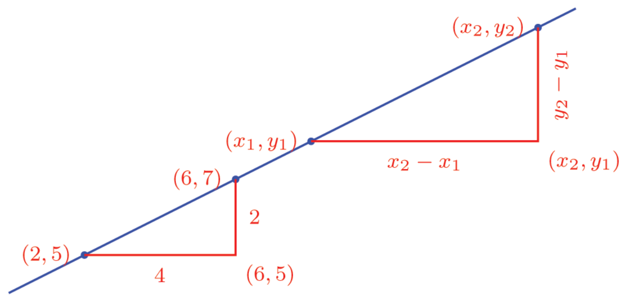




இத்தகைய ஒரு சாய்ந்தகோடு வழியாகச் செல்லும் போது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் x குறிகாட்டி எண்ணும் y குறிகாட்டி எணணும் மாறும். இந்த மாற்றத்துக்கு ஒரு கணக்கு உள்ளது. இப்படத்தைக் காணவும்:



(2, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் உள்ள வேறு இரு புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2); கோட்டின் இரு பாகங்கள் கர்ணங்களும், அச்சுகளுக்கு இணையான செங்கோணப் பக்கங்களும் உள்ள இரு செங்கோண முக்கோணங்களும் வரையப்பட்டுள்ளன. இந்த முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் அல்லவா.



எனவே

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

இதனை இவ்வாறும் எழுதலாம்:

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

இதில் (x_1, y_1), (x_2, y_2) கோட்டில் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளும் ஆகலாம்.

> (2, 5), (6, 7) என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டில் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவற்றின் y வித்தியாசம், x வித்தியாசத்தின் பாதி ஆகும்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். இந்தக் கோடு வழியாக ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடங்கி வேறொரு புள்ளியில் சேரும்போது, x குறிகாட்டி எண்ணும், y குறிகாட்டி எண்ணும் மாறுகிறது; இந்த மாற்றத்தின் கணக்கு இதுவே:

(2, 5), (6, 7) என்பவற்றை இணைக்கும் கோடு வழியாக நகரும் போது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் y இன் மாற்றம், x இன் மாற்றத்தின் பாதி ஆகும்.

(2, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகளுக்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் புள்ளிகளை எடுத்தால்?

எடுத்துக்காட்டாக, (1, 4), (5, 12) என எடுத்துப் பார்க்கலாம். இவற்றை இணைக்கும் கோடு வழியாக (1, 4) இல் இருந்து (5, 12) க்குச் சென்று சேரும் போது, x குறிகாட்டி எண் 4 உம்; y குறிகாட்டி எண் 8 உம் கூடும். அதாவது, x இன் மாற்றத்தின் இரு மடங்கு y இன் மாற்றம். இக்கோட்டின் எந்த இரு இடங்களிலும் இதுவே நடைபெறுகிறது:

(1, 4), (5, 12) என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் வழியாக நகரும்போது ஒவ்வொரு நிலையிலும் y இன் மாற்றம், x இன் மாற்றத்தின் இரு மடங்கு ஆகும்.

இந்த இரு கோடுகளிலும் x கூடும்போது y உம் கூடுகிறது. மாறாகவும் நடைபெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, (3, 6), (7, 4) என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டால், x குறிகாட்டி எண்ணில் 4 கூடும்போது y குறிகாட்டி எண்ணில் 2 குறைகிறது; எனவே

(3, 6), (7, 4) என்பவற்றை இணைக்கும் கோடு வழியாக நகரும் போது, ஒவ்வொரு நிலையிலும் y இன் மாற்றம், x இன் மாற்றத்தின் பாதியின் குறைஎண் ஆகும்.

இவை அனைத்திலும் பொதுவாகக் காண்பது என்ன?

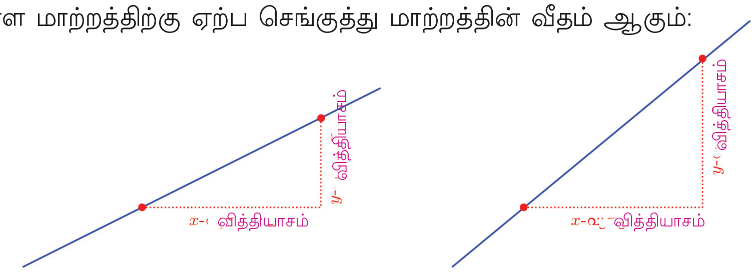
எந்த ஓர் அச்சுக்கும் இணையல்லாத எந்தக் கோட்டிலும் y குறிகாட்டி எண்ணின் மாற்றம், x குறிகாட்டி எண்ணின் மாற்றத்தைக் குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்குவது ஆகும்.

இத்தகைய மாறுதலுக்கு ஒரு பெயர் உண்டு அல்லவா:

எந்த ஓர் அச்சுக்கும் இணையல்லாத எந்தக் கோட்டிலும் y இன் மாற்றம், x இன் மாற்றத்தின் விகித சமத்தில் ஆகும்.

x அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோட்டில், y குறிகாட்டி எண் மாறுவதில்லை. ஆகவே இத்தகைய ஒரு கோட்டில் உள்ள இரு புள்ளிகளின் y வித்தியாசம் 0 ஆகும். இது x வித்தியாசத்தை 0 ஆல் பெருக்கியது அல்லவா. எனவே இங்கும் y வித்தியாசம், x வித்தியாசத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கியது ஆகும். ஆனால் x, y மாற்றம் விகித சமத்தில் அல்ல.

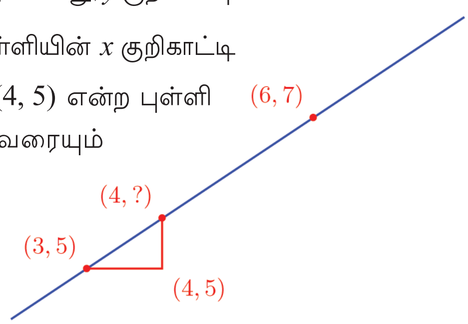
வடிவியல் முறையில் பார்த்தால், x வித்தியாசம் என்பது கிடையாக உள்ள மாற்றமும் y வித்தியாசம் என்பது செங்குத்தாக உள்ள மாற்றமும் அல்லவா. எனவே y வித்தியாசத்தை x வித்தியாசத்தால் வகுத்தால் கிடைப்பது, கிடையாக உள்ள மாற்றத்திற்கு ஏற்ப செங்குத்து மாற்றத்தின் வீதம் ஆகும்:



வேறொரு முறையில் கூறினால், ஒரு கோட்டில் குறிகாட்டி எண்களின் மாற்றத்தின் விகிதசம மாறிலி கோட்டின் சாய்வின் ஓர் அளவாகும். இந்த எண்ணைக் கோட்டின் சாய்வு (Slope) எனக் கூறுகிறோம்.

இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் வேறு புள்ளிகளைக் காண்பதற்கு இக்கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, (3, 5), (6, 7) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினைப் பார்க்கலாம். இந்த இரண்டு புள்ளிகளில் xஇன் மாற்றம் 3 உம் y இன் மாற்றம் 2 உம் அல்லவா. அப்போது இந்த இரு புள்ளிகளில் xஇன் மாற்றம் 3 ஆகும் போது y இன் மாற்றம் 2 ஆகும் அல்லவா. அதாவது இக்கோட்டில் எந்த இடத்திலும் x இன் மாற்றம் 3 ஆகும்போது, y இன்மாற்றம் 2 ஆகும். அதாவது இக்கோட்டில் x குறிகாட்டி எண் 1 மாறும்போது, y குறிகாட்டி எண் $\frac{2}{3}$ மாறும். இனி (3, 5) என்ற புள்ளியின் x குறிகாட்டி எண்ணில் 1 கூட்டி 4 ஆக்கினால்? (4, 5) என்ற புள்ளி வழியாக y அச்சுக்கு இணையாக வரையும் கோடு முதலாவது கோட்டினை வெட்டும் அல்லவா:



இப்புள்ளியின் y குறிகாட்டி எண் எது?

அதன் x குறிகாட்டி எண் 3 உடன் 1 கூட்டியதாகும்.

எனவே y குறிகாட்டி எண் கிடைக்க 5 உடன் $\frac{2}{3}$ ஐக் கூட்ட வேண்டும். அதாவது, $\left(4,\ 5\frac{2}{3}\right)$ இக்கோட்டில் உள்ள புள்ளி ஆகும்.

ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வைக் கணக்கிட slope பயன்படுத்திக் கோட்டில் கிளிக் செய்தால் போதும். இவ்வாறு கிடைக்கும் எண்ணில் x வித்தியாசம் 1 எனக் காண்பிக்கும். எனவே y வித்தியாசமே கோட்டின் சாய்வு ஆகும்.

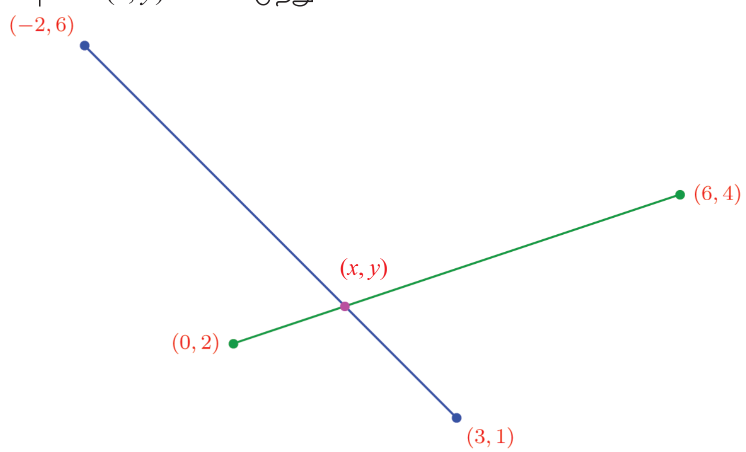
இதே முறையில், எந்த எண்ணும் x குறிகாட்டி எண்ணான ஒரு புள்ளியை இக்கோட்டில் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இக்கோட்டில் x குறிகாட்டி எண் 9 ஆன புள்ளி எது?

3 உடன் 6 கூட்டியதே 9; ஆகவே y குறிகாட்டி எண் கிடைக்க 5 உடன் $6 \times \frac{2}{3} = 4$ கூட்ட வேண்டும். அதாவது $(9, 9)$ இக்கோட்டின் வேறொரு புள்ளி ஆகும்.

$(3, 5), (6, 7), (9, 9)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளவை எனக் கண்டோம் அல்லவா? இவற்றின் x குறிகாட்டி எண்களான $3, 6, 9$ என்ற எண்களுக்கு இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா? y குறிகாட்டி எண்களான $5, 7, 9$ என்பவற்றின் இடையில்? இதைப்போன்று இக்கோட்டில், குறிகாட்டி எண்கள் எண்ணல் எண்களாக உள்ள வேறு சில புள்ளிகளைக் கண்டு பிடிக்கலாமா?

இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கவும் இதே கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $(0, 2), (6, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டையும் $(3, 1), (-2, 6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டையும் வெட்டும் புள்ளி (x, y) என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.



எனவே (x, y) என்ற புள்ளி இருகோடுகளிலும் உள்ளன. x, y மாற்றங்கள் எல்லாக் கோடுகளிலும் விகித சமம் ஆனதால், முதலாவது கோட்டிலிருந்து,

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{4-2}{6-0}$$

எனவும் இரண்டாவது கோட்டிலிருந்து

$$\frac{y-1}{x-3} = \frac{6-1}{-2-3}$$

எனவும் கிடைக்கும். இந்தச் சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாக இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x - 3y = -6$$

$$x + y = 4$$

இத்தகைய ஒரு ஜோடி சமன்பாடுகள் சரியாகின்ற எண்களைக் கண்டுபிடிக்கும் வழிமுறையை ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டுள்ளோம் அல்லவா. அதனைப் பயன்படுத்தி, x உம் y உம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$x = 1\frac{1}{2} \qquad y = 2\frac{1}{2}$$

அதாவது, கோடுகள் வெட்டுவது $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ என்ற புள்ளியில் ஆகும்.

(1) (1, 3), (2, 5), (3, 7) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளவை எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(2) (−1, 4), (1, 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் வேறு இரு புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ உம் $y_1, y_2, y_3, \ldots$ உம் கூட்டுத்தொடர்கள் ஆகும். (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... என்ற தொடரில் உள்ள ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்களான புள்ளிகள் அனைத்தும் ஒரே கோட்டில் உள்ளவை ஆகும் என நிறுவுக.

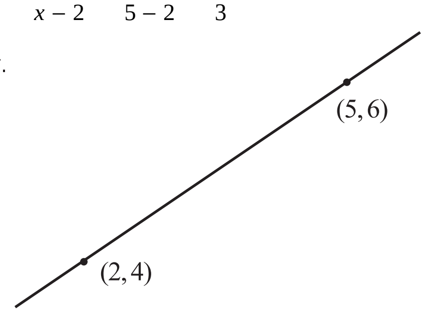
(4) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் உள்ளவை எனில் $(3x_1 + 2y_1, 3x_1 - 2y_1)$, $(3x_2 + 2y_2, 3x_2 - 2y_2)$, $(3x_3 + 2y_3, 3x_3 - 2y_3)$ என்ற புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் இருக்கும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும். 3, 2 என்ற எண்களுக்குப் பதிலாக வேறு எந்த இரு எண்களாயினும் இது சரியாகுமா?

வடிவங்களும் சமன்பாடுகளும்

(2, 4), (5, 6) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி (x, y) எனில்

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{6-4}{5-2} = \frac{2}{3}$$

எனக் கிடைக்கும் அல்லவா.



(1, 3), (5, 6) என்ற புள்ளிகளிலும் (2, 4), (6, 7) என்ற புள்ளிகளிலும் y வித்தியாசத்தை x வித்தியாசத்தால் வகுத்துக் கிடைப்பது $\frac{3}{4}$ ஆகும். ஒவ்வொரு ஜோடியையும் இணைக்கும் கோடுகளை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும். இக்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

இந்தச் சமன்பாட்டினை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

மீண்டும் எளிதாக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$2x - 3y + 8 = 0$$

இதன் பொருள் என்ன?

இந்தக் கோட்டில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டாலும், அதன் குறிகாட்டி எண்கள் இந்தச் சமன்பாட்டினை ஏற்கிறது. அதாவது,

(p, q) என்ற குறிகாட்டி எண்கள் உள்ள புள்ளி இக்கோட்டில் உள்ளது எனில் $2p - 3q + 8 = 0$ ஆக இருக்கும்.

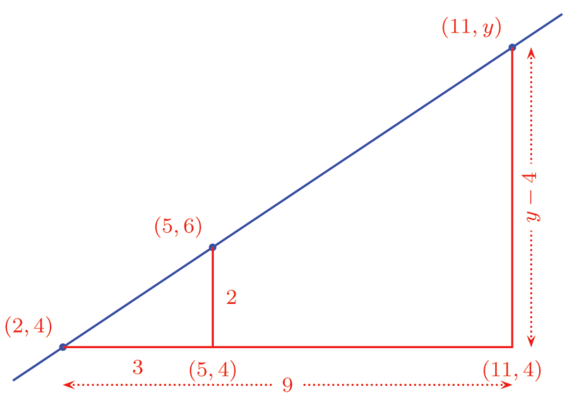
மாறாக, இச்சமன்பாட்டை ஏற்கின்ற ஒரு ஜோடி எண்களை எடுத்துக்கொண்டால், அவை குறிகாட்டி எண்கள் ஆன புள்ளி இக்கோட்டிலேயே இருக்குமா?

எடுத்துக்காட்டாக, $x = 11, y = 10$ என எடுத்தால்

$$2x - 3y + 8 = 22 - 30 + 8 = 0$$

எனக் காணலாம். எனவே $(11, 10)$ என்ற புள்ளி இக்கோட்டில் உள்ளதா?

முன்னர் கண்டதைப் போன்று $(11, 4)$ என்ற புள்ளி வழியாக y அச்சுக்கு இணையாக வரையும் கோடு, இக்கோட்டுடன் வெட்டும் அல்லவா. இப்புள்ளியின் x குறிகாட்டி எண் 11 தான்; y குறிகாட்டி எண்ணை y என்று எடுக்கலாம்;



படத்திலிருந்து

$$\frac{y-4}{11-2} = \frac{2}{3}$$

எனக்கிடைக்கும்.

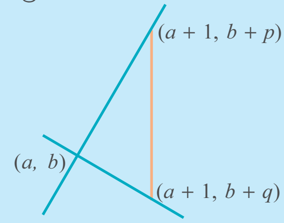
இதனை எளிதாக்கினால் $y = 10$ எனக் கிடைக்கும். அதனால் $(11, 10)$ என்ற புள்ளி இக்கோட்டில் ஆகும்.

சாய்வும் செங்குத்தும்

இணைகோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் ஆனவை எனக் காண்பது கடினமல்ல. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளின் சாய்வுகளின் இடையே என்ன தொடர்பு?

சாய்வுகள் p, q ஆன இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சந்திக்கின்ற புள்ளியை (a, b) என எடுக்கலாம்.

எனவே $(a + 1, b + p)$ என்ற புள்ளி முதலாவது கோட்டில் ஆகும்; $(a + 1, b + q)$ என்ற புள்ளி இரண்டாவது கோட்டிலும் உள்ளது. (காரணம்?)



கோடுகள் செங்குத்து ஆனால்,

$$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$$

செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் ஆகும். இரண்டாவதும் மூன்றாவதும் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்ததே கர்ணம் ஆகும். இம் முக்கோணத்தின் செங்கோணப் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கம் $p^2 + 1$, $q^2 + 1$ என்பனவும், கர்ணத்தின் நீளம் $|p - q|$ உம் ஆனதால்.

$$(p^2+1) + (q^2+1) = (p-q)^2$$

எனக் கிடைக்கும். இதனை எளிதாக்கினால்

$$2 = -2pq$$

அல்லது,

$$pq = -1$$

அதாவது,

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகளில் ஒரு கோட்டின் சாய்வு, மற்ற கோட்டின் சாய்வின் தலைகீழியின் குறைஎண் ஆகும்.

இனி $2p - 3q + 8 = 0$ ஆகுமாறு p, q என்ற ஏதோ ஒரு ஜோடி எண்கள் கிடைத்தன எனவும். $(p, 4)$ என்ற புள்ளி வழியே y அச்சுக்கு இணையாக வரையும் கோடு, $(2, 4)$, $(5, 6)$ என்பனவற்றை இணைக்கும் கோட்டினுடன்

ஜியோஜிப்ராவில் Input Bar இல் 2x − 3y + 8 = 0 என எழுதினால் சமன்பாட்டைக் குறிப்பிடும் கோடு கிடைக்கும். a, b, c என மூன்று சிலைடர்கள் உருவாக்கி ax+by+c=0 என Input Bar இல் எழுதவும்.சிலைடர்கள் நீங்குவதற்கு ஏற்ப கோட்டுக்கு வரும் மாற்றத்தைக் காணவும்.

(p, y) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனில், எடுத்துக்காட்டில் உள்ளதைப் போன்று

$$\frac{y-4}{p-2} = \frac{2}{3}$$

எனக் கிடைக்கும். இதனை எளிதாக்கி

$$y = \frac{2}{3}(p-2)+4$$

என்ற வடிவில் ஆக்கலாம். இனி $2p - 3q + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$q = \frac{2}{3}(p-2)+4$$

எனவும் எழுதலாம். அப்போது, $y = q$ அதாவது, (p, q) என்ற புள்ளி இக்கோட்டிலேயே இருக்கும். இப்போது கண்டது என்ன?

(2, 4), (5, 6) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களான எண்ஜோடிகளின் தொகுப்பும், $2x - 3y + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை ஏற்கின்ற எண்ஜோடிகளின் தொகுப்பும் ஒன்றே.

இதனைச் சுருங்கக் கூறின் இவ்வாறாகும்:

(2, 4), (5, 6) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு $2x - 3y + 8 = 0$

இதைப்போன்று எந்தக் கோட்டிலும் உள்ள இரு புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்தால், அதன் சமன்பாட்டினை எழுதலாம்.

(0, 0), (1, 1) என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பார்க்கலாம். இக்கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியை (x, y) என எடுத்துக்கொண்டால்,

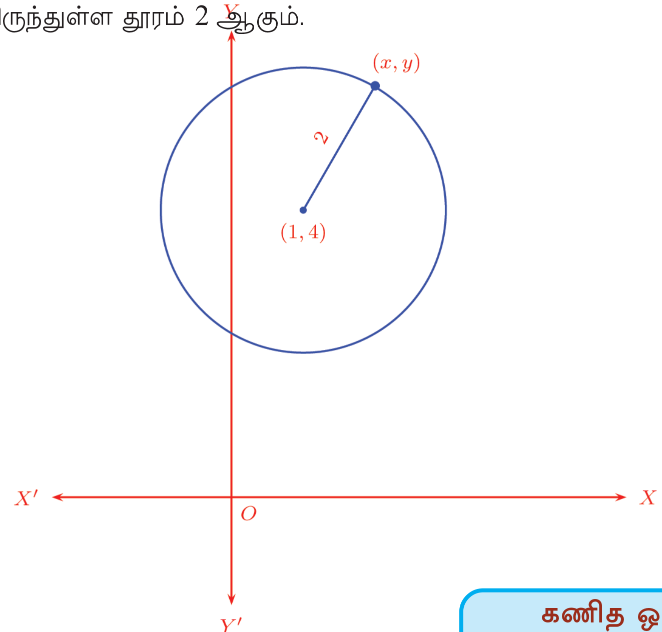
$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{1-0}$$

எனக் கிடைக்கும் அல்லவா. இதனைச் சுருக்கினால் $y = x$ எனக் கிடைக்கும். இதுவே இக்கோட்டின் சமன்பாடு.

இதிலிருந்து இக்கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் x குறிகாட்டி எண்ணும் y குறிகாட்டி எண்ணும் சமம் எனக் காணலாம் அல்லவா.

கோடுகள் மட்டுமல்ல, பிற வடிவியல் வடிவங்களுக்கும் சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மையம் (1, 4) என்ற புள்ளியும், ஆரம் 2 உம்

ஆன வட்டத்தைப் பார்க்கலாம். இவ்வட்டத்தில் உள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் வட்டத்திலிருந்துள்ள தூரம் 2 ஆகும்.



இந்தத் தூரத்தின் வர்க்கம் $(x-1)^2 + (y-4)^2$ ஆகிறது எனக் கண்டோம் அல்லவா. இது வட்டத்தின் ஆரத்தின் வர்க்கம் ஆனதால்,

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

வட்டத்தில் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களும் இந்தச் சமன்பாட்டையும் ஏற்றுக் கொள்ளும். மாறாக, இந்தச் சமன்பாட்டை ஏற்றுக் கொள்கின்ற எந்த ஜோடி எண்களை எடுத்துக் கொண்டாலும், அவை வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களாகவும் இருக்கும்.

அவ்வாறு வட்டத்தின் சமன்பாடு இதுவே ஆகும். வேண்டுமெனில் இதை விரித்தெழுதினால்.

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

என்று எழுதலாம்.

அப்போது மையமானது ஆதிப் புள்ளியாகவும், ஆரம் 1 ஆகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

கணித ஒருங்கிணைப்பு

புள்ளிகளை எண் ஜோடிகள் ஆக்குவதன் வாயிலாக வடிவியல் வடிவங்களை இயற் கணிதச் சமன்பாடுகள் ஆக்கியும், இயற் கணிதச் சமன்பாடுகளை வடிவியல் வடிவங்கள் ஆக்கியும் கற்கின்ற முறையையே தேக்கார்தே தொடங்கி வைத்தார். அது வரை கணிதத்தின் இரு வேறுபட்ட பிரிவுகளாக இருந்த இயற் கணிதத்தையும், வடிவியலையும் இணைக்கின்ற இந்த முறைக்குப் பகுமுறை வடிவியல் (Analytic Geometry) என்று பெயர்.

கணிதச் சிந்தனையிலும், கணிதத்தைப் பயன்படுத்துகின்ற வேறு அறிவியல்களிலும் மிகப் பெரிய மாற்றங்களை உருவாக்கிய நுண்கணிதம் (Calculus) என்ற கணிதப் பிரிவின் அடித்தளம் என்பது வடிவியல் பற்றிய இந்தப் பார்வையே ஆகும், இரண்டின் இணைதலின் வாயிலாக அல்லவா வளர்ச்சி உண்டாகிறது.

இந்த வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண் (x, y) என்று எடுத்தால், மையத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தின் வர்க்கம் $x^2 + y^2$; இது ஆரத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமம் ஆனதால்,

$$x^2 + y^2 = 1$$

இதுவே இந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு.

(1) (1, 2), (2, 4) ஆகியவற்றை இணைக்கின்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும். இதில் x குறிகாட்டி எண்கள் 3, 4, 5, ... என இவ்வாறு தொடர்ந்து வரும் எண்ணல் எண்களான புள்ளிகளின் y குறிகாட்டி எண்களின் தொடர் என்ன?

(2) $(-1, 3), (2, 5)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (x, y) என்ற புள்ளி இந்தக் கோட்டில் அமைகிறது எனில், $(x+3,\ y+2)$ என்ற புள்ளியும் இந்தக் கோட்டிலேயே அமையும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

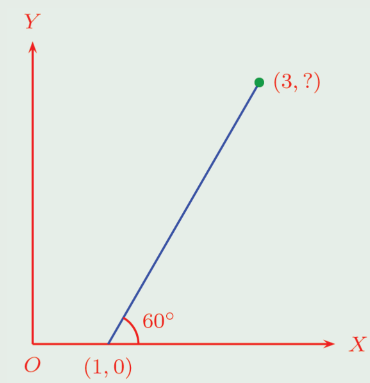
(3) x ஆன எந்த எண்ணை எடுத்தாலும், $(x, 2x+3)$ என்ற புள்ளி. $(-1, 1)$, $(2, 7)$ எனும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கின்ற கோட்டின் புள்ளி ஆகும் என நிறுவுக.

(4) படத்தில் சாய்வான (நீல நிறமுள்ள) கோட்டில் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் x குறிகாட்டி எண் 3 ஆகும்.

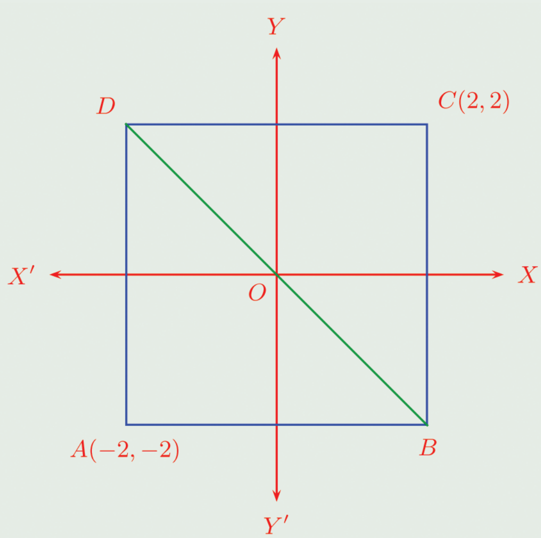
i) அதன் y குறிகாட்டி எண் எது?

ii) கோட்டின் சாய்வு எவ்வளவு?

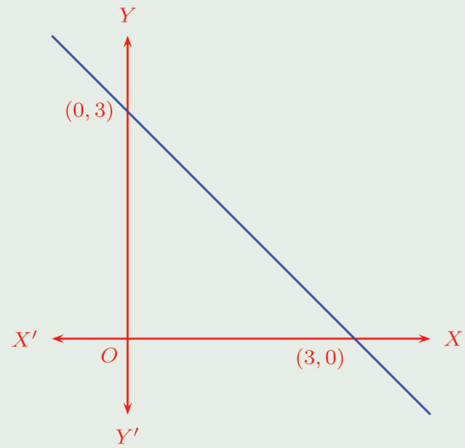
iii) கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.



(5) படத்தில் $ABCD$ ஒரு சதுரம் ஆகும். BD என்ற மூலைவிட்டத்தில் அமைந்த எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x, y குறிகாட்டி எண்களின் தொகை பூஜ்யம் ஆகும் என்று நிறுவுக.



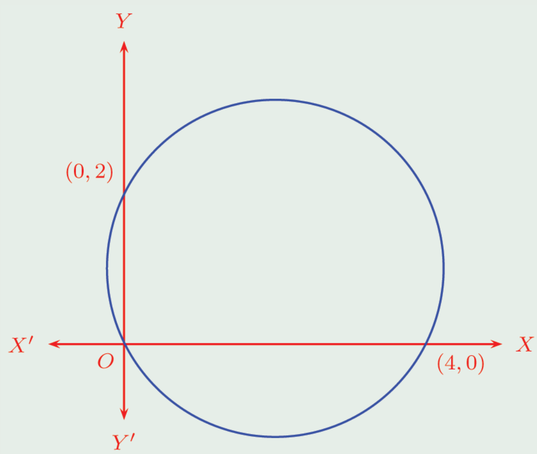
(6) படத்தில் x, y அச்சுகளை வெட்டிச் செல்லும் கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x, y குறிகாட்டி எண்களின் தொகை 3 ஆகும் என நிறுவுக.



(7) ஆதிப் புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 ஆகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இந்த வட்டத்தில் உள்ள எட்டுப் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எழுதுக.

(8) (0, 1), (2, 3) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கின்ற கோடு விட்டம் ஆன வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியை (x, y) என எடுத்தால் $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ ஆகும் என நிறுவுக. இந்த வட்டம் x அச்சை வெட்டிச்செல்லும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(9) படத்தில் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?



உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என அமைந்த முக்கோணத்தின் முக்கோண மையத்தின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

ஜியோஜிப்ராவில் உள்ள Input Bar இல் x, y என்பவற்றை இணைக்கின்ற ஏதேனும் சமன்பாட்டை எழுதினால், அது ஏற்கின்ற எண்ஜோடிகள் குறிகாட்டி எண்கள் ஆன புள்ளிகளைச் சேர்த்துள்ள படத்தைக் காணலாம். இந்தச் சமன்பாடுகளை ஒவ்வொன்றாக அதில் அளித்துப் பார்க்கவும்:

- $2x\verb|^|2 + 2y\verb|^|2 = 4$
- $2x\verb|^|2 + 3y\verb|^|2 = 4$
- $2x\verb|^|2 - 3y\verb|^|2 = 4$
- $2x\verb|^|2 + 3y = 4$

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ ஒரு கோட்டில் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளின் y குறி காட்டி எண்களின் மாற்றம், x குறிகாட்டி எண்களின் மாற்றத்தின் விகித சமத்தில் ஆகும் என நிறுவுதல். ⌘ இரு புள்ளிகளின் வழியே வரைகின்ற கோட்டின் சமன்பாட்டை உருவாக்குதல். ⌘ ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி மையமாகவும், ஒரு குறிப் பிட்ட ஆரமும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டை உருவாக்குதல்.			

காரணிகளும் தீர்வுகளும்

இரு எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் என்பது அவற்றின் தொகை, வித்தியாசம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் என எட்டம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா.

இயற்கணித மொழியில் கூறினால்,

x, y என்ற எந்த இரு எண்களை எடுத்தாலும் $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

இதில் y ஆக பல எண்களை எடுத்துப் பார்க்கலாம்.

x எந்த எண் ஆனாலும்,

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - 1,\ x^2 - 2,\ x^2 - \frac{1}{4}$ எனும் இவை அனைத்தும் இருபடி பல்லுறுப்புகள், $x - 1,\ x + 1,\ x - \sqrt{2},\ x + \sqrt{2},\ x - \frac{1}{2},\ x + \frac{1}{2}$ எனும் இவை அனைத்தும் ஒரு படி பல்லுறுப்புகளும் ஆகும்.

அப்படியானால், மேலே எழுதிய சமன்பாடுகளில் ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு இரண்டு ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதப்பட்டுள்ளது.

ஓர் எண்ணல் எண்ணை இரு எண்ணல் எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதினால். பெருக்குகின்ற எண்களைக் காரணிகள் எனக்கூறுவோம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக. $12 = 2 \times 6$ ஆனபடியால், 2 உம், 6 உம் 12 இன் காரணிகள் ஆகும். இதைப்போன்று $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ஆனபடியால், $x - 1$, $x + 1$

KT 585-6/Maths-10(T) Vol-2

எனும் இவை $x^2 - 1$ இன் காரணிகள் ஆகும்.

பொதுவாகக் கூறினால்,

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பு $q(x)$, $r(x)$ என்ற பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் எனில் $q(x)$, $r(x)$ என்பவற்றை $p(x)$ இன் காரணிகள் என்று கூறுவர்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

அல்லவா. அதாவது,

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

அப்படியானால், $x-1$, $x-2$ ஆகிய ஒருபடி பல்லுறுப்புகள் $x^2 - 3x + 2$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்பின் காரணிகள் ஆகும்.

இதில் வேறொரு காரியம் உள்ளது:

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ என எழுதினால், $p(1)$ என்பது என்ன?

இப்போது காண்பதற்கு ஏற்ப, $p(x)$ ஐ ஒருபடி காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக விரித்து எழுதலாம்;

$$p(x) = (x-1)(x-2)$$

இதிலிருந்து

$$p(1) = (1-1) \times (1-2) = 0 \times (-1) = 0$$

இதைப்போன்று $p(2) = 0$ என்றும் காணலாம் அல்லவா.

அதாவது, $p(x) = 0$ ஆவதற்கு, x ஆக எடுக்க வேண்டிய எண்களே 1 உம் 2 உம். வேறொரு முறையில் கூறினால், $p(x) = 0$, (அதாவது $x^2 - 3x + 2 = 0$) என்ற சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையின் தீர்வுகளே 1, 2 ஆகிய எண்கள். x ஆக வேறு ஏதேனும் எண்களை எடுத்தால் $p(x) = 0$ கிடைக்குமா?

$(x-1)(x-2) = 0$ என வேண்டுமெனில் $x-1$, $x-2$ என்பவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று 0 ஆக வேண்டும் அல்லவா.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்;

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

எனப் பெருக்கி எழுதலாம். மாறாகக் கூறினால், $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ என்ற மூன்றாம் படி பல்லுறுப்பின் காரணிகள்தான் $x-1$, $x-2$, $x-3$ என்பவை.

இங்கும்

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

என எழுதினால், முதல் கணக்கில் பார்த்ததைப் போன்று

$$p(1) = 0, p(2) = 0, p(3) = 0$$

எனக் காணலாம் அல்லவா.

அப்போது இதிலும் $p(x) = 0$ அதாவது,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுப் பிரச்சினைகளின் தீர்வுகளே 1, 2, 3 ஆகிய எண்கள். இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து கிடைக்கும் பொதுக்கோட்பாடு என்ன?

$x - a$ என்ற ஒரு படி பல்லுறுப்பு, $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி எனில், $p(a) = 0$ ஆகும்.

மேலும் சிறிது விளக்கமாகக் கூறினால்,

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

என விரித்து எழுத இயலுமெனில், $a_1, a_2, \dots, a_n$ ஆகிய எண்கள் $p(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையின் தீர்வுகள் ஆகும்.

அப்போது ஒரு பல்லுறுப்பு சமன்பாட்டுப் பிரச்சனையின் தீர்வு காண்பதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறை, அந்தப் பல்லுறுப்பை ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற் பலனாக விரித்தெழுதுக என்பதே.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தச் சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையைப் பார்க்கவும்.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$x^2 - 5x + 6$ ஐ இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலாது அல்லவா. (இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனின் அடுக்கு இரண்டிற்கு மேற்பட்டன அல்லவா?) அப்படியானால்,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - a)(x - b)$$

என எழுதிப் பார்ப்போம். பெருக்கற்பலனை விரித்து எழுதினால்,

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (a + b)x + ab$$

சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களிலும் உள்ள பல்லுறுப்புகளின் குணகங்கள் சமமாக வேண்டும். அதற்கு,

$$a + b = 5$$
$$ab = 6$$

எனக் கிடைக்க வேண்டும்.

அதாவது, தொகை 5 உம், பெருக்கற்பலன் 6 உம் ஆன இரு எண்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

சற்று சிந்தித்தால்,

$$a = 2 \qquad b = 3$$

என எடுத்தால் இது சரியாகும் எனக் காணலாம். அப்படியானால் $x^2 - 5x + 6$ ஐக் கீழ்க்காணுமாறு விரித்து எழுதலாம்;

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

இதிலிருந்து $x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையின் தீர்வுகள் 2 உம், 3 உம் எனப் பார்க்கலாம்.

வேறொரு சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையைப் பார்ப்போம்:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

முதல் கணக்கைப் போன்று

$$x^2 + 2x - 15 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

என எழுதினால், இதில்

$$a + b = -2$$

$$ab = -15$$

எனக் கிடைக்கும்.

3 உம், 5 உம் 15 இன் காரணிகள் ஆகும். பெருக்கற்பலன் குறை ஆனதால் ஒன்றைக் குறையாக எடுக்க வேண்டும். -3 உம் 5 உம் எடுத்தால் தொகை சரியாகாது. 3 உம், 5 உம் சரியாகும்.

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)\big(x - (-5)\big) = (x - 3)(x + 5)$$

அப்படியானால், $x^2 + 2x - 15 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுப் பிரச்சினையின் தீர்வுகள் 3 உம் -5உம் ஆகும். மேலும் ஓர் எடுத்துக்காட்டு:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

இதன் தீர்வு காண, வழக்கம்போல்

$$x^2 - x - 1 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

என எழுதினால்,

$$a + b = 1$$

$$ab = -1$$

இது எவ்வாறு இயலும்?

a, b என்பன எண்ணல் எண்களாகவே இருக்க வேண்டும் என்றில்லை அல்லவா. அப்படியானால் முன்னர் செய்ததைப் போன்று, ஊகித்தும் திருத்தியும் இதைச் செய்ய இயலாது. வேறொரு வழிமுறையைப் பார்ப்போம்.

எட்டாம் வகுப்பில் உள்ள வேறொரு முற்றொருமையை நினைவு கூர்வோம்.

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

இதை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

நமது கணக்கில் $a+b=1$, $ab=-1$ ஆனபடியால்,

$$(a-b)^2 = 1^2 - 4\times(-1) = 1+4 = 5$$

இதிலிருந்து $a-b=\pm\sqrt{5}$

எனக் கிடைக்கும்.

$a-b=\sqrt{5}$ என எடுத்தால், a, b என்பனவற்றின் தொகையும் வித்தியாசமும் இவ்வாறாகும்:

$$a+b = 1$$
$$a-b = \sqrt{5}$$

தொகையும் வித்தியாசமும் தெரியும் எனில் எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா.

$$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

$a-b=-\sqrt{5}$ என எடுத்தால்?

$$a=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \quad b=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

எனக் கிடைக்கும். (செய்து பார்க்கவும்) எவ்வாறாயினும்

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)$$

எனக் கிடைக்கும். அப்போது $x^2-x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ எனக் காணலாம்.

இனி வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

$2x^2-7x+6$ஐ இரு ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எவ்வாறு எழுதலாம்?

முதலில் பல்லுறுப்பை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$2x^2-7x+6 = 2\left(x^2-\frac{7}{2}x+3\right)$$

இனி முன்னர் செய்ததைப் போன்று $x^2-\frac{7}{2}x+3$ இரு ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதலாம்.

$$x^2-\frac{7}{2}x+3 = (x-a)(x-b)$$

$$= x^2-(a+b)x+ab$$

என எழுதினால்,

$$a+b = \frac{7}{2}$$

$$ab = 3$$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ என்பதிலிருந்து

$$(a-b)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2-4\times 3$$

$$= \frac{49}{4}-12 = \frac{1}{4}$$

$$a-b = \pm\frac{1}{2}$$

$a-b=\frac{1}{2}$ என எடுத்தால்,

$$a+b = \frac{7}{2};\quad a-b=\frac{1}{2}$$

இதிலிருந்து $a=2,\ b=\frac{3}{2}$ என்றும் கிடைக்கும்.

$a-b=-\frac{1}{2}$ என எடுத்தால், $a=\frac{3}{2}$, $b=2$ எனக் கிடைக்கும். (செய்து பார்க்கவும்)

எவ்வாறாயினும்,

$$x^2-\frac{7}{2}x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)$$

அப்போது

$$2x^2-7x+6 = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)$$

$$= (2x-3)(x-2)$$

எல்லாப் பல்லுறுப்புகளையும் இவ்வாறு ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக விரித்து எழுத இயல வேண்டும் என்றில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, x^2+1 என்ற பல்லுறுப்பைப் பார்ப்போம். இது $x-a,\ x-b$ என ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் எனில்,

$$x^2 + 1 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

என்றும் அதிலிருந்து

$$a + b = 0$$

$$ab = 1$$

என்றும் கிடைக்க வேண்டும். முன் கணக்கைப் போன்று a உம் b உம் கண்டுபிடிக்க முயற்சிக்கலாம்.

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 0 - 4 = -4$$

எந்த எண்ணாயினும் அதன் வர்க்கம் குறை எண் ஆகாது அல்லவா. அப்போது இந்தச் சமன்பாடுகளை ஏற்றுக்கொள்ளும் எண்கள் இல்லை.

அதாவது, $x^2 + 1$ ஐ ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலாது.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளை ஒரு படி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும். ஒவ்வொன்றிலும் $p(x) = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளும் எழுதுக.

i) $p(x) = x^2 - 7x + 12$ ii) $p(x) = x^2 + 7x + 12$

iii) $p(x) = x^2 - 8x + 12$ iv) $p(x) = x^2 + 13x + 12$

v) $p(x) = x^2 - 2x + 1$ vi) $p(x) = x^2 + x - 1$

vii) $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$ viii) $p(x) = 6x^2 - 7x + 2$

(2) $p(1) = 0,\ p(-2) = 0$ எனில், ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு $p(x)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(3) $p\left(1+\sqrt{3}\right) = 0,\ p\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$ எனில், ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு $p(x)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(4) $p(1) = 0,\ p(\sqrt{2}) = 0,\ p(-\sqrt{2}) = 0$ எனில் ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பு $p(x)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) $x^2 + x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பை ஒருபடி பல்லுறுப்பின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலாது என நிறுவுக.

பல்லுறுப்பு மீதி

$x - a$ என்ற பல்லுறுப்பு, $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி எனில் $p(a) = 0$ எனப் பார்த்தோம் அல்லவா.

இனி $p(x)$ என ஒரு பல்லுறுப்பும் a என ஓர் எண்ணும் எடுத்து $p(a)$ ஐக் கணக்கீடு செய்தபோது 0 கிடைக்கவில்லை எனக் கருதவும். $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பு $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி அல்ல எனக் கூறலாமா?

$x - a$ காரணி எனில் $p(a)$ பூஜ்யம் ஆக வேண்டும். இங்கு $p(a)$ பூஜ்யம் அல்ல. எனவே $x - a$ காரணியும் அல்ல.

அப்படியானால் ஒரு படி காரணிகளைப் பற்றிய கோட்பாட்டை இவ்வாறு கூறலாம்.

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பில் x ஆக a என்ற எண்ணை எடுக்கும்போது $p(a) \neq 0$ எனில், $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பு $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி அல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, $p(x) = x^2 - 3x + 3$ என்றும் $a = 1$ என்றும் எடுத்தால் $p(a) = 1$ எனக் கிடைக்கிறது. அப்படியானால் $x - 1$ என்ற ஒரு படி பல்லுறுப்பு, $p(x)$ இன் காரணி அல்ல என்று கூறலாம்.

ஆனால்,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

என்று பார்த்தோம் அல்லவா. அப்படியானால்

$$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2) + 1$$

என எழுதலாம். ஓர் எண்ணல் எண் வேறொரு எண்ணல் எண்ணின் காரணி அல்ல எனில், ஈவும் மீதியும் சேர்த்து எழுதுவது போன்றதே இது. 6 என்ற எண் 15 என்ற எண்ணின் காரணி அல்ல. ஆனால்,

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

என எழுதலாம்.

எண்ணல் எண்களில் உள்ளதைப் போன்று பல்லுறுப்புகளிலும் ஈவு, மீதி எனக் கூறலாம். அதாவது,

$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2) + 1$ என்பதில் $(x - 2)$ என்ற பல்லுறுப்பை, $x^2 - 3x + 3$ ஐ $x - 1$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் ஈவு என்றும் 1 என்ற எண்ணை இந்த வகுத்தலின் மீதி என்றும் கூறுவர்.

இதைப்போன்று

$$x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(x - 2) - 1$$

என எழுதலாம். அப்படியானால், $x^2 - 3x + 1$ஐ $x - 1$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு $x - 2$, மீதி -1.

காரணிகளைக் கண்டு பிடித்ததைப் போன்றே ஈவையும், மீதியையும் கண்டுபிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 - 3x - 10$ ஐ $x - 2$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் ஈவு $x - a$ என்றும் மீதி b என்றும் எடுக்கலாம். அதாவது,

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x - a) + b$$

கருத்தும் பொருளும்

பல்வேறு அளவுகளைக் குறிப்பிடுவதற்கே எண்ணல் எண்களும், விகிதமுறு எண்களும், விகிதமுறா எண்களும் உருவாக்கப்பட்டன எனப் பார்த்தோம். மட்டுமல்ல இந்த அளவுகளைப் பயன்படுத்தும் இயற்பியல் சூழல்களே இந்த எண்களின் செயல்களுக்கு அடிப்படை என்றும் பார்த்தோம்.

14 மிட்டாய்களை, 3 நபர்களுக்குச் சமமாகப் பங்கிட முயற்சி செய்யும்போது, முழுமையாகக் கொடுக்க இயலாமல் 2 மிட்டாய்கள் மீதி வருவதும், 14 மீட்டர் நீளம் உள்ள கயிறை, 3 மீட்டர் நீளம் உள்ள துண்டுகள் ஆக்க முயற்சி செய்தபோது, நீளம் போதாமல் 2 மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு துண்டு மீதி வருவதும், 14 ஐ, 3 ஆல் வகுத்தால் மீதியாக 2 வருவதும் என்பன கணித வெளியீடுகள் ஆயின.

இப்படிச் சிந்தித்தால்,

-14 ஐ -3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி என்ன?

இந்த வினாவின் பொருள் என்ன?

இந்தச் சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள பெருக்கலை விரித்து எழுதினால் இவ்வாறு ஆகும்.

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - (a + 2)\,x + (2a + b)$$

இனி இரு பக்கங்களிலும் பல்லுறுப்புகளின் குணகங்களைச் சமன் செய்தால்,

$$a + 2 = 3$$

$$2a + b = -10$$

இதில் முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $a = 1$ என்றும், இதை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தி, $b = -12$ எனவும் காணலாம். அப்போது,

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 2)\,(x - 1) - 12$$

அதாவது, $x^2 - 3x - 10$ ஐ $x - 2$ ஆல் வகுத்தால், ஈவு $x - 1$, மீதி -12.

மீதி என்றால்

மீதி என்ற கருத்து முழு எண்கள் அனைத்திலும் வளர்ச்சி அடைவதற்கு முதலில் எண்ணல் எண்களில்தான் இந்தக் கருத்தைக் கணிதம் சார்ந்து விவரிக்க வேண்டும்.

a என்ற எண்ணல் எண்ணை b என்ற எண்ணல் எண்ணால் வகுக்கும்போது ஈவு q, மீதி r எனக் கூறுவது கீழே கூறப்படும் விதிமுறைகளுக்கு உட்படு கின்ற எண்களில் ஆகும்.:

1. $a = qb + r$ ஆக இருக்க வேண்டும்.
2. q, r என்பன பூஜ்யமாகவோ எண்ணல் எண்களாகவோ இருக்க வேண்டும்.
3. $r < b$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

$x^2 - 3x - 10$ ஐ $x - 2$ ஆல் வகுப்பதற்குப் பதிலாக $x + 2$ ஆல் வகுத்தால்?

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)\,(x - a) + b = x^2 - (a - 2)\,x + (b - 2a)$$

என எழுதினால்,

$$a - 2 = 3$$

$$b - 2a = -10$$

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து $a = 5$ என்றும்; $b = 0$ என்றும் கிடைக்கும் அப்போது

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)\,(x - 5)$$

அதாவது, $x + 2$ என்ற பல்லுறுப்பு $x^2 - 3x - 10$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி ஆகும். வேண்டுமெனில் மீதியைப் பூஜ்யம் எனக் கூறலாம்.

மூன்றாம் படி பல்லுறுப்புகளையும் ஒரு படி பல்லுறுப்பால் வகுத்து, இதைப்போன்று ஈவையும், மீதியையும் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $x^3 - 2x^2 - x + 4$ என்ற பல்லுறுப்பை $x - 3$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவையும், மீதியையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இங்கு ஒரு காரியத்தைக் கவனிக்க வேண்டும். இரு படி பல்லுறுப்பில் செய்ததைப் போன்று ஈவு $x - a$ என்ற ஒரு படி பல்லுறுப்பாகவும், மீதியை b என்ற எண்ணாகவும் எடுத்தால் சரியாகாது. $(x - 3)\;(x - a) + b$ என்ற பல்லுறுப்பின் படி இரண்டு அல்லவா? நமக்கு வேண்டிய $x^3 - 2x^2 - x + 4$ இன் படி மூன்று அல்லவா.

அப்படியானால் ஈவு $x^2 + ax + b$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்பாகவும் மீதி, c என்ற எண்ணாகவும் எடுத்து இவ்வாறு எழுதிப் பார்ப்போம்:

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = (x - 3)(x^2 + ax + b) + c$$

சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தைப் பெருக்கல் செயல் செய்து, இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = x^3 + (a - 3)x^2 + (b - 3a)x + (c - 3b)$$

மீதி முழு எண்களில்

எண்ணல் எண்களின் மீதியின் வரையறையில் சற்று மாற்றம் செய்து முழு எண்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்:

a என்ற முழு எண்ணை b என்ற முழு எண்ணால் வகுக்கும்போது, ஈவு q, மீதி r எனக் கூறுவது கீழே கூறப்பட்டுள்ள விதிமுறைகளுக்கு உட்படுகின்ற எண்களில் ஆகும்:

1. $a = qb + r$ ஆக இருக்க வேண்டும்.
2. q, r இவை முழுஎண்களாக இருக்க வேண்டும்.
3. $r = 0$ அல்லது $0 < r < |b|$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக -14, -3 ஆகிய எண்களை எடுத்தால்

1. $-14 = 5 \times (-3) + 1$ என எழுதலாம்.
2. 5, 1 முழு எண்கள் ஆகும்.
3. $0 < 1 < |-3|$ ஆகும்.

எனவே, -14 ஐ -3 ஆல் வகுத்தால் ஈவு 5, மீதி 1 என்றே எடுக்கப்படுகிறது.

இதிலிருந்து

$$a - 3 = -2$$

$$b - 3a = -1$$

$$c - 3b = 4$$

இவற்றில் முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $a = 1$, அதை இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தி $b = 2$, அதை மூன்றாவது சமன்பாட்டில் பயன்படுத்தி $c = 10$ என இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

அதாவது,

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = (x - 3)(x^2 + x + 2) + 10$$

இவ்வாறு எந்தப் பல்லுறுப்பையும் $x - a$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள ஒரு படி பல்லுறுப்பால் வகுக்கும்போது கிடைக்கும். ஈவும் மீதியும் கணக்கிடலாம்.

$p(x)$ என ஒரு பல்லுறுப்பும், $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பும் எடுத்தால்,

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + b$$

என்ற சமன்பாடு சரியாகும்படி $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்பும் b என்ற எண்ணும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இதில் சமன்பாட்டை இவ்வாறும் எழுதலாம்.

$$p(x) - b = (x - a)\, q(x)$$

இதன் பொருள் என்ன?

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பு $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பின் மடங்கு அல்ல எனில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கழித்து மடங்காக மாற்றி எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^3 - 2x^2 + x + 2$ என்ற பல்லுறுப்பிலிருந்து எந்த எண்ணைக் கழித்தால் $x - 3$ இன் மடங்கு கிடைக்கும் என்று பார்க்கலாம்.

முன்னர் செய்ததைப் போன்று,

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 = (x - 3)\,(x^2 + ax + b\,) + c$$

என எழுதலாம். இதை

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 - c = (x - 3)\,(x^2 + ax + b\,)$$

என எழுதலாம் அல்லவா. அதாவது $x^3 - 2x^2 + x + 2$ இல் இருந்து c ஐக் கழித்தால், $x - 3$ இன் மடங்காகும். அப்போது c கண்டுபிடிக்க வேண்டிய எண். முன்னர் செய்ததைப் போன்று முதலில் a, பின்னர் b, இறுதியில் c என இவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம். நேரடியாக c ஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு ஓர் எளிய வழிமுறை உள்ளது. மேலே எழுதிய சமன்பாட்டை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கவும். x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும், சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள எண்கள் சமமாக வேண்டும்.

வலப்பக்கம் பூஜ்யம் ஆக்கினால்?

அதற்கு $x = 3$ என்று எடுத்தால் போதுமா?

$$3^3 - (2 \times 3^2\,) + 3 + 2 - c = (3 - 3) \times (x^2 + a \times 3 + b\,) = 0$$

இதை எளிதாக்கும்போது

$$14 - c = 0$$
$$c = 14$$

அப்படியானால் $x^3 - 2x^2 + x + 2$ என்ற பல்லுறுப்பிலிருந்து 14 ஐக் கழித்தால் $x - 3$ இன் மடங்காகும். அதாவது, $x^3 - 2x^2 + x - 12$ என்ற பல்லுறுப்பு, $x - 3$ என்ற பல்லுறுப்பின் மடங்காகும்.

ஒரு பல்லுறுப்பை $x - a$ என்ற வடிவத்திலுள்ள ஒரு படி பல்லுறுப்பால் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியை மட்டும் கணக்கிட இந்த வழிமுறையைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5$ என்ற பல்லுறுப்பை $x - 2$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம் எனப் பார்ப்போம்.

ஈவு தேவையில்லாமல் இருப்பதால், அதை $q\,(x)$ என்று எழுதலாம். மீதி b என்றும் எடுத்தால்,

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5 = (x - 2)\,q\,(x) + b$$

b மட்டுமே வேண்டும். எனவே இந்தச் சமன்பாட்டை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$b = (x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5) - (x - 2)\,q\,(x)$$

இதில் $x = 2$ என எடுத்தால்,

$$b = (2^4 + (2 \times 2^3) - (6 \times 2^2) + 2 + 5) - (2 - 2) \times q\,(2) = 15$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது மீதி 15.

இந்த முறையைப் பொதுவாக எழுதிப் பார்க்கலாம். $p\,(x)$ ஐ $x - a$ ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கின்ற மீதியைக் காண்பதற்கு,

$$p\,(x) = (x - a)\,q\,(x) + b$$

என்று எழுதலாம்.

இனி சமன்பாட்டை இவ்வாறு மாற்றி எழுதவும்.

$$b = p(x) - (x - a)\, q(x)$$

இனி இதில் $x = a$ என எடுத்தால்

$$b = p(a) - (a - a)\,(q(a)) = p(a)$$

என்றும் கிடைக்கும். அதாவது,

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ என்ற எண்ணாகும்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ஐ, $x + 2$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் கணக்கிட, முதலில் $x + 2 = x - (-2)$ என எழுதலாம். இனி மேலே எழுதிய கோட்பாட்டிற்கு ஏற்ப மீதி கிடைக்க முதலில் எழுதிய பல்லுறுப்பில் $x = -2$ என எடுத்தால் போதும். அதாவது மீதி.

$$(-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = -8 - 8 + 8 + 5 = -3$$

வகுப்பது $2x - 1$ ஆல் ஆனால்?

முதலில்

$$2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

என எழுதலாம். இனி $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ஐ $x - \frac{1}{2}$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியைக் கணக்கிட, முதல் பல்லுறுப்பில், $x = \frac{1}{2}$ என எடுக்கவும்.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 2 + 5 = 2\frac{5}{8}$$

$x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ஐ $x - \frac{1}{2}$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $2\frac{5}{8}$ ஆனபடியால்,

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right) q(x) + 2\frac{5}{8}$$

என எழுதலாம். இதைச் சற்று மாற்றி இவ்வாறு ஆக்கலாம்.

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = \frac{1}{2}(2x - 1)\, q(x) + 2\frac{5}{8}$$

இனி $\frac{1}{2} q(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை $r(x)$ என எழுதினால், இது இவ்வாறாகும்.

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)\, r(x) + 2\frac{5}{8}$$

அதாவது, $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ஐ $2x - 1$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதியும் $2\frac{5}{8}$ ஆகும்.

ஓர் ஒருபடி பல்லுறுப்பை வேறொரு பல்லுறுப்பின் காரணியா என அறிவதற்கும் மேலே எழுதிய கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதி பூஜ்யம் எனில் காரணி அல்லவா. பொதுக்கோட்பாட்டிற்கு ஏற்ப $p(x)$ ஐ $x - a$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும். அப்படியானால் $p(a) = 0$ எனில் $x - a$ என்ற பல்லுறுப்பு $p(x)$ இன் காரணி ஆகும்.

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பில் x ஆக a என்ற எண்ணை எடுக்கும் போது $p(a) = 0$ எனில் $x - a$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பு, $p(x)$ இன் காரணி ஆகும்.

$x - a$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பு $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பின் காரணி எனில் $p(a) = 0$ என முதலில் பார்த்தோம் அல்லவா. இப்போது அந்தக் கோட்பாட்டின் மறுதலைக் கோட்பாடாக.

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை $ax + b$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்? $ax + b$ காரணியா என்று எவ்வாறு சோதித்துப் பார்க்கலாம்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பல்லுறுப்புகளிலும், முதலில் உள்ளதை இரண்டாவது பல்லுறுப்பின் காரணியா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும். காரணி இல்லையெனில் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதியை எழுதுக.

i) $x - 1,\ x^3 + 4x^2 - 3x - 6$ ii) $x + 1,\ x^3 + 4x^2 - 3x - 6$

iii) $x - 2,\ x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ iv) $x + 2,\ x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

v) $2x - 1,\ 2x^3 - x^2 - 8x + 6$ vi) $3x - 1,\ 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பல்லுறுப்புகளிலும் முதல் பல்லுறுப்பை, இரண்டாவது பல்லுறுப்பால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவையும், மீதியையும் கணக்கிடவும்.

i) $x^3 - 1,\ x - 1$ ii) $x^3 - 1,\ x + 1$

iii) $x^3 + 1,\ x - 1$ iv) $x^3 + 1,\ x + 1$

(3) $p(x) = x^3 + x^2 + x$ என்ற பல்லுறுப்பையும் ஓர் எண்ணையும் கூட்டி $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்பை உருவாக்க வேண்டும்.

i) $x - 1$ என்ற பல்லுறுப்பு $q(x)$ இன் காரணி ஆக வேண்டுமெனில் கூட்ட வேண்டிய எண் எது?

ii) $x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பு $q(x)$ இன் காரணி ஆக வேண்டுமெனில் கூட்டுகின்ற எண் எது?

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி பல்லுறுப்புகளிலும் n எந்த வகை எண்ணல் எண் ஆனால் முதல் பல்லுறுப்பு, இரண்டாவது பல்லுறுப்பின் காரணியாகும் என்று கண்டு பிடிக்கவும்.

i) $x-1, x^n-1$ ii) $x-1, x^n+1$ iii) $x+1, x^n-1$

iv) $x+1, x^n+1$ v) x^2-1, x^n-1

(5) ax^3+bx^2+cx+d என்ற பல்லுறுப்பில் காரணி x^2-1 எனில் $a=-c$; $b=-d$ ஆக இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக

(6) $2x^3-3x^2+5x+1$ உடன் எந்த ஒருபடி பல்லுறுப்பைக் கூட்டினால், தொகை x^2-1 காரணி ஆன பல்லுறுப்பாக மாறும்?

x^2-4 இன் பெருக்கற்பலன் ஆன ஒரு மூன்றாம் படி பல்லுறுப்பின் குணகங்களின் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? x^2-4 க்குப் பதிலாக x^2-9 ஆனால்?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ இருபடி பல்லுறுப்புகளை ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவதற்கு உரிய வழிமுறைகளை விளக்குதல் ஒருபடி பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலாத இருபடி பல்லுறுப்புகளைப் பகுத்தறிதல். ⌘ $x-a, x+a$ என்பவை $p(x)$ இன் காரணியா எனச் சோதித்துப் பார்ப்பதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல். ⌘ ஒரு பல்லுறுப்பை, ஒருபடி பல்லுறுப்பால் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியை வகுத்துப் பார்க்காமல் கணக்கிடுதல்.			

11 புள்ளி விபரக் கணக்கு

சரியில்லாத சராசரி

அடுத்தடுத்து வாழ்கின்ற 10 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் இவ்வாறு அமைகிறது.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

இந்தக் கூட்டத்தில் உள்ள ஒரு குடும்பத்தின் சராசரி வருமானம்?

வருமானம் அனைத்தையும் கூட்டி, 10 ஆல் வகுத்தால் சராசரி 19285 ரூபாய் என்று கிடைக்கும்.

இனி இந்தப் பத்துக் குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தின் பல்வேறு தகவல்களுக்குப் பதிலாக, சராசரி தொகை மட்டும் கிடைத்தாலும், இவர்களின் மொத்தத்தில் உள்ள பெருளாதார நிலையைக் குறித்துப் பொதுவாகச் சிலவற்றைக் கூறலாம்;

- இவர்களின் மாத வருமானம் 19285 ரூபாயுடன் மிக நெருங்கி வரும் தொகை ஆகும்.
- எவருடைய மாத வருமானமும் 19285 ரூபாயிலிருந்து மிகக் கூடுதலாகவோ மிகக் குறைவாகவோ இல்லை.
- 19285 ரூபாயைவிடக் கூடுதல் மாதவருமானம் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கையும், இந்தத் தொகையைவிடக் குறைந்த வருமானம் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கையும் தோராயமாகச் சமம் ஆகும்.

இவர்களின் அருகிலேயே 175000 ரூபாய் மாதவருமானம் உள்ள ஒருவர் வசிக்கிறார் எனக் கருதவும். இப்போது 11 குடும்பங்களின் சராசரி வருமானம் எவ்வாறு ஆகிறது?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} \approx 33441 \text{ ரூபாய்}$$

இனி, இந்த விபரங்கள் ஒன்றையும் கூறாமல், இப்போது கிடைத்துள்ள சராசரியை மட்டும் கூறினால், இந்த 11 குடும்பங்களிலும் உள்ள மாத வருமானம்

சுமார் 30,000 ரூபாய் என்ற தவறான கருத்து உண்டாகும் அல்லவா. இந்த எண், பத்துக் குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தின் ஒன்றரை மடங்கை விட அதிகம் ஆகும். ஒரு காரியத்தைப் பற்றிய பல எண்களைப் பொதுக் கருத்து அளிக்கக் கூடியவகையில், ஓர் எண்ணாகச் சுருக்கவும் என்பது அல்லவா சராசரியைக் கணக்கிடுவதன் நோக்கம். ஆனால் மற்ற எண்களை விட மிகப் பெரியதோ, மிகச் சிறியதோ ஆன எண்கள் (எண்ணிக்கையில் குறைவாக இருந்தாலும் கூட) சராசரியில் மிக அதிகமாகத் தாக்கம் செலுத்துகின்றன.

நமது எடுத்துக்காட்டில், முதலில் உள்ள பத்து எண்களை விட மிகப்பெரிய ஒரேயொரு எண்ணே சரசாரியை மிக அதிகமாக மாற்றியது. இதைப்போன்று மிகப்பெரியதோ, மிகச் சிறியதோ ஆன எண்கள் சராசரியைக் குறித்துள்ள பொது அறிவைத் தவறாக்கும் பிற சூழல்களைக் கூறலாமா?

வேறொரு சராசரி

நமது எடுத்துக்காட்டில் உள்ள 11 குடும்பங்களின் மாத வருமானத்தைக் குறித்துள்ள சரியான குறிப்பைத் தருகின்ற வேறொரு எண்ணைக் கணக்கிடுவது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

வருமானங்கள் அனைத்தையும் எண்களின் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் எழுதி நடுவில் உள்ள எண்ணை எடுத்தால், 5 குடும்பங்களின் வருமானம் அதைவிடக் குறைவாகவும், மற்ற 5 குடும்பங்களின் வருமானம் அதைவிடக் கூடுதலாகவும் இருக்கும் அல்லவா.

முதலில் எண்களை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் எழுதலாம்.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

இதில் நடுவில் உள்ள எண் 19500. இதனை மேலே உள்ள எண்களின் இடைநிலை (median) என்று கூறுகிறோம்.

அதாவது, இந்த 11 குடும்பங்களின் இடைநிலை மாதவருமானம் 19500 ரூபாய் ஆகும்.

இதை வேறொரு முறையில் கூறலாம். மொத்தம் உள்ள 11 குடும்பங்களில் 5 குடும்பங்களின் மாத வருமானம் 19500 ஐ விடக்குறைவும், 5 இன் மாதவருமானம் 19500 ஐ விடக் கூடுதலும் ஆகும். அதாவது, இடைநிலை வருமானத்தைவிடக் குறைந்த வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும், இடைநிலை வருமானத்தை விடக்கூடுதல் வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் சமம் ஆகும்.

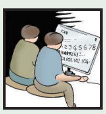
இனி முதலில் உள்ள 10 குடும்பங்களை மட்டும் எடுத்தால்? இவர்களின் மாத வருமானத்தை மட்டும் ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் எழுதினால், நடுவில் ஓர் எண்ணிற்குப் பதிலாக, 18600, 19500 என்ற இரு எண்கள் கிடைக்கும்.

இங்கும் இடைநிலையாக எடுக்க வேண்டியது, அதைவிடக் குறைந்த வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் அதைவிடக் கூடுதல் வருமானம் உள்ள குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாகின்ற விதத்தில் ஆகும். 18600 க்கும் 19500 க்கும் இடைநிலையாக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் இது சரியாகும். சாதாரணமாக இவற்றின் தொகையின் பாதியே

இடைநிலையாக எடுக்கப்படுகிறது.. அதாவது 10 குடும்பங்களின் இடைநிலை மாதவருமானம் $\frac{1}{2}$ (18600 + 19500) = 19050 ரூபாய்.

இடைநிலையான 19050 ரூபாய் என்பது சராசரியான 19285 ரூபாய் என்பதைப் போன்றே முதலில் உள்ள பத்துக் குடும்பங்களின் பொருளாதார நிலையைக் குறித்துள்ள பொது அறிவைத் தருகிறது அல்லவா. (சராசரிக்கும், இடைநிலைக்கும் இடையில் பெரிய வேறுபாடு இல்லை).

பதினொன்றாவது குடும்பத்தின் பெரிய வருமானம் இடைநிலையில் பெரிய மாற்றத்தை உண்டாக்கவில்லை என்பதே இங்கு முக்கியம். மட்டுமல்ல, சில குடும்பங்களின் இடைநிலை வருமானம் 19050 ரூபாய், அதில் ஒரு குடும்பத்தின் மாத வருமானம் 21000 ரூபாய் என்று மட்டும் கூறினால், இவற்றின் பாதிக்கு மேலான குடும்பங்களைவிட இந்தக் குடும்பத்திற்கு வருமானம் உண்டு என்றும் புரிந்து கொள்ளலாம்.



(1) நீளம் தாண்டுதல் பயிற்சியில் ஒருவர் தாண்டிய தூரங்கள் இவ்வாறாகும்.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

தூரங்கள் அனைத்தும் மீட்டரில் ஆகும். இவற்றின் சராசரியையும், இடை நிலையையும் கண்டு பிடிக்கவும். அவற்றின் இடையில் பெரிய வேறுபாடு இல்லாதது எதனால்?

(2) கேரளாவில் உள்ள பல்வேறு மாவட்டங்களில் 2015 செப்டம்பர் மாதத்தில் ஒரு வாரம் பெய்த மழையின் அளவுகள் சென்டிமீட்டரில் பதிவு செய்யப்பட்டன. பதிவு செய்யப்பட்ட அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

மாவட்டம்	மழையின் அளவு
காசர்கோடு	66.7
கண்ணூர்	56.9
கோழிக்கோடு	33.5
வயநாடு	20.5
மலப்புறம்	13.5
பாலக்காடு	56.9
திருச்சூர்	53.4
எர்ணாகுளம்	70.6
கோட்டயம்	50.3
இடுக்கி	30.5
பத்தனம்திட்டை	56.4
ஆலப்புழை	45.5
கொல்லம்	56.3
திருவனந்தபுரம்	89.0

இந்த வாரத்தில் கேரளாவின் மழையின் சராசரியையும் இடைநிலையை யும் கணக்கிடுக. சராசரியைவிட, இடைநிலை குறைந்தது எதனால்?

(3) கூட்டுத்தொடரில் உள்ள சில எண்களின் இடைநிலையும் சராசரியும் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

நிகழ்வெண்ணும் இடைநிலையும்

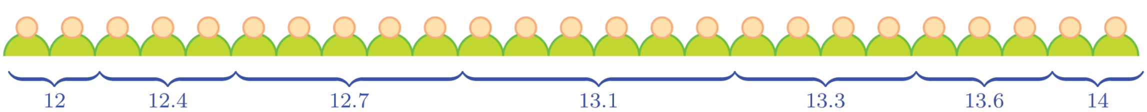
இரத்தத்தில் ஹீமோகுளோபின் அளவு சாதாரணமாக ஒரு டெசிலிட்டரில் (அதாவது 100 மில்லிலிட்டர்) எத்தனை கிராம் என்ற அளவு வீதத்தில் தான் கூறப்படுகிறது. 25 குழந்தைகளிடம் இரத்தப் பரிசோதனை நடத்தி, ஹீமோகு ளோபின் அளவுக்கு ஏற்ப அவர்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணையே இது.

ஹீமோகுளோபின் (கிராம் /டெ. லி)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

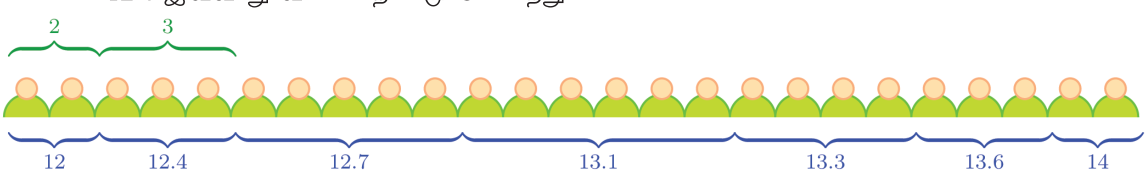
இதிலிருந்து ஹீமோகுளோபின் அளவின் சராசரியைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இடைநிலையை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

நடுவில் வருவதே இடைநிலை. அதாவது இந்த அட்டவணையில் உள்ள 25 குழந்தைகளில், 12 பேரின் ஹீமோகுளோபின் அளவு இடைநிலையை விடக்குறைவாக இருக்க வேண்டும்; 12 குழந்தைகளின் அளவு கூடுதலாகவும் இருக்க வேண்டும்.

இதைக் கணக்கிட, அளவுகளின் வரிசையில் அவர்களை நிறுத்தி, 13 ஆவது குழந்தையின் அளவை எடுத்தால் போதும். இவ்வாறு நிறுத்துவதாக நினைத்துக்கொள்வோம்.

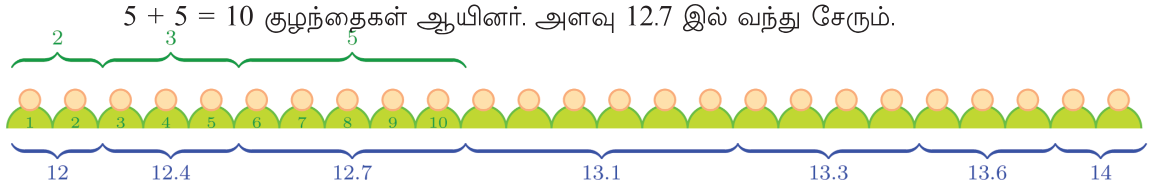


முதலில் உள்ள 2 குழந்தைகளின் ஹீமோகுளோபின் 12, அடுத்த 3 குழந்தைகளுக்கு 12.4 இவ்வாறு வரிசை நீண்டு போகிறது.



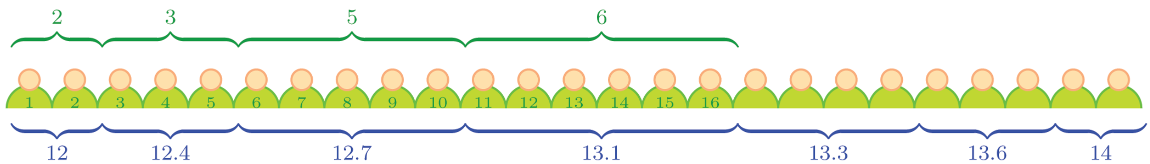
நமக்குத் தேவை 13 ஆவது குழந்தையின் அளவு அல்லவா. அட்டவணையின் எண்ணிக்கையைக் கூட்டிக்கூட்டி ஹீமோகுளோபின் தொடரில் இந்தக் குழந்தையின் இடத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். முதலில் உள்ள 2 கூட்டத்தில் உள்ள 2 + 3 = 5 குழந்தைகளை எடுக்கும்போது அளவு 12.4 வரை ஆகிறது. அதாவது, 5ஆவது குழந்தையின் அளவு 12.4.

மீண்டும் அடுத்தக் கூட்டத்தில் உள்ள 5 குழந்தைகளையும் சேர்த்துக்கூட்டினால் 5 + 5 = 10 குழந்தைகள் ஆயினர். அளவு 12.7 இல் வந்து சேரும்.

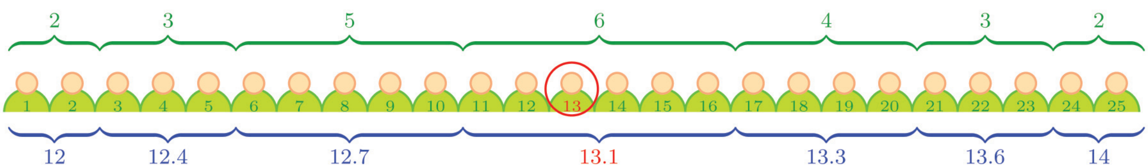


அதாவது 10 ஆவது குழந்தையின் அளவு 12.7

இனி அடுத்தக் கூட்டத்திலுள்ள 6 குழந்தைகளையும் சேர்த்துக் கூட்டினால் 10 + 6 = 16 குழந்தைகள் ஆயினர்.



நமக்குத் தேவை 13ஆவது குழந்தையின் அளவாகும். வரிசையில் 11 முதல் 16 வரை உள்ள குழந்தைகளின் அளவு 13.1 அல்லவா. அப்போது 13ஆவது குழந்தையின் ஹீமோகுளோபின் அளவும் 13.1 தான். இதுதான் அளவுகளின் இடைநிலையும்.

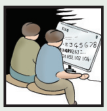


படத்திற்குப் பதிலாக இந்த அட்டணவணை ஆகலாம்.

ஹீமோகுளோபின் அளவு(கிராம்/ டெ.லி)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
12.0 வரை	2
12.4 வரை	5
12.7 வரை	10
13.1 வரை	16
13.3 வரை	20
13.6 வரை	23
14.0 வரை	25

அட்டவணையிலிருந்து 11 முதல் 16 வரை உள்ள குழந்தைகளின்

ஹீமோகுளோபின் அளவு 13.1 எனக் காணலாம். மொத்தக் குழந்தைகளின் நடுவில் உள்ள 13 ஆவது குழந்தையும் இந்தக் கூட்டத்தில் உள்ளதால் இடைநிலை 13.1 என்று கணக்கிடலாம்.



(1) கீழே உள்ள அட்டவணையில் ஒரு பகுதியில் வசிக்கும் 35 குடும்பங்கள் மாத வருமானத்தின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன:

மாதவருமானம் (ரூபாய்)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை
4000	3
5000	7
6000	8
7000	5
8000	5
9000	4
10000	3

இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

(2) ஒரு தொழிற்சாலையில் பல்வேறு பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை, தினக்கூலிக்கு ஏற்ப எழுதப்பட்டுள்ள அட்டவணையே இது.

தினக்கூலி (ரூபாய்)	பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை
400	2
500	4
600	5
700	7
800	5
900	4
1000	3

தினக்கூலியின் இடைநிலையைக் காண்க.

(3) ஒரு மருத்துவமனையில், ஒருவாரம் பிறந்த குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை எடைக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

குழந்தைகளின் எடை(கி.கிராம்)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

எடையின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

பிரிவுகளும் இடைநிலையும்

ஒரு வகுப்பில் உள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை, உயரத்திற்கு ஏற்ப வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உயரம் (செ.மீ.)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
135 – 140	5
140 – 145	8
145 – 150	12
150 – 155	11
155 – 160	5
160 – 165	4
மொத்தம்	**45**

இந்த வகுப்பில் உள்ள குழந்தைகளின் இடைநிலை உயரத்தை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

உயரத்தின் வரிசை அடிப்படையில் குழந்தைகளை நிறுத்தினால் நடுவில் வரும் குழந்தையின் உயரமே தேவை. மொத்தமாக 45 குழந்தைகள் உள்ளனர். நடுவில் வருவது, 23ஆவது குழந்தை.

அட்டவணையில் உள்ள உயரங்களைப் பலவகையாக வகைப்படுத்தியதில் எந்தப் பிரிவில் 23ஆவது குழந்தை உள்ளது என முதலில் காணலாம். முன்னர் செய்ததைப் போன்று ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ளவர்களைச் சேர்க்கும்போது மொத்தம் எத்தனை பேர் உள்ளனர் எனப் பார்க்கவும்.

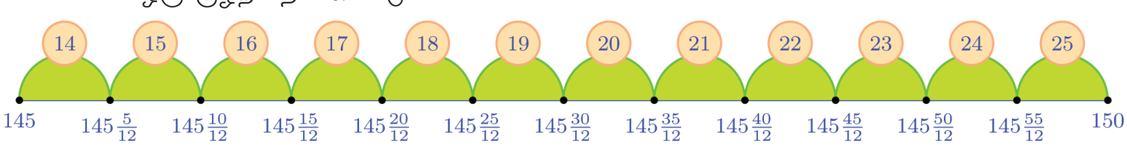
உயரம்	எண்ணிக்கை
140 ஐ விடக் குறைவு	5
145 ஐ விடக் குறைவு	13
150 ஐ விடக் குறைவு	25
155 ஐ விடக் குறைவு	36
160 ஐ விடக் குறைவு	41
165 ஐ விடக் குறைவு	45

அட்டவணையின் அடிப்படையில் 145 சென்டிமீட்டர் வரை உயரம் உள்ளவர்களை ஒன்றாகச் சேர்த்து எடுக்கும்போது, வரிசையில் 13ஆவது குழந்தை வரை உள்ளவர்கள் வருகின்றனர். 150 சென்டிமீட்டர் வரை உயரம் உள்ளவர்களையும் சேர்த்த போது 25ஆவது குழந்தை வரையுள்ளவர்கள் வருகின்றனர். இந்த இரு குழந்தைகளின் இடையில் அல்லவா நமக்குத் தேவையான 23ஆவது குழந்தை உள்ளது. அப்படியானால், இந்தக் குழந்தையின் உயரம் 145 சென்டிமீட்டருக்கும் 150 சென்டிமீட்டருக்கும் இடையில் எனவும் கிடைத்தது.

உயரம் மிகச் சரியாக அமைய என்ன செய்ய வேண்டும்?

14ஆவது குழந்தை முதல் 25ஆவது குழந்தை வரையுள்ள 12 குழந்தைகளின் உயரம் 145 சென்டிமீட்டருக்கும் 150 சென்டிமீட்டருக்கும் இடையிலாகும். இது அல்லாமல், இக்கூட்டத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு குழந்தையின் உயரம் தெரியாது அல்லவா.

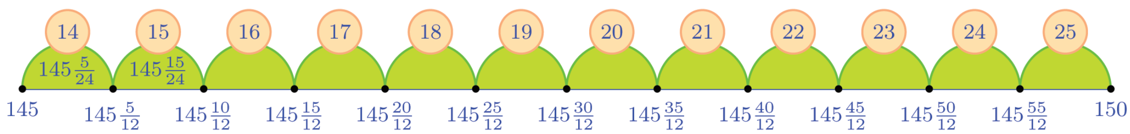
அப்போது சில சிந்தனைகள் தேவைப்படுகின்றன (வகைப்படுத்திய அட்டவணையிலிருந்தும் சராசரியைக் கணக்கிட சில சிந்தனைகள் தேவைப் பட்டன அல்லவா) 145 சென்டிமீட்டர் முதல் 150 சென்டிமீட்டர் வரை உள்ள 5 சென்டிமீட்டரை 12 சமப்பாகங்களாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு பிரிவிலிருந்தும் ஒரு குழந்தை என எடுக்கலாம்.



இதில் ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவிலும் உள்ள குழந்தையின் உயரம் இந்தத் துணைப் பிரிவின் சரியான நடுவிலேயே அமைகிறது என்றும் கருதலாம்.

அப்போது 14 ஆவது குழந்தையின் உயரம் 145 சென்டிமீட்டருக்கும், $145\frac{5}{12}$ சென்டிமீட்டருக்கும் மிகச்சரியான நடுவில் ஆகும். அதாவது, $145\frac{5}{24}$ சென்டிமீட்டர். அடுத்தக் குழந்தையினுடையதோ?

$145\frac{5}{12}$ சென்டிமீட்டருக்கும் $145\frac{10}{12}$ சென்டிமீட்டருக்கும் நடுவில், அதாவது, $145\frac{15}{24}$ சென்டிமீட்டர்.



தொடர்ந்து ஒவ்வொருவரின் உயரத்தையும் கணக்கிடலாமா? உயரம் கூடுவதன் அளவு வீதம் என்ன? இது வரை கணக்கிட்ட அனைத்தையும் பார்க்கலாம்.

- 14 ஆவது மாணவரின் உயரம் $145\frac{5}{24}$
- தொடர்ந்து ஒவ்வொரு மாணவரின் உயரமும் $\frac{5}{12}$ சென்டிமீட்டர் என்ற வீதத்தில் கூடும்.
- 14 ஆவது மாணவரிலிருந்து 23ஆவது மாணவரிடம் வரும்போது மொத்தம் 9 மாணவர்கள் உள்ளனர்.

அப்போது பிரச்சினை ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆயிற்று அல்லவா?

14 ஆவது உறுப்பு $145\frac{5}{24}$ உம், பொது வித்தியாசம் $\frac{5}{12}$ உம் உள்ள கூட்டுத்தொடரில் 23 ஆவது உறுப்பு என்ன?

23ஆவது மாணவரின் உயரம்

$$145\frac{5}{24} + \left(9\times\frac{5}{12}\right) = 145 + \frac{95}{24} = 148\frac{23}{24} \approx 148.9 \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

படம் ஒன்றும் வரையாமல் இதைப் போன்று ஒரு கணக்கைச் செய்து பார்ப்போம். ஒரு நிறுவனத்தில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை வயதுக்கு ஏற்ப வகைப்படுத்தி அட்டவணையாகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
25 – 30	6
30 – 35	8
35 – 40	12
40 – 45	20
45 – 50	16
50 – 55	6
மொத்தம்	68

இடைநிலை வயதைக் கணக்கிடலாம். இதில் ஆட்களின் எண்ணிக்கை 68 என்ற இரட்டை எண் என்பதால், ஆட்களை வயதுக்கு ஏற்ப வரிசைப்படுத்தி 34, 35 ஆவது இடங்களில் வருகின்றவர்களின் வயதுகளின் தொகையின் பாதியை எடுக்க வேண்டும்.

முதலில் கூட்டமாக நிகழ்வெண்களை எழுதலாம்.

வயது	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
30 ஐ விடக்குறைவு	6
35 ஐ விடக்குறைவு	14
40 ஐ விடக்குறைவு	26
45 ஐ விடக்குறைவு	46
50 ஐ விடக்குறைவு	62
55 ஐ விடக்குறைவு	68

இதிலிருந்து, வயதின் வரிசையில், 27 முதல் 46 வரையுள்ள இடங்களில் உள்ள 20 ஆட்கள், 40 க்கும் 45க்கும் இடையில் வயதுடையவர்கள் ஆவர். நமக்குத் தேவையான 34 ஆவது 35ஆவது இடங்களில் உள்ளவர்கள் இக்கூட்டத்தில் அல்லவா..

முன்னர் செய்ததைப் போன்று 40 முதல் 45 வரையுள்ள 5 ஆண்டுகளை 20 சமப்பாகங்களாகக் கொண்டு, இந்த ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவிலும் ஒருவர் வீதம் உண்டு என்றும் அந்த ஒருவரின் வயது துணைப்பிரிவின் நடுவில் உள்ள எண் ஆகும் என்றும் நினைத்துக்கொள்வோம். அப்போது ஒவ்வொரு துணைப்பிரிவின் நீளம் $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ஆண்டு.

இதற்கு ஏற்ப 27ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது, 40 ஆண்டினுடையவும், $40\frac{1}{4}$ ஆண்டினுடையவும் நடுவில், அதாவது $40\frac{1}{8}$ ஆண்டு; தொடர்ந்துள்ள ஒவ்வொருவரின் வயது $\frac{1}{4}$ ஆண்டு வீதம் கூடும் என்றே நினைத்தோம் அப்போது 34 ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது,

$$40\frac{1}{8} + \left(7\times\frac{1}{4}\right) = 40 + \frac{15}{8} = 41\frac{7}{8} \text{ வருடம்}$$

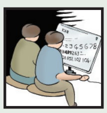
35 ஆவது இடத்தில் உள்ளவரின் வயது

$$41\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = 42\frac{1}{8} \text{ வருடம்}$$

இனி இடைநிலை வயது கிடைப்பதற்கு இந்த வயதுகளின் தொகைகளின் பாதியை எடுக்க வேண்டும்.

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{7}{8}+42\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

இவ்வாறு இடைநிலை வயது 42 எனக் காணலாம்.



(1) ஒரு பிரதேசத்தில் உள்ள சில வீடுகளை மின்சாரப் பயன்பாட்டின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை இவ்வாறாகும்.

மின்சாரப் பயன்பாடு (யூனிட்)	வீடுகளின் எண்ணிக்கை
80 – 90	3
90 – 100	6
100 – 110	5
110 – 120	8
120 – 130	9
130 – 140	4

மின்சாரப் பயன்பாட்டின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுக.

(2) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் பெற்றுள்ள கணக்குத் தேர்வின் மதிப்பெண்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே உள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 – 10	4
10 – 20	10
20 – 30	12
30 – 40	9
40 – 50	5

வகுப்பின் இடைநிலை மதிப்பெண்ணைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு அலுவலகத்தில் உள்ள அலுவலர்கள் ஓர் ஆண்டு கொடுத்த வருமான வரி அட்டவணை கீழே உள்ளது.

வருமான வரி (ரூபாய்)	அலுவலர்களின் எண்ணிக்கை
1000 – 2000	8
2000 – 3000	10
3000 – 4000	15
4000 – 5000	18
5000 – 6000	22
6000 – 7000	8
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3

வருமான வரியின் இடைநிலையைக் காண்க.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ பல அளவுகளைக் குறிப்பிடுவதற்கு, சராசரியைப் பயன்படுத்த இயலாத சூழல்களைப் பகுத்தறிதல். ⌘ பல அளவுகளின் இடைநிலையைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல். ⌘ வகைப்படுத்திய அட்டவணையிலிருந்து இடைநிலை கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.			

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes