ತರಗತಿ IX

ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಭಾಗ -2
PART -2

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ

ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ (SCERT), ಕೇರಳ

2016

KT 531-1/Maths-9(K) Vol-2

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ!

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ, ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶದ ಮತ್ತು ಜನತೆಯ ಕ್ಷೇಮ ಹಾಗೂ ಸಮೃದ್ಧಿಗಾಗಿ ಸದಾ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇನೆ.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಅಳತೆಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳ ಕಲಿಕೆಯಾಗಿ ಗಣಿತವು ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುವುದು. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ, ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ರೂಪಗಳಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುವಾಗ ಗಣಿತದ ಆಶಯ ತಲವು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗುವುವು. ಹೊಸ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಗಣಿತಪರವಾಗಿ ವಾಖ್ಯಾನಿಸಲು, ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಕೇತಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಸತ್ಯಾಂಶಗಳ ಕಾರ್ಯ ಕಾರಣ ಸಂಬಂಧವು, ಆಶಯಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತಿಯಾಗಿ ಬೆಳೆಯುವುದು. ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರವು ಬೆಳೆಯುವುದು. ಅದರ ಮುಂದಿನ ಹಂತಕ್ಕೆ ಸ್ವಾಗತ.

ಡಾ. ಪಿ.ಎ ಫಾತಿಮ
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

PARTICIPANTS

T.P Prakashan
GHSS, Vazhakadu, Malappuram

Unnikrishnan M.V
GHSS Kumbla, Kasaragod

Vijayakumar T.K
GHSS Cherkala, Kasaragod

Ramanujam R
HSST, MNKM GHSS Pulapetta, Palakkad

Anil Kumar M.K.
HSA, SKMJ HSS Kalpetta, Wayanad

Anil C.Ushus
GHS Nedumbrum, Thiruvalla, Pattanamthitta

Krishnaprasad M
PMSA HSS, Chappangadi, Malappuram

Ubaidulla K.C.
SOHSS, Arikode, Malappuram

Rameshan N.K
R.G. MHSS Mokeri, Kannur

Jabir K.
GVHSS Mogral, Kasaragod.

Sreekumar T.
GGHSS, Karamana, Thiruvanathapuram

K.J. Prakash
GMGHSS Pattam, Thiruvanathapuram

Shijo David C
CMSSHSS Trissur

Froyd Francis P
VHSS Valancheri, Malapuram

Cover

Rajeevan N T
GHSS Tariyod, Wayanad

Experts

Dr. E Krishnan
Prof. (Rtd) University College, Thiruvananthapuram

Dr. Ramesh Kumar P.
Asst. Professor, Kerala University

Venugopal C
Asst. Professor, Govt College of Teacher Education, Thiruvananthapuram

Dr. Sharachandran
Rtd. Deputy Director
Collegeate Education, Kottayam

Academic Co-ordinator

Sujith Kumar G.
Resarch Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

Translators

Balakrishna P.
BEMHSS, Kasaragod

Krishna Prakash S.
SNHS Perla

Raghava A.
GHSS Belluru

Harsha Kumar M.
SGKHS Kudlu

Rajesh Chandra
BEMHSS, Kasaragod

Prapulla Chandra C.H.
GHSS Adoor

Language Expert

Shridhara N.
Asst. Prof. Govt. College, Kasaragod

Course Co-ordinator

Dr. Faisal Mavulladathil
Research Officer, SCERT, Thiruvananthapuram

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ (SCERT)
ವಿದ್ಯಾಭವನ, ಪೂಜಪ್ಪುರ, ತಿರುವನಂತಪುರಂ–695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

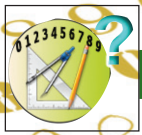
ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.

ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

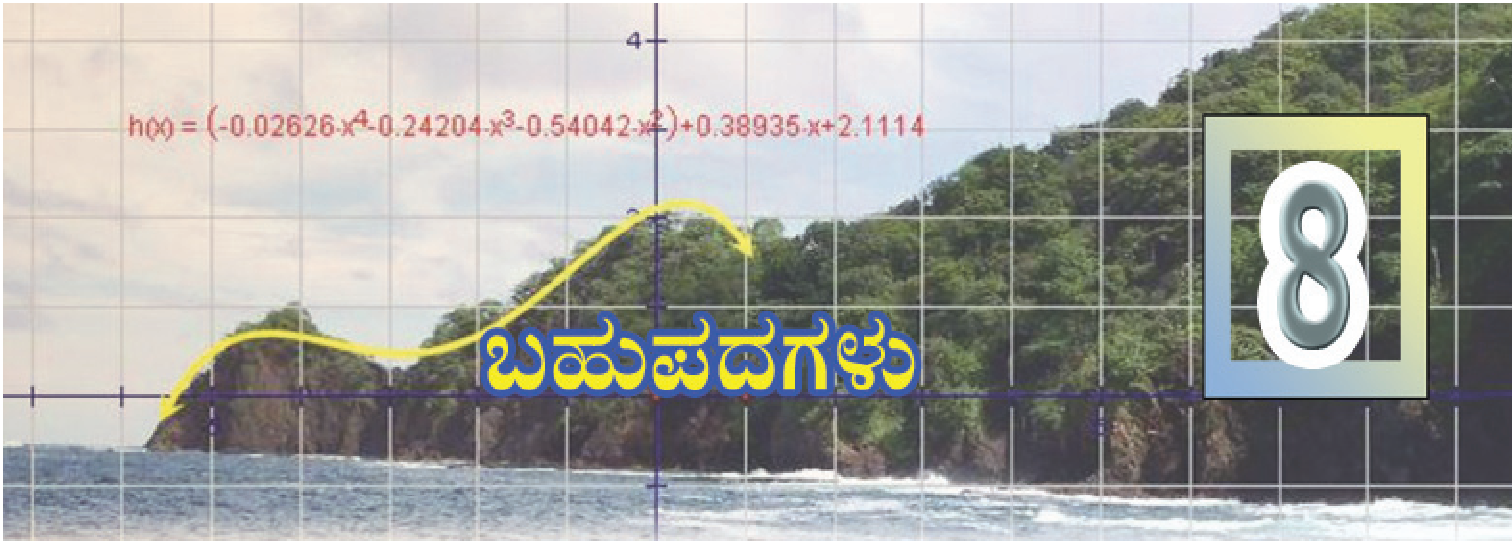
ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ

ಸಂಶೋಧನೆ

ಪುನರವಲೋಕನ



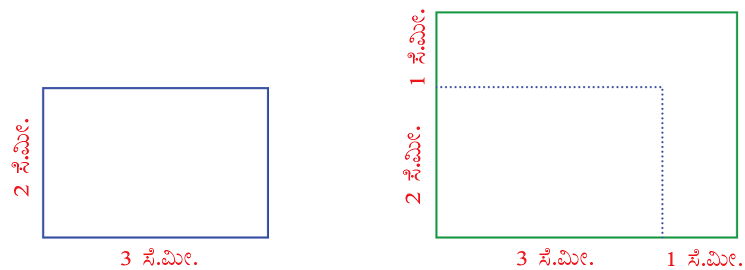
ಚರ್ಚಿಸೋಣ



8 ಬಹುಪದಗಳು

ಅಳತೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು.



ಹೊಸ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಈ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಸುತ್ತಳತೆ 14 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು.

ಮೊದಲಿನ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೂ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಲಾಯಿತು. ಒಟ್ಟು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆ, $10 + 4 = 14$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವುದಾದರೆ? ಎರಡನೇಯದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ $4 \times 2 = 8$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯು $10 + 8 = 18$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸುಲಭವಲ್ಲವೇ? ಕೂಡಿಸಿರುವ ಉದ್ದವು $2\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು

$$\left(4 \times 2\frac{1}{2}\right) + 10 = 20 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವುದು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೂ, ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗುವುದು.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ; ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವುದು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಬರೆದರೆ,

$$p = 4x + 10$$

ಇನ್ನು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸುತ್ತಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಥಟ್ಟನೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು 22 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

$3\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು 24 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

$3\frac{3}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯುವ

$x = 3$ ಎಂದಾದರೆ $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ ಎಂದಾದರೆ $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ ಎಂದಾದರೆ $p = 25$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p(3) = 22$$

$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$

$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p(x) = 4x + 10$$

ಹೀಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವ.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎರಡು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಮೂರು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಕೂಡಿಸಿರುವ ಉದ್ದದ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು ಹತ್ತರೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೂವರೆ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ , ಸುತ್ತಳತೆಯು ಹದಿನಾರು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗುವುದು.

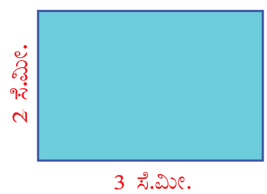
ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

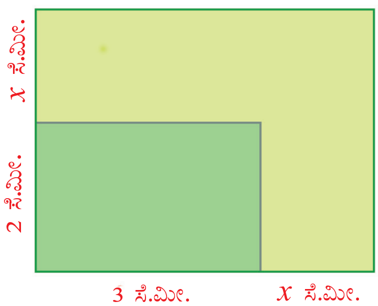
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $p = 4x + 10$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 1\frac{1}{2}$ ಎಂದಾದರೆ, $p = 16$

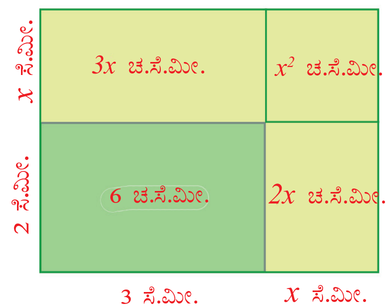
ಇದರಲ್ಲಿ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ p ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, p ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ $p(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ, ಆಗ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

> ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು $p(x) = 4x + 10$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡುವ. ಹಲವು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ನೋಡುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಕೂಡಿಸುವ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ.







ಚಿತ್ರದಿಂದ ಹೊಸ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸರ್ವಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ)

ಸುತ್ತಳತೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $a(x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

ಇದರಿಂದ

$$a(1) = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 4 + 10 + 6 = 20$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ $1\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $15\frac{3}{4}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 20 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದ 1, 2, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಅಂಚುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಘನಫಲ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡುವ. ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಲು, ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವಂತೆ

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇನ್ನು ಇದನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು; ಅದಕ್ಕೆ ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

$$(x + 1)(x^2 + 5x + 6) = x^3 + 5x^2 + 6x + x^2 + 5x + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

ವಿವರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಅಂಚುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು $v(x)$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. 49 ಮೀಟರ್/ಸೆಂಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲಕ್ಕಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ ವೇಗವು 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು, 5 ಸೆಕೆಂಡು ಆಗುವಾಗ ವೇಗವು 0 ಆಗುವುದು ಮತ್ತು ನಂತರದ ಪ್ರತೀ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುವ ವೇಗದೊಂದಿಗೆ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರುವೆವು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ, **ಋಣವೇಗ** ಎಂಬ ಭಾಗ) ಸಮಯ ಮತ್ತು ದೂರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವು ತಿಳಿದಿದೆ. x ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗವನ್ನು, ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ $s(x)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

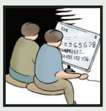
$$s(x) = 49 - 9.8x$$

ವಿವಿಧ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿರುವ ವೇಗವನ್ನು ಇದರಿಂದ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಸಮಯ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ವೇಗ $s(x)$	49	39.2	29.4	19.6	9.8	0	–9.8	–19.6	–29.4	–39.2	–49

ಇದರ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಂದ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಋಣವಾಗಿ ಬರುವುದರ ರಹಸ್ಯವೇನು? ಇದರ ಭೌತಿಕವಾದ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ ಯಾವುದು?

?



(1) ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ, ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

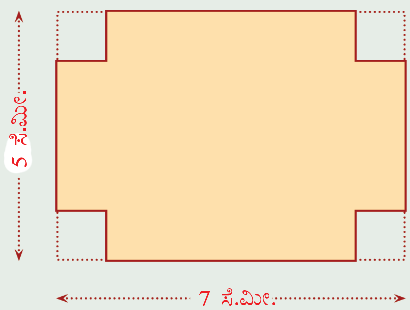
i) ಇವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು $p(x)$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದು x ಮತ್ತು $p(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

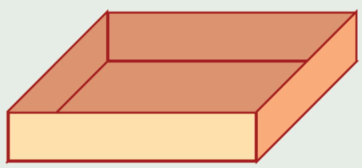
ii) ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು $a(x)$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದು x ಮತ್ತು $a(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

iii) $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮ ಕಾಣುವುದೇ?

iv) $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, $a(4)$, $a(5)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮ ಕಾಣುವುದೇ?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದಲೂ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಮೇಲಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು.





i) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ii) ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು $v(x)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, x ಮತ್ತು $v(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

iii) $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(1\frac{1}{2}\right)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಉಂಟು ಮಾಡಿದ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $a(x)$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

i) x ಮತ್ತು $a(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ii) $a(10)$, $a(40)$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು ಯಾಕೆ?

iii) x ಆಗಿ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವಾಗ $a(x)$ ಆಗಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನಾಗಿರಬಹುದು?

ವಿಶೇಷ ವಾಚಕಗಳು

ಹಲವು ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳೊಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೆ. ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪ್ರಾರಂಭದ ಆಯತ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು

$$p(x) = 4x + 10$$

ಎಂದು ಬರೆದೆವು. ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂಬುದರ ಬದಲಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 10 ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿಯೂ ಇದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಂದ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಹಲವು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ.

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $s(x) = 49 - 9.8x$

ಆಯತದಿಂದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಿದಿರಲ್ಲವೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡಿರಿ. Min = 0, Max = 2.5 ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ a ಉಂಟುಮಾಡಿರಿ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 7 – 2a, 5 – 2a ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ 3D Graphics ತೆರೆಯಿರಿ. (View → 3D Graphics) ನಾವು ರಚಿಸಿದ ಆಯತ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. Extrude to Prism or Cylinder ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಯ ಎತ್ತರವಾಗಿ ಸ್ಲೈಡರ್‌ನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿರಿ. Volume ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಸರಿಸಿ a ಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯೂ ಘನಫಲವೂ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿರಿ.

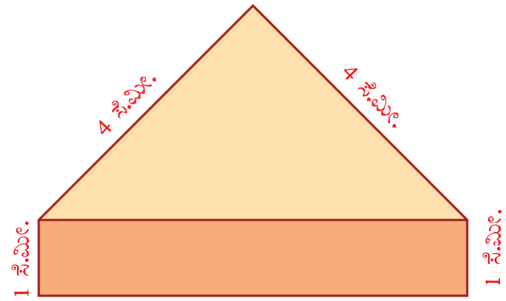
ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಲವು ಘಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಅಂತಹ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದೋ ಕಳೆಯುವುದೋ ಮಾತ್ರ ಇಂತಹವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವುದು. ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಸೇರಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೆಸರೇ ಬಹುಪದ (polynomial).

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಅಲ್ಲದೆ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ. ಸಣ್ಣ ಭುಜವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು

$$\sqrt{x^2+(x+1)^2} = \sqrt{2x^2+2x+1} \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಾಣಬೇಕು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆ ಇರುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ನಿರ್ವಚನದ ಪ್ರಕಾರ ಇದೊಂದು ಬಹುಪದವಲ್ಲ.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.
ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಅಳತೆ $4\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಆಗ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $4\sqrt{2}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಒಟ್ಟು $8 + 4\sqrt{2}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ? ಈ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\,x$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಲ್ಲಿ 2ರ ವರ್ಗಮೂಲವಿದೆ. ಆದರೆ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ ಎಂಬೀ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾತ್ರ ಇದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಬಹುಪದವೇ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಎಂದಾದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯು

$$2x + \frac{50}{x} \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಿಯೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಬಹುಪದವಲ್ಲ.

ಒಂದು ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘಾತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಇರುವ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಬಹುಪದದ ಘಾತಸೂಚಿ (degree of the polynomial) ಎನ್ನುವರು. ಆಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಹುಪದದ ಘಾತಸೂಚಿಯು 2, ಎರಡನೆಯದರ ಘಾತ ಸೂಚಿ 3, ಮೂರನೆಯದರ ಘಾತಸೂಚಿ 1.

ಘಾತಸೂಚಿ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹಪದ ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು 1ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ (first degree polynomial), ಘಾತಸೂಚಿಯು 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು ಎರಡನೇ ಘಾತದ

ಬಹುಪದ (second degree polynomial) ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಘಾತ ಸೂಚಿಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯುವ.

ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax + b$

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax^2 + bx + c$

ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಎಂಬೀ ಅಕ್ಷರಗಳು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, xನ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ a, b, c, d ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲ.

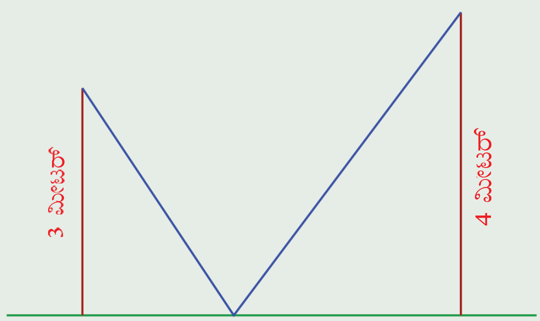
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೋ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಯಾವುದೂ ಆಗಬಹುದು.

(1) ಕೆಳಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಬಹುಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಯಾಕೆ ಎಂದು ಕಾರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) ಚೌಕಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮೈದಾನದ ಸುತ್ತಲೂ 1 ಮೀಟರ್ ಅಗಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಲು ದಾರಿಯಿದೆ. ಮೈದಾನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ದಾರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ.

ii) 7 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಮತ್ತು 3 ಲೀಟರ್ ಆಮ್ಲ ಸೇರಿರುವ ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಎರೆಯುವ ಆಮ್ಲದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿರುವ ಆಮ್ಲದ ಶೇಕಡಾಮಾನದಲ್ಲುಂಟಾದ ಬದಲಾವಣೆ.

iii) 3 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಎರಡು ಕಂಬಗಳನ್ನು 5 ಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನೆಲದಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಗೆ ನೆಡಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಕಂಬದ ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎಳೆದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ಎರಡನೇ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಬೇಕು.



ಒಂದು ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕೆ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಕಟ್ಟಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕಿರುವ ದೂರವು ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದವೂ ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ.

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಯಾವುದೆಲ್ಲ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

i) ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಮೊತ್ತ

ii) ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲದ ಮೊತ್ತ

iii) ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಳೆದಿರುವುದರೊಳಗಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧ.

(3) ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $p(1) = 1 \;\; p(2) = 3$ ಆಗಿರುವ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ

ii) $p(1) = -1 \;\; p(-2) = 3$ ಆಗಿರುವ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ

iii) $p(0) = 0, p(1) = 2, \; p(2) = 6$ ಆಗಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ

iv) $p(0) = 0, p(1) = 2,$ ಆಗಿರುವ ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳು

ಬಹುಪದ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

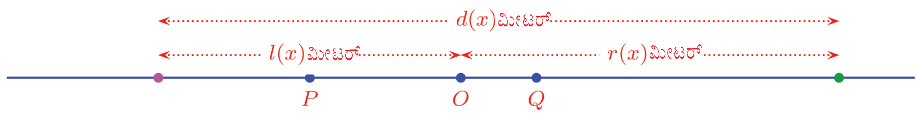
ಉದ್ದವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ O ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ 2 ಮೀಟರ್ ಎಡಕ್ಕೆ P ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. P ಯಿಂದ ಒಂದು ವಸ್ತು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಎಡಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ವೇಗವು 1 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು. ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡು ಕಳೆದಾಗ ಈ ವಸ್ತು O ವಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಎಡಭಾಗಕ್ಕಾಗುವುದು? $2\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡಾದಾಗಲೋ?

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದು ನೋಡುವ. x ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ, O ದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ $l(x)$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$l(x) = x + 2$$

ಇನ್ನು O ವಿನ 1 ಮೀಟರ್ ಬಲಭಾಗದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಸ್ತುವು 2 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವುದೆಂದೂ ಭಾವಿಸಿರಿ. ಇದರ ದೂರ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಒಂದು ಬಹುಪದವಾಗಿ ಬರೆಯುವ. x ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಇದು O ನಿಂದ $r(x)$ ಮೀಟರ್ ಬಲಕ್ಕೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$r(x) = 2x + 1$$



5 ಸೆಕೆಂಡಾಗುವಾಗ ಈ ವಸ್ತುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರ ಏನಾಗುವುದು?

ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗಿರುವ ವಸ್ತು O ದಿಂದ $l(5)$ ಮೀಟರ್ ಎಡಕ್ಕೂ, ಬಲಭಾಕ್ಕೆ ಹೋಗಿರುವ

ವಸ್ತು O ದಿಂದ $r(5)$ ಮೀಟರ್ ಬಲಕ್ಕೂ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಅವುಗಳೊಳಗಿರುವ ಅಂತರ $l(5) + r(5)$ ಮೀಟರ್

$$l(5) = 5 + 2 = 7$$

$$r(5) = (2\times 5) + 1 = 11$$

$$l(5) + r(5) = 7 + 11 = 18$$

ಅಂದರೆ, 5 ಸೆಕೆಂಡಾದಾಗ ವಸ್ತುಗಳೊಳಗೆ 18 ಮೀಟರ್ ಅಂತರವಿರುವುದು. 10 ಸೆಕೆಂಡಾದಾಗಲೋ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲೂ $l(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಬದಲಾಗಿ, ವಸ್ತುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವಾಗಿ ಬರೆದರೋ?

x ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರ $d(x)$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$d(x) = (x + 2) + (2x + 1) = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

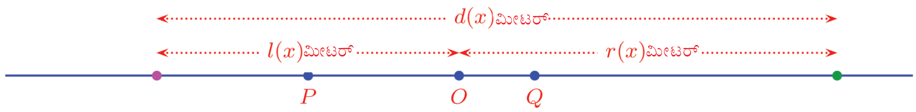
ಆಗ 10 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, 10ರೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿ ಅದರ ಮೂರು ಮಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

$$d(10) = 3\times 11 = 33 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$d(x) = l(x) + r(x)$$

ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಆಗ $d(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $l(x)$, $r(x)$ ಎಂಬೀ ಬಹುಪದಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$q(x) = 2x^2 + 5x - 1$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (x^2 - 2x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\ &= (x^2 + 2x^2) + (5x - 2x) + (3 - 1) \\ &= 3x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

ಕೂಡಿಸಿದಂತೆಯೇ ಕಳೆಯಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

$$
\begin{aligned}
p(x) - q(x) &= (x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 5x - 1) \\
&= (x^2 - 2x + 3) - 2x^2 - 5x + 1 \\
&= (x^2 - 2x^2) - (2x + 5x) + (3 + 1) \\
&= -x^2 - 7x + 4
\end{aligned}
$$

ಗುಣಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

$$
\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (x^2 - 2x + 3)\,(2x^2 + 5x - 1) \\
&= (2x^4 + 5x^3 - x^2) - (4x^3 + 10x^2 - 2x) \\
&\quad + (6x^2 + 15x - 3) \\
&= (2x^4 + (5x^3 - 4x^3) + (6x^2 - 10x^2 - x^2) \\
&\quad + (15x + 2x) - 3 \\
&= 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 17x - 3
\end{aligned}
$$

ಘಾತವೂ ಕ್ರಮವೂ

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ಎಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ? $(x + 1)^3$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $x^2 + 2x + 1$ ನ್ನು $(x + 1)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

$$
\begin{aligned}
(x + 1)^3 &= (x^2 + 2x + 1)\,(x + 1) \\
&= x^3 + 3x^2 + 3x + 1
\end{aligned}
$$

ಎಂದುಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಇದನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ $(x + 1)^4$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ). $x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3 \ldots$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

… … … … …

ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿದೆಯೇ? $(x + 1)^5$ ಏನಾಗಿರುವುದೆಂದು ಗುಣಿಸಿ ನೋಡದೆ ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದೇ?

(1) $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $q(x) = x^2 + 4x + 1$, $s(x) = p(x) + q(x)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು $p(10)$, $q(10)$, $s(10)$, $p(10) + q(10)$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) $x^2 + 4x - 5$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $2x^2 - 3x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ ಸಿಗುವುದು?

(3) $x^2 + 4x - 5$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಿಂದ ಯಾವ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ $2x^2 - 3x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ ಸಿಗುವುದು?

(4) $p(x) + q(x) = x^2 - 4x + 1$, $p(x) - q(x) = x^2 + 5x - 2$ ಆಗುವಂತೆ $p(x)$, $q(x)$ ಎಂಬೀ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $(x + 1)\,p(x) + (x - 1)\,p(x)$

ii) $(x + 1)\,p(x) - (x - 1)\,p(x)$

iii) $\frac{1}{2}(x + 1)\,p(x) - \frac{1}{2}(x - 1)\,p(x)$

ಸಂಶೋಧನೆ

- ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದವನ್ನು $(x-1)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಬಹುಪದದ ಸಂಖ್ಯಾ ಗುಣಕಗಳ ವಿಶೇಷತೆ ಏನು? $(x+1)$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೋ? (x^2-1) ಆದರೋ?

ಪುನರವಲೋಕನ

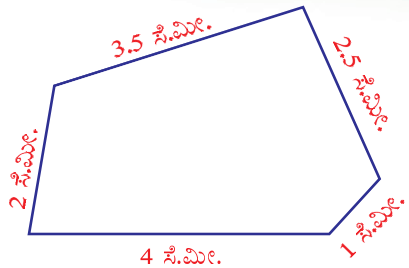
ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವಾಚಕಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು, ಅವುಗಳಿಂದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. • ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಕಾಣುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು. • ಬಹುಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಅಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು.			

9

ವೃತ್ತಗಳ ಅಳತೆಗಳು

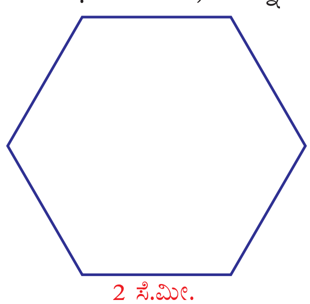
ವೃತ್ತವೂ ಬಹುಭುಜಗಳೂ

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸುಲಭ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



ಸುತ್ತಳತೆ $4 + 1 + 2.5 + 3.5 + 2 = 13$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಸಮಬಹುಭುಜವಾದರೆ, ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ.

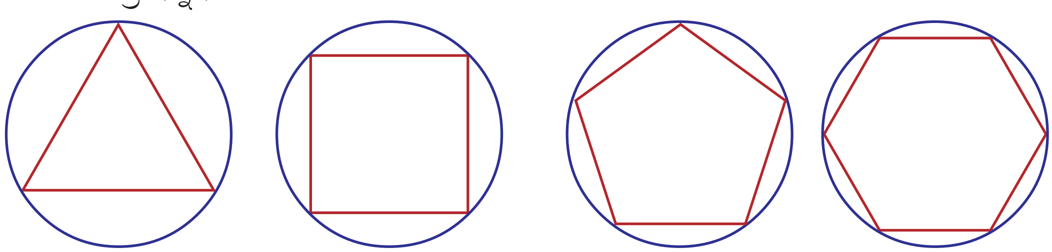


ಸುತ್ತಳತೆ $6 \times 2 = 12$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ವೃತ್ತವಾದರೇ?

ನೂಲು ಅಥವಾ ದಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಳೆದು ನೋಡಬಹುದು; ಅಳೆಯದೇ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಲ್ಲವೇ ಗಣಿತದ ಸ್ವಾರಸ್ಯ.

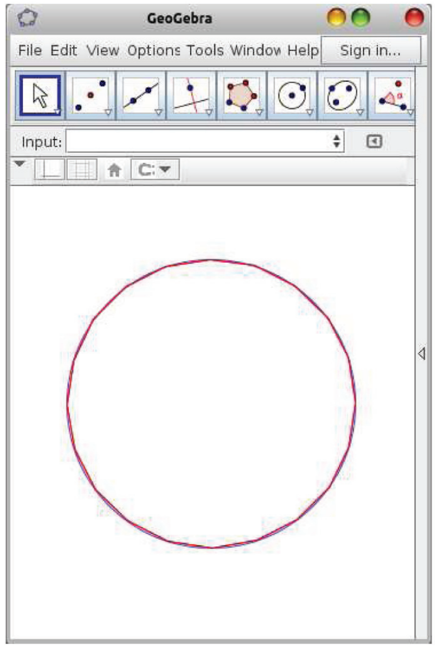
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುವಂತೆ, ಅದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

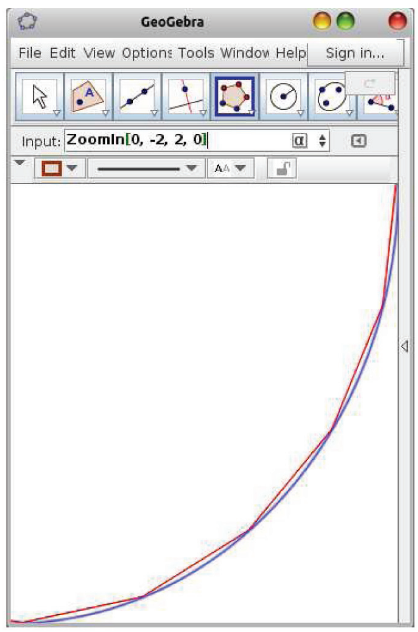
ಇದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ 20 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು GeoGebra ದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಬಹುಭುಜವನ್ನೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ?



ವೃತ್ತವೂ ಬಹುಭುಜವೂ

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. Min = 3, Max = 100 ಆಗುವಂತೆ Integer Slider ತಯಾರಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Angle with Given Size ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ. ಈಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಕೂಡಾ ಲಭಿಸುವುದು. Regular Polygon ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವು ಲಭಿಸುವುದು. Distance or Length ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಹುಭುಜದ ಒಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಲಭಿಸುವುದು. ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಈ ರೀತಿಯ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

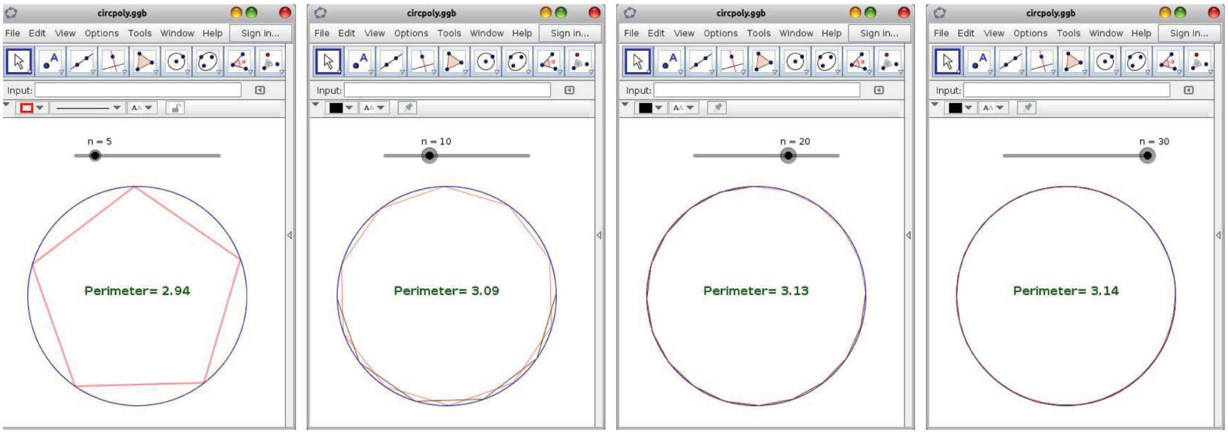
ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿ ತೋರಿಸುವ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ.



ಆಗ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೇ ಹೆಚ್ಚಾದರೂ ಬಹುಭುಜವು ವೃತ್ತವಾಗಲಾರದು. ಆದರೆ ಅದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿರವಾಗಿಬರುವುದು.

ಏನೇ ಆದರೂ, ಈ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ನಿಕಟವಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದಲ್ಲವೇ; ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಅದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸನಿಹ ತಲುಪುವುದು. ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೇ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಇದರ ಗಣಿತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಬರೆದು ನೀಡಿದರೆ, ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದನ್ನು ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು. ವ್ಯಾಸ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ 5,10,20,30 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರುವುದರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

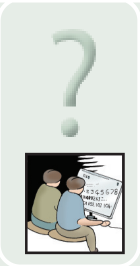


ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ (ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಥವಾ ಮೀಟರ್ ಏನೇ ಆದರೂ) ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆಗ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿವೆ.

- 2.94, 3.09, 3.13, 3.14, . . . ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಿಕಟವಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದು?
- ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವ್ಯಾಸ 1 ಅಲ್ಲದ ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರವನ್ನು ಮೊದಲು ಹೇಳುವ.

ಅದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ.



(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಮಧ್ಯಮರೇಖೆಗಳು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

i) ವ್ಯಾಸ1ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಅಂತಹ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಚೌಕದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳೂ ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿವೆ. ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

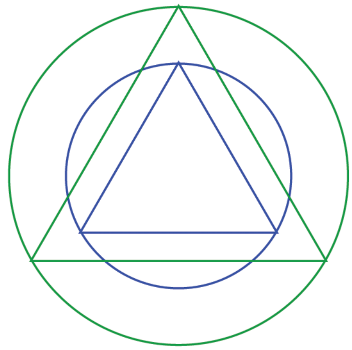
(3) ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಹುಭುಜಗಳ ಮೂಲಕ

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಚೌಕದ ಹಾಗೂ ಷಡ್ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳೊಂದಿಗೆ ತುಲನೆ ಮಾಡಿರುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದಿಂದಲೇ ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬಾಬಿಲೋನಿಯದ ಕ್ರಿ.ಪೂ.1600 ರದೆಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವ ಆವೆ ಮಣ್ಣಿನ ಒಂದು ಫಲಕದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಅಂತಃಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ, ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $\frac{24}{25}$ ಭಾಗ ಇದು ಸರಿಸುಮಾರು ಸರಿಯಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಕೆಲವು ಬಹುಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಕೆ ಮಾಡುವುದರ ಬದಲು, ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಕ್ರಮೇಣ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು ಎಂಬ ಚಿಂತನೆ ಉಂಟಾದುದು ಗ್ರೀಕ್‌ನಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಕ್ರಿ. ಪೂ. ಐದನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಆಂಟಿಫೋನ್ ಮುಂಡಿಸಿರುವ ಈ ವಿಧಾನವು, ನಾಲ್ಕನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಯುಡೋಕ್ಸ್‌ಸ್ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದನು. ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ಕ್ರಿಯಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿರುವುದು, ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ, ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿಯೇ ಇಂದಿಗೂ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಓರ್ವನೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸ್ ಆಗಿರುವನು.

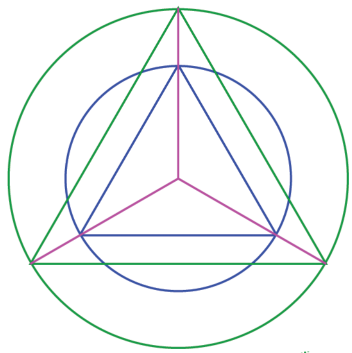
ವ್ಯಾಸವೂ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ

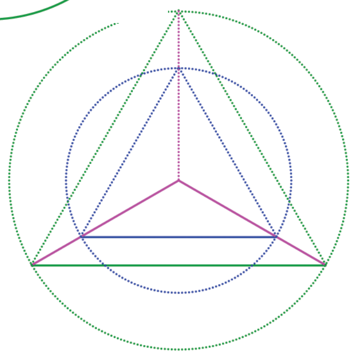
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಕೇಂದ್ರವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳು. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವುದರ ಪ್ರಮಾಣವೇನು?

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶಿರಗಳನ್ನೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ನೋಡುವ.





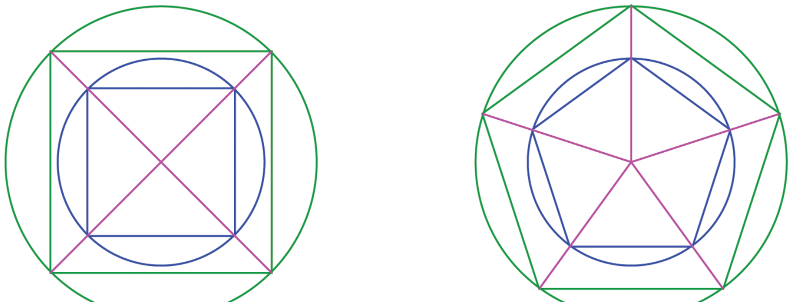
ಈ ಗೆರೆಗಳು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮೂರು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಕೆಳಭಾಗದ ಒಂದು ಜತೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸುವ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶಗಳಾಗಿವೆ (ಕಾರಣ?). ಎಡಭಾಗದ ಅಥವಾ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು, ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

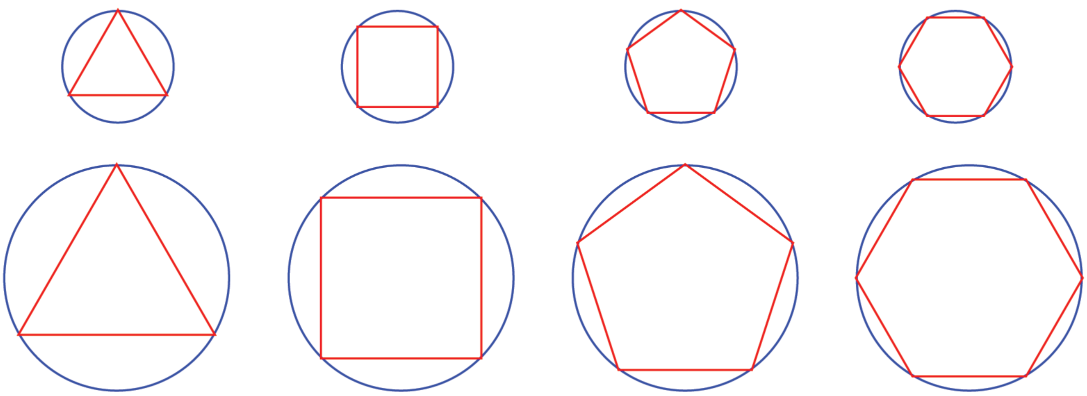
ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ; ಆಗ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೂ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ವ್ಯಾಸಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಂಬುದು ವ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸುವ.



ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು, ಆಯಾ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯೆಡೆಗೆ ಸಾಗುವುದು. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ p_1, ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ p_2, ಪಂಚಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ P_3, ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು c ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಆಗ $p_1, p_2, p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? $p_1, p_2, p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಯೆಡೆಗೆ

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ a ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ಮತ್ತು m, n ಎಂಬೀ ಹೆಸರುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು Interger Slider ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯ a ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ತ್ರಿಜ್ಯ ma ಆಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರಿ. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗುವಂತೆ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. m = 2 ಆಗುವಾಗ (ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಸಣ್ಣದರ ಎರಡು ಮಡಿ) ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. m = 3 ಆಗುವಾಗಲೋ? ಮೊದಲನೆಯ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟೇ ಆದರೂ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದೇ? a ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದರಿಂದ $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2c$ ಯೆಡೆಗೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ಯೋಚಿಸುವಾಗ ಅವುಗಳು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೆಡೆಗೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಹಾಗೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಎರಡನೆಯ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು ಎರಡು ಮಡಿಯ ಬದಲು ಇತರ ಯಾವುದೇ ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಅದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಗಿದೆ.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು;

ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ವ್ಯಾಸಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಆಗ ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಹಾಗೆ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತು.

?

(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರಚಿಸಿದ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ 24 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

  i) ಇದೇ ವೃತ್ತದ ಶಿರಗಳಿರುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು.

  ii) ಈ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿಯಷ್ಟು ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

  iii) ಇದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳಿರುವಂತೆ ರಚಿಸುವ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಸರಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಇದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ವ್ಯಾಸ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸುಮಾರು 6.28 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳೆದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ವ್ಯಾಸ 3 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳೆಯದೆಯೇ ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು?

ಹೊಸತೊಂದು ಲೆಕ್ಕ

ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆಯೆಂಬ ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ.

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಂತೆಯೇ ಹೀಗೊಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಇದು ಹದಿನೈದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೂ ಆಗಬಹುದು. (Options → Rounding) ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೀಗೆ ಸಿಗುವುದು;

ಭುಜಗಳು	ಸುತ್ತಳತೆ	ಭುಜಗಳು	ಸುತ್ತಳತೆ
3	2.5981	15	3.1187
4	2.8284	20	3.1287
5	2.9389	25	3.1333
6	3.0000	30	3.1359
7	3.0372	35	3.1374
8	3.0615	40	3.1384
9	3.0782	45	3.1390
10	3.0902	50	3.1395

ಆಗ ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಸುಮಾರು 3.14ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಭುಜದ ಉದ್ದ 1ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದದ ಹಾಗೆಯೇ ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಕರ್ಣದ ಲೆಕ್ಕದಂತೆಯೇ ಇದನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಲು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಇದರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವುದು ಹದಿನೆಂಟನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{3}$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚಿಹ್ನೆಯಿದೆ; π

ಇದು ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ "ಪೈ" (pi) ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ವ್ಯಾಸವು 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ , ವ್ಯಾಸ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ವ್ಯಾಸ $1\frac{1}{2}$

ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ $\frac{3}{2}\pi$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ವ್ಯಾಸದ π ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿದೆ.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವರು.

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ 2π ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿದೆ.

ಹೆಸರು ಬಂದ ದಾರಿ

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದರೊಂದಿಗೆ ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಡಿಯೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರು. ಅನಂತರದ ಸಂಶೋಧನೆಯು ಅದು ಎಷ್ಟು ಮಡಿ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿತ್ತು. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗಳಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ವಿವಿಧ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ, ವಿವಿಧ ಕಾಲಘಟ್ಟಗಳಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗಳು ಇನ್ನಷ್ಟು ನಿಖರವಾದುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದುದು ಬಹಳಷ್ಟು ಕಾಲದ ನಂತರವಾಗಿದ್ದರೂ, ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದಿರಬೇಕು.

ಈ ವೃತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ π ಎಂದು ಹೆಸರಿಟ್ಟದ್ದು ಕ್ರಿ.ಶ 1707ರಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲೇಂಡಿನ ವಿಲ್ಯಂ ಜೋನ್ಸ್ ಎಂಬ (ಅಷ್ಟೊಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಲ್ಲದ) ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾಗಿದ್ದಾನೆ.

ಸ್ವಿಜರ್‌ಲೇಂಡಿನಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಲಿಯನ್‌ಹಾರ್ಡ್ ಯೂಲರ್‌ನು (Leonhard Euler) ಅವನ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ನಂತರ ಚಿಹ್ನೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಪ್ರಚಾರ ಲಭಿಸಿತು ಮತ್ತು ಅದು ಸ್ಥಿರವಾಯಿತು.

ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ π ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಧ್ಯ. ಕ್ರಿಸ್ತಪೂರ್ವ ಮೂರನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು 96 ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವ್ಯಾಸದ $3\frac{10}{71}$ ಮಡಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ $3\frac{1}{7}$ ಮಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದನು. ಇಂದಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ನಾಲ್ಕು ದಶಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ,

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ನ್ನು ಬಹಳಷ್ಟು ಕಾಲದ ವರೆಗೆ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದುದಾಗಿದೆ.)

ಕ್ರಿ.ಶ. ಹದಿನಾಲ್ಕನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಮಾಧವನು ಅತಿ ನಿಖರತೆಯಿಂದ π ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

$$\pi = 3.1415926535...$$

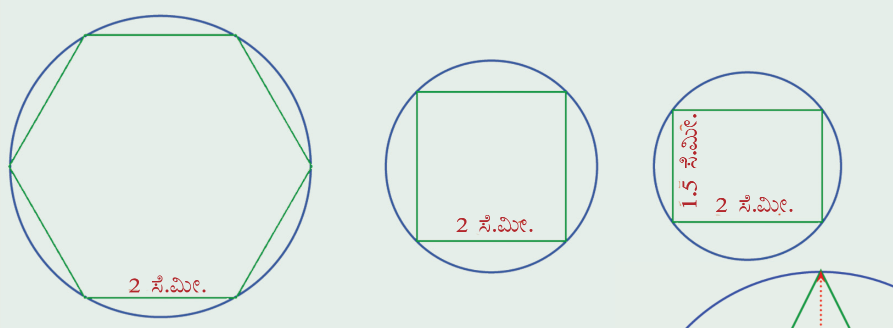
ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಮಾತ್ರವೇ π ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ

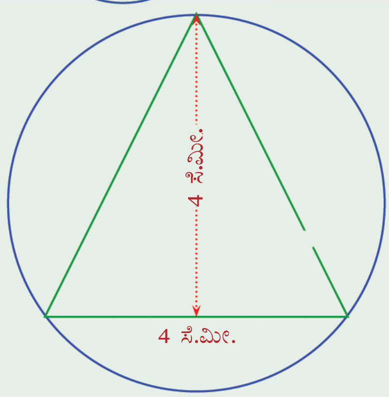
$\pi \times 2 \times 5 \approx 31.416$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು π ಯ ಗುಣಕವಾಗಿ ಬರೆದರೆ ಸಾಕು.

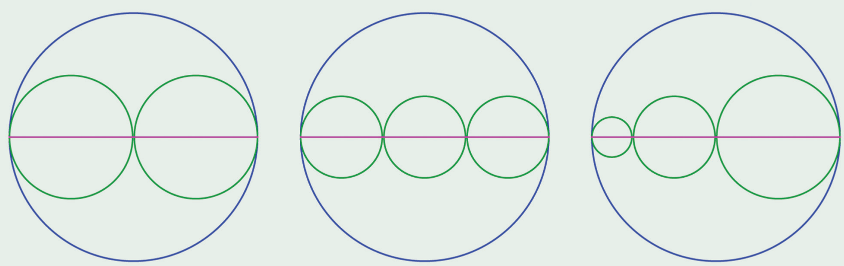
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳೆಲ್ಲವೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜ, ಚೌಕ ಹಾಗೂ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

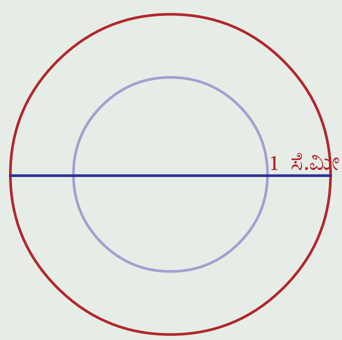


(3) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಸಮಾನ.



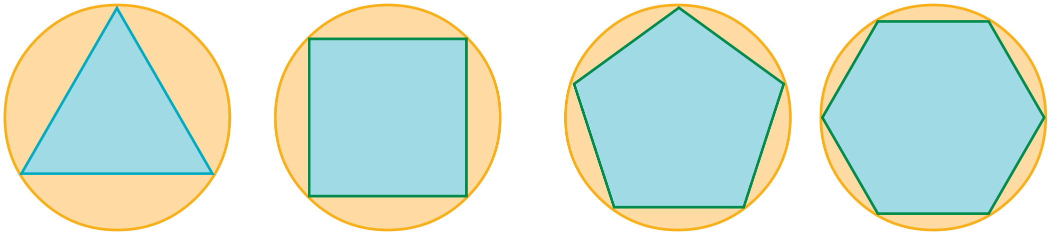
ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಷ್ಟು ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕ?

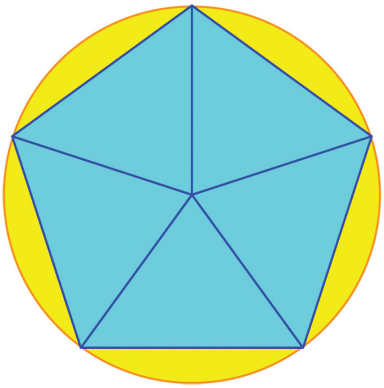


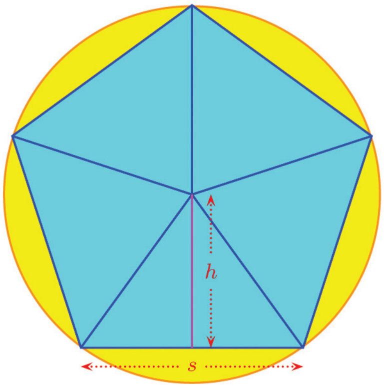
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವಂತೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು.



ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು, ಅದರೊಳಗೆ ಇರುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚುವುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಬಹುಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಿಗುವುದು.





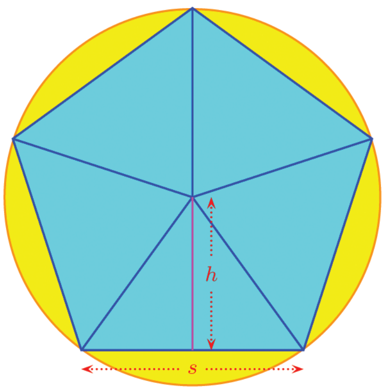
ಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು s ಎಂದೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ h ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}sh$

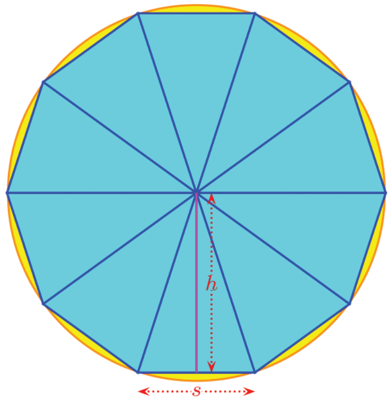
ಇಂತಹ ಐದು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ಪಂಚಭುಜ, ಅದರ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

ಇದರಲ್ಲಿ s ಎಂಬುದು ಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $5s$ ಎಂಬುದು ಪಂಚಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು p ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಪಂಚಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ph$ ಆಗಿದೆ.

ಪಂಚಭುಜದ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬದೂರದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಬಹುಭುಜವು ಬದಲಾಗುವಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಈ ಲಂಬ ದೂರವೂ ಬದಲಾಗುವುದು.





ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸುವ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂದೂ ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವುದು.

ಇವುಗಳ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು; $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಲಂಬ ದೂರಗಳು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ, ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು, ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು. ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಅರ್ಧವೋ?

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದಾಗ ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿದಾಗ ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

π ಕೇರಳದಲ್ಲಿ

ಹದಿಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಆಗಿದ್ದ ಮಾಧವನ್ (ಇಂದು ಅವರು ಗ್ರಾಮ ಮಾಧವನ್ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುತ್ತಾರೆ) π ಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವು ಗಣಿತ ಚರಿತ್ರೆಯ ಒಂದು ಮೈಲುಗಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರು.

$$1,\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5},\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿಯೂ ಕಳೆದೂ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{\pi}{4}$ ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದೆಂದು ಅವರು ಕಂಡು ಹಿಡಿದರು. ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{4}\pi = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಸ್ಕೋಟ್ ಲೇಂಡಿನ ಗ್ರಿಗರಿ, ಜರ್ಮನಿಯ ಲಿಬ್‌ನೀಸ್ ಎಂಬವರು ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅವರದ್ದೇ ಆದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು) ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಿಗುವ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗಳು ಬಹಳ ನಿಧಾನವಾಗಿ π ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು ಎಂಬ ಕೊರತೆಯಿದೆ. ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗೆ ತಲುಪಲು ಸುಮಾರು 4000 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರು ಮೊತ್ತವು ಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಮಾಧವನ್ ಸ್ವತಃ

$$\frac{1}{\sqrt{12}}\pi = 1-\frac{1}{3\times 3}+\frac{1}{5\times 3^2}-\frac{1}{7\times 3^3}+\cdots$$

ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ನವೀಕೃತ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ, π = 3.14159265359 ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

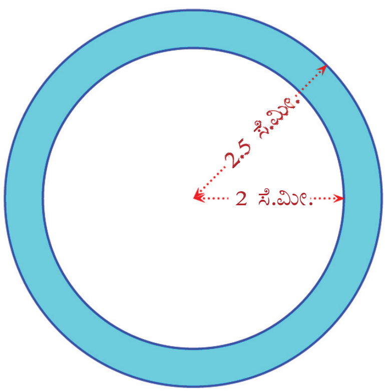
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ $2\pi r$ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗದ π ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

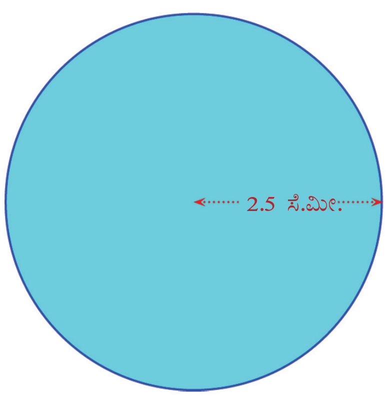
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

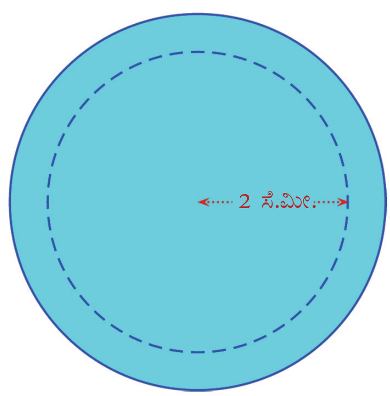
ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಈ ವೃತ್ತಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಿಂದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿರುವ ಆಕೃತಿಯಾಗಿ ಇದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

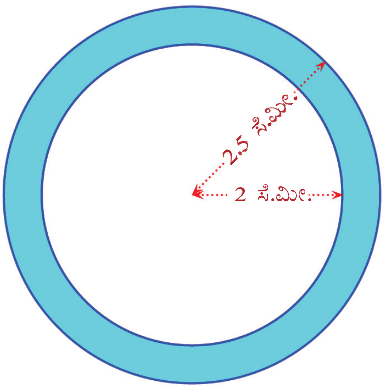


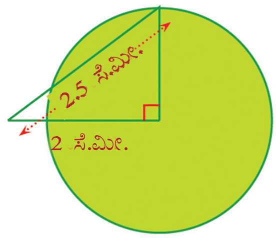


ಆಗ ಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ?





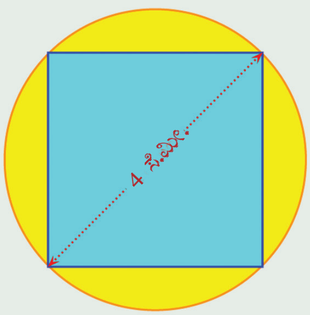
ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

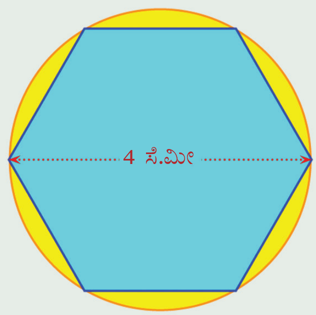
ಗಣಿತ, ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಮತ್ತು π

20ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ π ಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಾಧವನ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವಿಧಾನದಂತಿರುವ ಹಲವು ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

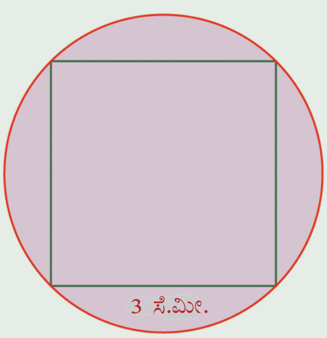
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 1989ರಲ್ಲಿ π ಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೂರು ಕೋಟಿಗಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಇಂದು ಅದು 270000 ಕೋಟಿಯಷ್ಟು ಆಗಿದೆ.

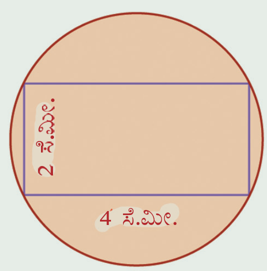
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.





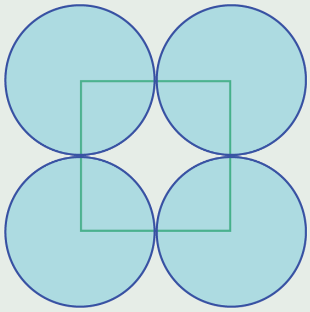
(2) ಒಂದು ಚೌಕದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಒಂದು ಆಯತದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತಹ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

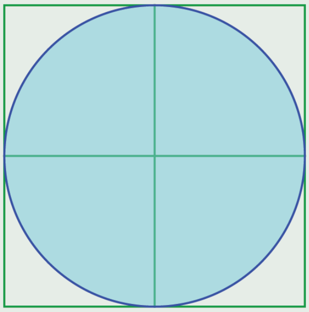




ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

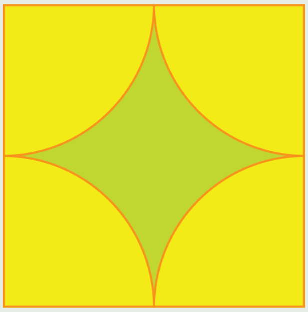
(3) ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆಯೂ ಭುಜದ ಅರ್ಧವು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುವಂತೆಯೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಮೊದಲನೆ ಚೌಕದಷ್ಟೇ ಗಾತ್ರವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಚೌಕಗಳು ಸೇರಿರುವಂತಹ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರೊಳಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ

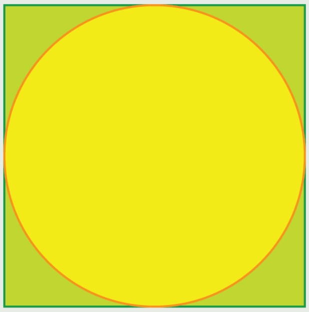




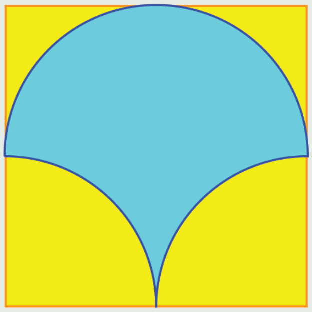
ಸೇರಿಕೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿದೆ. ಹಸುರು ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.





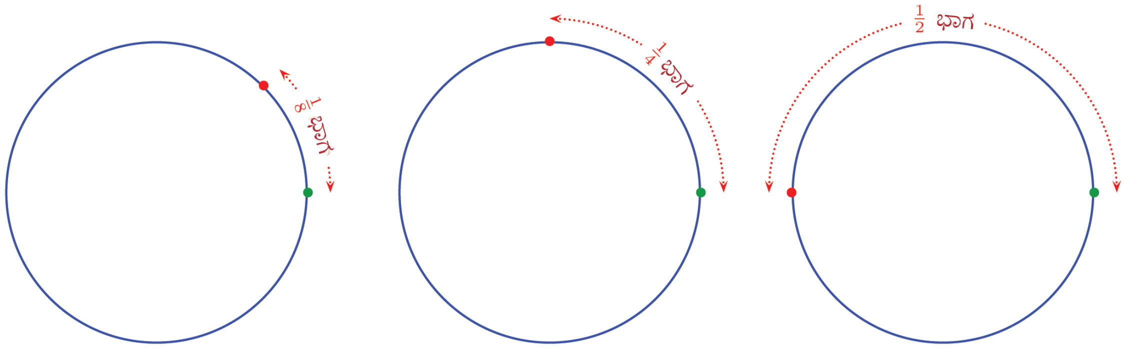
(5) ಒಂದು ಚೌಕದೊಳಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



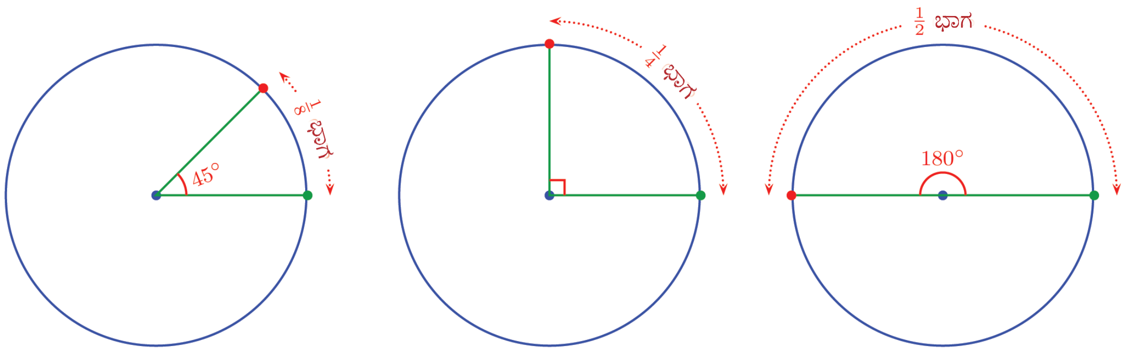
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಬಣ್ಣವನ್ನು ಹಚ್ಚಲಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಉದ್ದವೂ ಕೋನವೂ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಸಂಚಾರದ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

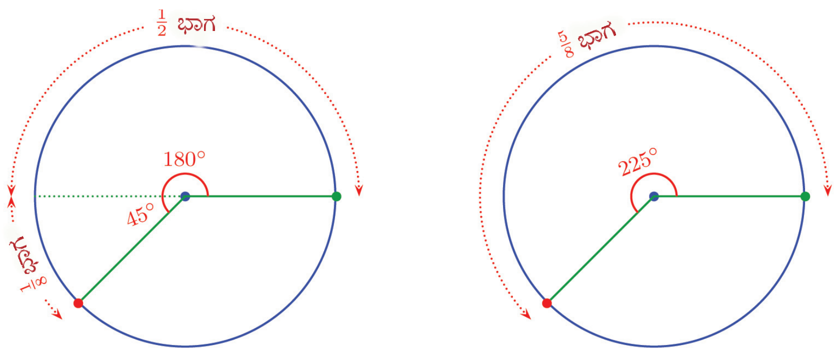


ಈ ಸಂಚಾರವು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿತು ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ನೋಡುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ ತಿರುಗಿತು ಎಂದು ಕೇಳಬಹುದು. ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ ಸಿಗಲು, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದು ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಸಿಗಲು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $360^\circ \div 4 = 90^\circ$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಆರನೇ ತರಗತಿಯ **ಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ)



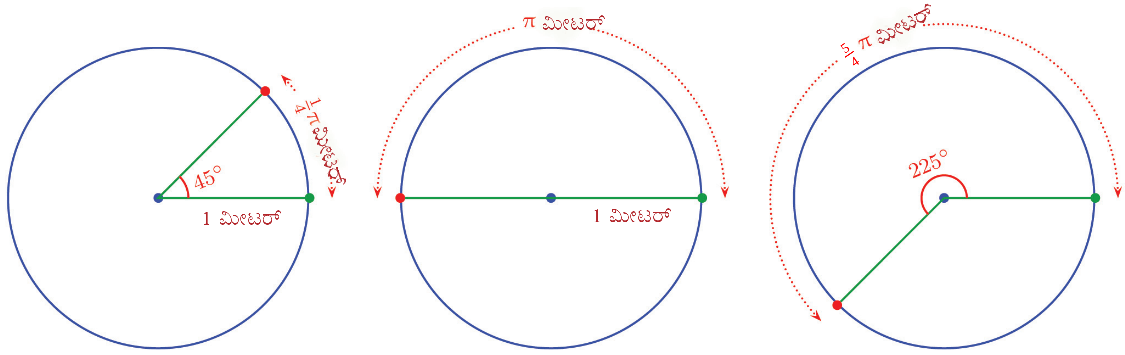
ಹಾಗೆ ಸಂಚಾರವನ್ನು ಉದ್ದವಾಗಿಯೂ ಕೋನವಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ದಾಟಿ, ಇನ್ನೂ ಎಂಟನೇ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ಸಂಚರಿಸಿದಾಗ ಸಂಚಾರದ ದೂರವು $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿದ ಕೋನ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವು 45^o; ಆಗ 180^0 ತಿರುಗಿದ ನಂತರ ಪುನ 45^0ಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ತಿರುಗಿತು. ಒಟ್ಟು $180^o + 45^o = 225^o$ ತಿರುಗಿತು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ಹೀಗೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಸುತ್ತಿ ಪ್ರಾರಂಬಿಸಿದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪುವವರೆಗಿನ ಸಂಚಾರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಸಂಚರಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನು, ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗಳಾಗಿಯೋ, ತಿರುಗಿದ ಅಳತೆಯಾಗಿ 360^0 ವರೆಗಿನ ಕೋನಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೇ? ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಮೀಟರ್, ಆಗ ದೂರಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಉದ್ದಗಳಾಗಿಯೇ ಹೇಳಬಹುದು.

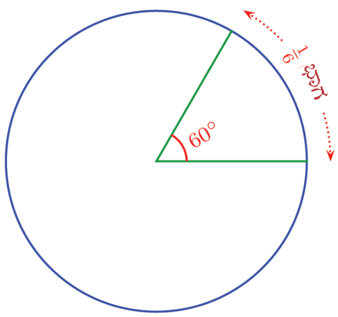


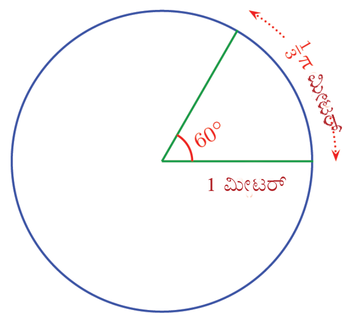
ಹಾಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ ಎಷ್ಟೆಂಬುದನ್ನು ಮೀಟರಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು; ಅಥವಾ ಎಷ್ಟು ತಿರುಗಿತು ಎಂದು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

60^0 ತಿರುಗುವಾಗ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಚಲಿಸುವುದು?

ವೃತ್ತದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗ ಚಲಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ನೋಡುವ, 1^o ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ 60^o ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ

$60 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು $\frac{1}{3}\pi$ ಮೀಟರ್.

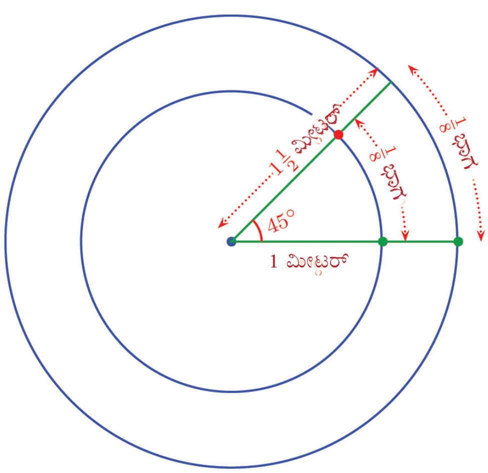


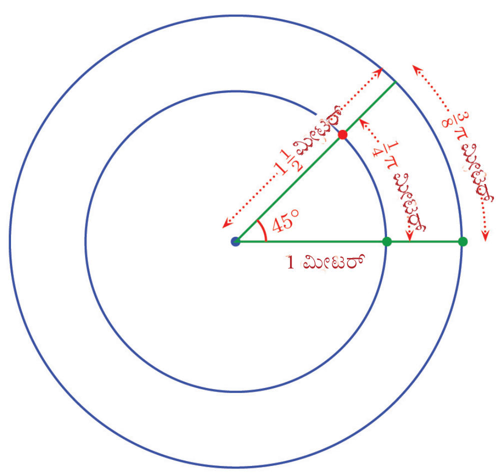


ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ತಿರುಗಿದ್ದು 360^o ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸಿರುವುದು, 2π ಮೀಟರಿನ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆದರೇ? ಸುತ್ತಳತೆ 3π ಮೀಟರ್ ಆಗುವುದು. ಆಗ ತಿರುಗಿದ್ದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು 3π ಮೀಟರಿನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ ತಿರುಗುವುದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ವೃತ್ತ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಉದ್ದಗಳ ಮೀಟರ್ ಲೆಕ್ಕ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 45^0 ತಿರುಗುವಾಗ, ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲೂ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗದಷ್ಟೇ ಸಂಚರಿಸುವುದು; ಆದರೆ, ವೃತ್ತವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಚಲಿಸಿದ ದೂರ $\frac{3}{8}\pi$ ಆಗುವುದು.





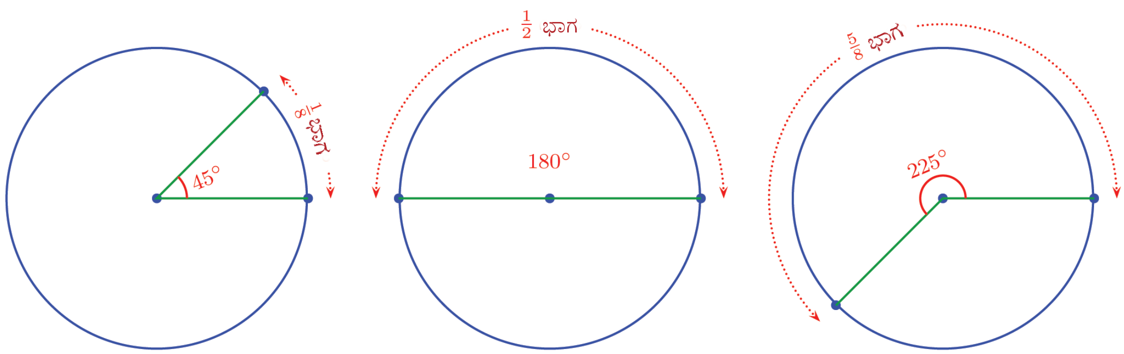
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ x^o ತಿರುಗುವಾಗ, ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ $2\pi r \times \frac{x}{360}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಚಾಪ (arc) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಒಂದು ಚಾಪದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನು, ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ (central angle) ಎನ್ನುವರು.

ಆಗ ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 45^o. ವೃತ್ತದ $\frac{1}{2}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 180^o ವೃತ್ತದ $\frac{5}{8}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 225^o ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಹೇಳಬಹುದು.



ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸಂಚಾರದ ತತ್ವವನ್ನು ವೃತ್ತದ್ದೇ ಆದ ಗಣಿತ ತತ್ವವಾಗಿಸಬಹುದು.

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ x^o ಆದ ಚಾಪದ ಉದ್ದ $2\pi r \times \frac{x}{360}$. ಆಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ.

ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 360^0 ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 60^0 ಆದ ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

ಇದನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದು. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 6π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. 60^o ಎಂಬುದು 360^o ಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು. ಆಗ ಅದರ ಉದ್ದ π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 50^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾದರೇ?

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 5π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಅದರ $\frac{50}{360}$ ಭಾಗವು ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು ಅಂದರೆ,

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ, ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ವೃತ್ತದಿಂದ, ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ 30^0 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಸಣ್ಣದೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನಾಗಿಸಲಾಯಿತು. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ 30^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ, ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ ಭಾಗ ; ಅಂದರೆ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದ $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ. ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ; ಅಂದರೆ, $9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ 40^0 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚಾಪದ ಉದ್ದ 3π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್? ತ್ರಿಜ್ಯವೋ?

(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 25^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

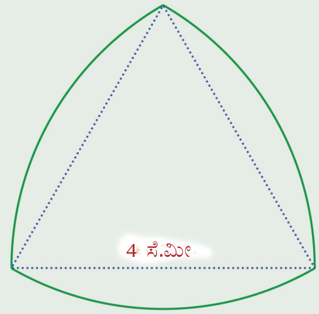
- i) ಇದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ 75^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?
- ii) ತ್ರಿಜ್ಯವು ಇದರ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ 75^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಳೆಯಿಂದ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಉಂಗುರವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಲಾಯಿತು.

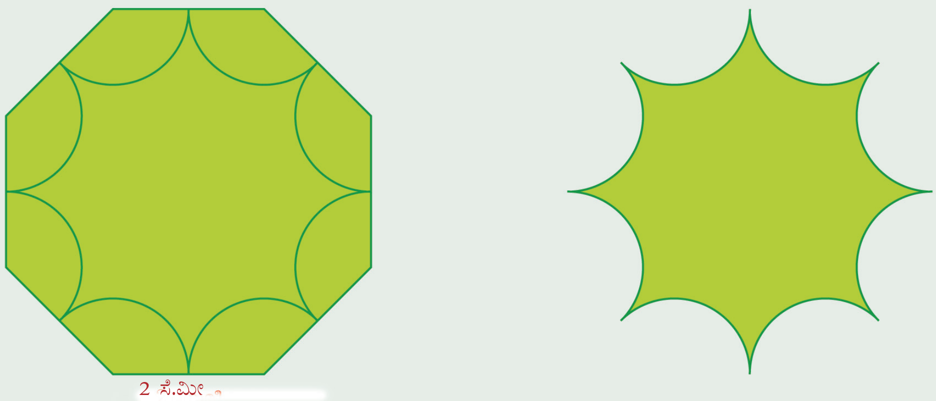
- i) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ತುಂಡಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿರಬೇಕು?
- ii) ಬಳೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಣ್ಣದಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಳೆಯನ್ನಾಗಿಸಲಾಯಿತು. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತಹ ವೃತ್ತ ಭಾಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್?

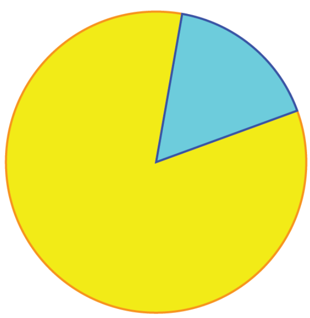


(5) ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ವೃತ್ತ ಭಾಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು.



ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

ಕೋನವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ

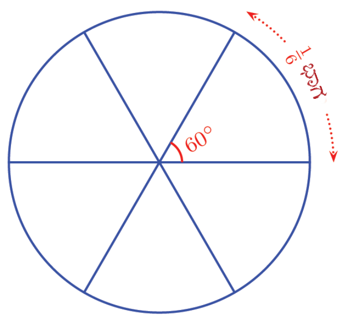


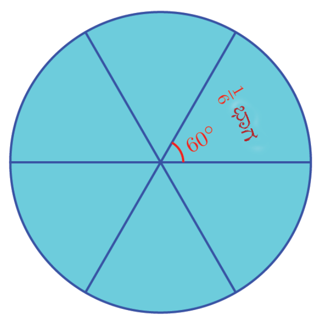
ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಒಂದುಭಾಗವು ಚಾಪವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಚಾಪ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡೂ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರಿದರೆ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಭಾಗವನ್ನು ಸೆಕ್ಟರ್ (sector) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದರ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವಂತೆ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಎರಡರ ಲೆಕ್ಕವೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 60^{o} ಆಗಿರುವ ಚಾಪವು ವೃತ್ತದ

ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 60° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆ.





ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 1^0 ಆಗಿರುವ ಚಾಪವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗ ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 1^0 ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಚಾಪದ ಉದ್ದದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧದಂತೆಯೇ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

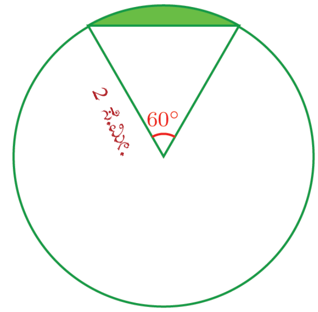
ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 360^0 ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

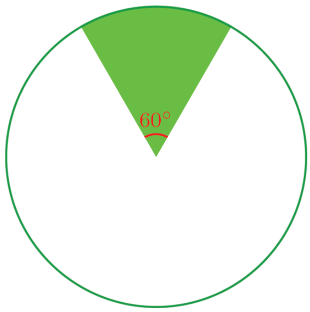
ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ x° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

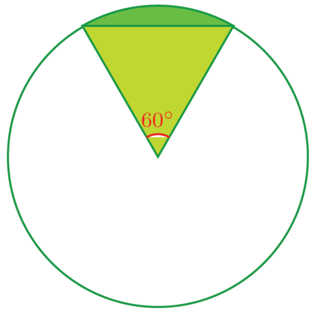
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 40° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 9π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



ಸೆಕ್ಟರಿನಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಈ ಭಾಗವು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ?



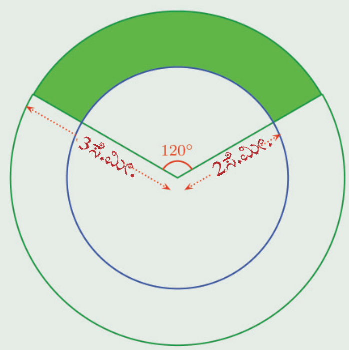


ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗ. ಅಂದರೆ, ಆಗ , $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

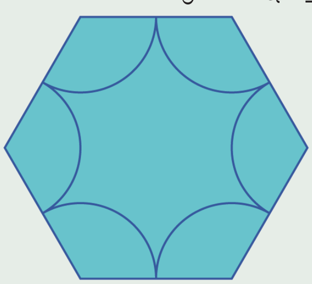
ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. (ಕಾರಣ?) ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಆಗ ಮೊದಲನೇ ಚಿತ್ರದ ವೃತ್ತ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮಿಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 120^0 ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು? ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ ಇಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

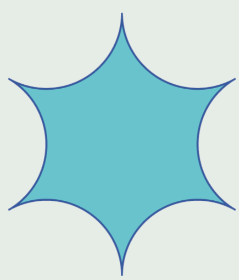
(2) ಚಿತ್ರದ ಹಸುರು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.



(3) ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು.

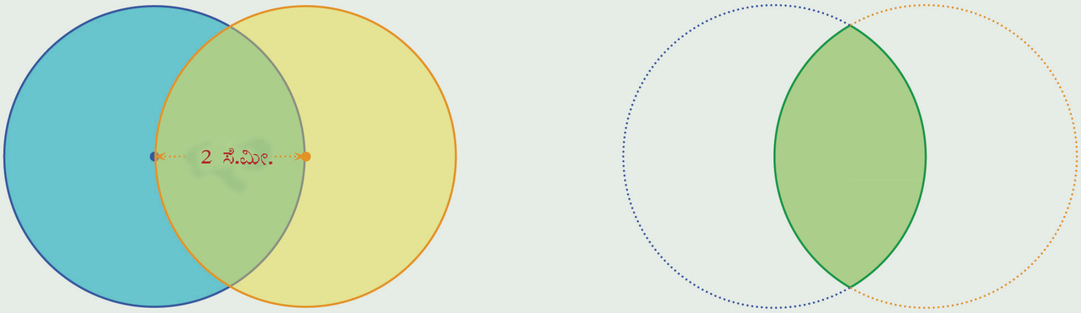


2 ಸೆ.ಮೀ.



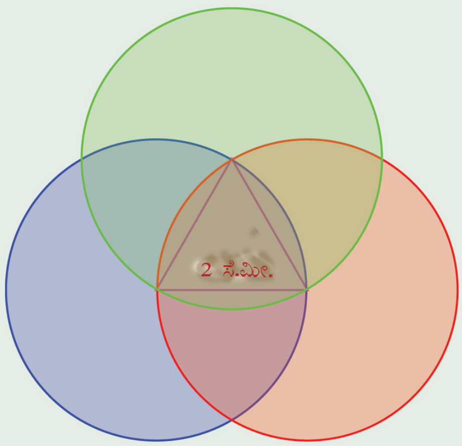
ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(4) ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರವೂ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು ಇತರ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತಹ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



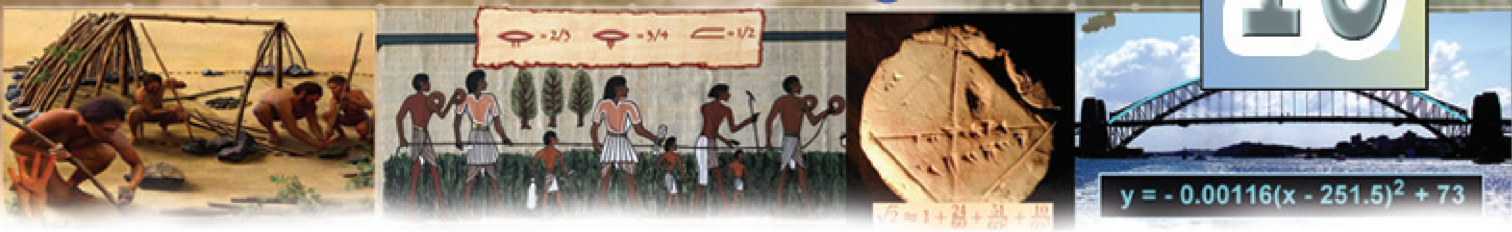
ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ವೃತ್ತಗಳೊಳಗೆ ರಚಿಸುವ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನವಾದ, ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯುವರು.			
• ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ವೃತ್ತಗಳೊಳಗೆ ರಚಿಸುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ನಿರ್ವಚಿಸಿ, ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳ ಅಳತೆಯ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವರು.			
• π ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವರು.			
• ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ರಚಿಸುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವರು.			
• ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವರು.			
• ವೃತ್ತದ ಚಾಪದ ಉದ್ದ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವರು.			

ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

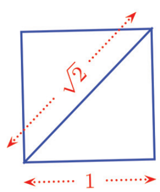
10

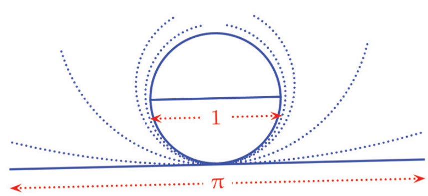


ಎರಡು ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆ? ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಉದ್ದವನ್ನು 1 ಎಂಬುವುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯು ಉದ್ದದ 2 ಎಂದೂ, ಅರ್ಧ ಉದ್ದವನ್ನು $\frac{1}{2}$ ಎಂದೂ, ಅದರ ಒಂದುವರೆ ಮಡಿಯನ್ನು ಉದ್ದದ $1\frac{1}{2}$ ಎಂಬುವುದಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಹೀಗೆ 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಉದ್ದವನ್ನು, ಉದ್ದದ ಒಂದು ಏಕಕ (unit of length) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಏಕಕವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಇತರ ಹಲವು ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನೂ ಈಗ ನೋಡಿದಂತೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಏಕಕದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳೂ ಇವೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಈ ಏಕಕವಾದ ಚೌಕದ ಕರ್ಣ, ಈ ಏಕಕವು ವ್ಯಾಸವಾದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ





ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳದ್ದೇ ಆದ ಕ್ರಿಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿಸುವಾಗ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ **ಉಪಯೋಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ) ಆಗ $\sqrt{2}$, π ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣಗಳಾದ $-\sqrt{2}$, $-\pi$ ಎಂಬಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (rational numbers) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (irrational numbers) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 5 ನ್ನು $\frac{5}{1}$ ಅಥವಾ $\frac{10}{2}$ ಎಂಬಂತೆ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂಶ ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು $\frac{0}{1}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ರೂಪವಿದೆ, x, y ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳೋ ಆದ $\frac{x}{y}$. ಇದರಲ್ಲಿ x ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಅಭಿನ್ನಕಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಎಂಬೀ ವರ್ಗಮೂಲಗಳೂ, ಭಿನ್ನಕಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ π ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ. ನಿಶ್ಚಿತವಾದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಬೇರೆಯೂ ಹಲವು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಿವೆ. ಎರಡು ಭಿನ್ನಕಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ. (ಸಾಧಿಸಬಹುದೇ?)

ಆದರೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಭಿನ್ನಕವೋ, ಅಭಿನ್ನಕವೋ ಆಗಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ಅಭಿನ್ನಕಗಳಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ, ಅದಕ್ಕಾಗಿ

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ಎಂದು ಗಣನೆಮಾಡಬಹುದು. (**ಹೊಸ ಪಾಠಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ **ಭಾಗಾಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗ) ಆಗ,

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

ಎಂದೂ, ಆದರಿಂದ

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) = \sqrt{3}$$

ಎಂದು ಸಿಗಬಹುದು. ಇನ್ನು a ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ಯು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ a ಯು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಅಂದರೆ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ ಇವೆಗಳೆರಡೂ ಭಿನ್ನಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 2 ಆಗಿದೆ. ಅದು ಒಂದು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು ಅಭಿನ್ನಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ a ಎಂಬ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ c ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $a + b = c$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ

$$c - b = a$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದರಲ್ಲಿ b ಭಿನ್ನಕವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು c ಯು ಭಿನ್ನಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದ $c - b$ ಯೂ ಭಿನ್ನಕವಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಭಿನ್ನಕವಾದ a ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ c ಭಿನ್ನಕವಲ್ಲ. ಅಭಿನ್ನಕವಾಗಿದೆ.

(1) ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ, ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

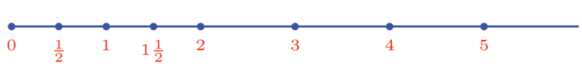
(2) ಯಾವುದೇ ಅಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಎರಡು ಅಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಟ್ಟಾಗಿ ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (real numbers) ಎಂದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕರೆಯುವರು.

ಈ ಹೆಸರು ಯಾಕೆ ಬಂತು ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎಡತುದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಬಲಭಾಗಲದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿದರೆ, ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು 1 (ಏಕಕ) ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಬಲಭಾಗದ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ದೂರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



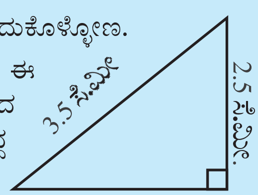
ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ದೂರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು.

ಅಭಿನ್ನಕ ಅಳತೆಗಳು

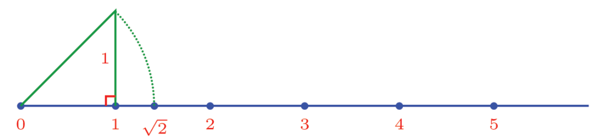
ಉದ್ದಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಘನಫಲಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಉದ್ದವು $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು ಅಗಲವು $\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ

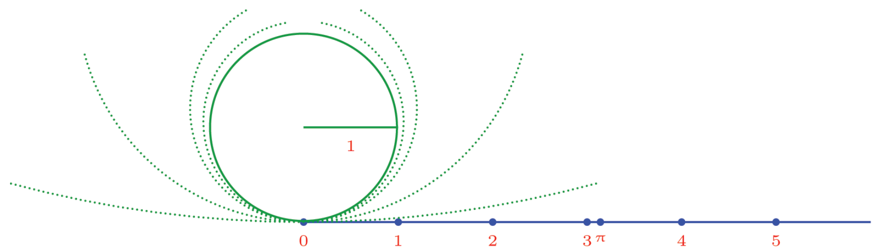
$\sqrt{6}$ ನ್ನು ಉದ್ದವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈ ಚಿತ್ರ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡನೇ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

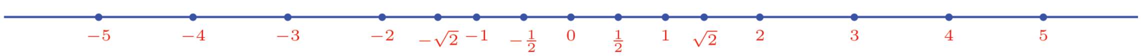


ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಎಲ್ಲಾ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉದ್ದವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೌಕರ್ಯಪ್ರದವಾಗಿದೆ.





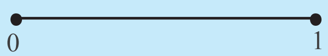
ಈ ಗೆರೆಯ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಭಾಗದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಬಹುದು? ಅದಕ್ಕೆ ಬಲಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



ಹೀಗೆ ಈ ಗೆರೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ, ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ಗೆರೆಯ (ರೇಖೆಯ) ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಾಂದ್ರತೆ

0 ಮತ್ತು 1 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ? ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲ. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\pi}$ ಎಂಬೀ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸೇರಿಸಿ ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಮುಗಿಯದಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂದೂ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ 1ಎಂದೂ ಗುರುತಿಸಬೇಕು



ಇನ್ನು ಈ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದರೂ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಆಗ ಗೆರೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳಿವೆ?

ಇಂತಹ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ (number line ಅಥವಾ real line) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದರೋ?

-1, -2 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು?

-1 ಅಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ 1 ಕಡಿಮೆ; -2 ಆದರೋ? ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ 2 ಕಡಿಮೆ ಅಂದರೆ -1ರಿಂದ ಪುನಃ 1 ಕಡಿಮೆ, ಆದುದರಿಂದ -2 ಎಂಬುದು -1 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕಸಂಖ್ಯೆ. ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ $-2 < -1$.

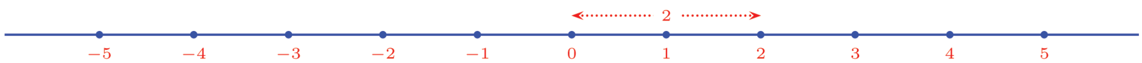
ಆಗ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

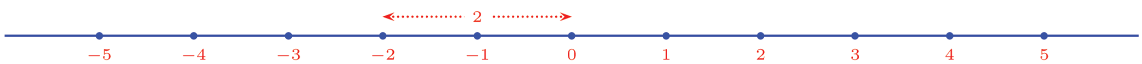
ಸೊನ್ನೆಯ ಬದಲಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿದರೂ ಇದರಂತೆಯೇ ಸಂಭವಿಸುವುದು. ಆಗ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವು, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ದೊಡ್ಡದು, ಸಣ್ಣದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧವು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎಡ,ಬಲ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

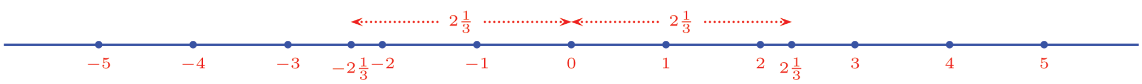
ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಶಯವನ್ನು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳುವುದೆಂಬುವುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವುದು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನನುಸರಿಸಿಯಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 2 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 0 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ 2.



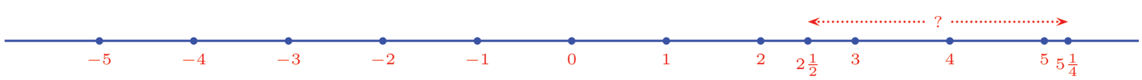


ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $2\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೂ, $-2\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 0ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೂ $2\frac{1}{3}$ ಆಗಿವೆ.

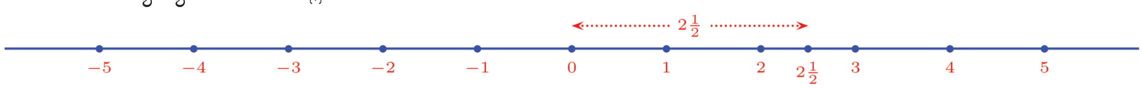


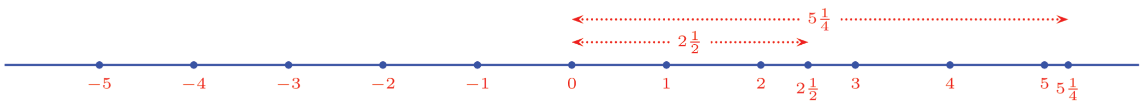
ಇನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

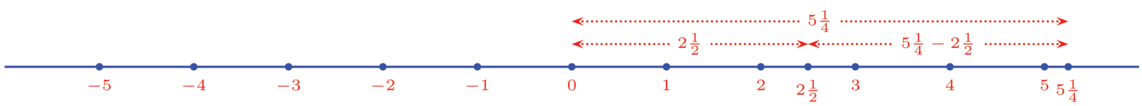
$2\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು $5\frac{1}{4}$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು?



ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕಿರುವ ದೂರಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

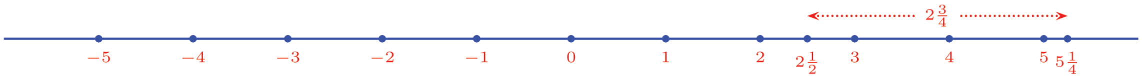






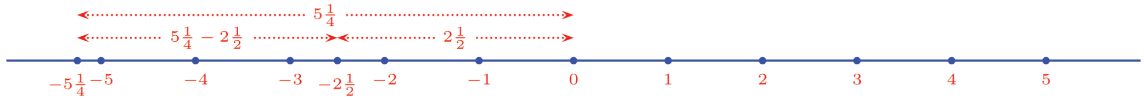
ಅಂದರೆ, $2\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು $5\frac{1}{4}$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

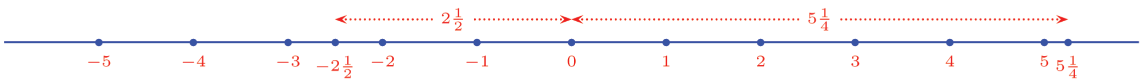


$-2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $-5\frac{1}{4}$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೆಷ್ಟು?

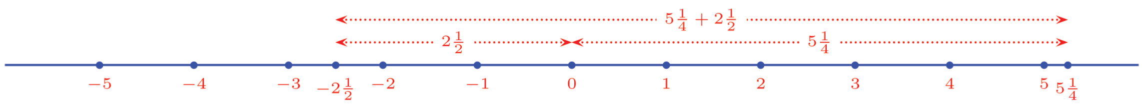
ಆಗಲೂ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದಿರುವ ದೊಡ್ಡ ದೂರದಿಂದ ಸಣ್ಣ ದೂರವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?



ಇನ್ನು $-2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $5\frac{1}{4}$ ಆದರೋ?



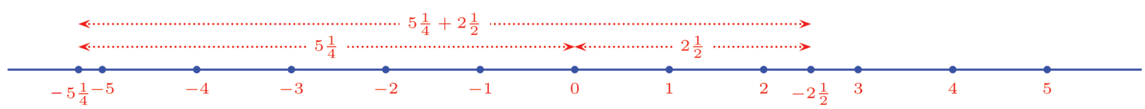
ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸೊನ್ನೆಯ ಇಬ್ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ಆದ ಕಾರಣ, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದಿರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.



ಅಂದರೆ, $-2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $5\frac{1}{4}$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು

$$2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

ಇದುವೇ $2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $-5\frac{1}{4}$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



ಈಗ ಮಾಡಿದಂತಹ ದೂರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ.

ಬಿಂದುಗಳು	ದೂರ
$2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$
$-2\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$
$2\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$

ಇದರಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಜತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $5\frac{1}{4}$ ರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $2\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಕಳೆದು ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ಜತೆಯಲ್ಲಿಯೋ? ಅದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $-2\frac{1}{2}$ ರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $-5\frac{1}{4}$ ನ್ನು ಕಳೆದು ನೋಡೋಣ.

$$-2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = -2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{3}{4}$$

ದೂರವಾಗಿ ಲಭಿಸಿರುವುದು ಇದುವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಆದುದರಿಂದ ಈ ಜತೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ದೂರವೆಂಬುದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಮೂರನೇ ಜತೆಯಲ್ಲಿಯೋ? ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $5\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ $-2\frac{1}{2}$, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$5\frac{1}{4} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$$

ಈ ಜತೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ದೂರವೆಂಬುದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ. ಕೊನೆಯ ಜತೆಯನ್ನೂ ನೋಡೋಣ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ $-5\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2} - \left(-5\frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4}$$

ಈಗ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾದರೂ , ಎರಡೂ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಾದರೂ, ಒಂದು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲೂ

ಸ್ವಲ್ಪ ಚರಿತ್ರೆ

ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಪೈಥಗೋರಸನ ತತ್ವವನ್ನು ಹಿಪ್ಪಾಸಸನ ವಾದಗಳ ಮೂಲಕ ಅಲ್ಲಗಳೆದುದನ್ನು ಹೇಳಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಆದರೆ ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಸಂಕಲ್ಪವು ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಗಣಿತ ಚಿಂತನೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗಲಿಲ್ಲ. ಮುಂದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನವುಂಟಾಯಿತು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಅಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಪರವಾದ ತತ್ವಗಳೆಲ್ಲವೂ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಕ್‌ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬಂದಿರುವುದು.

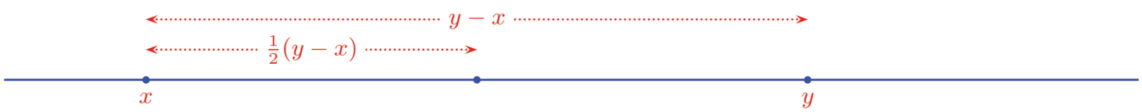
ಇನ್ನೊಂದು ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಾದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 0, 2 ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 2. ಇನ್ನು 0, -2 ಆದರೂ ದೂರವು 2 ಆಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ $0 - (-2) = 2$

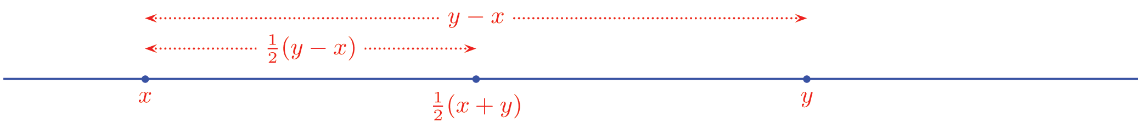
ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು, ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದು x ಎಂದೂ ದೊಡ್ಡದು y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ y ಯ ಸ್ಥಾನವು x ನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $y - x$

x ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y - x$ ದೂರದಲ್ಲಾಗಿದೆ y ಎಂಬ ಬಿಂದು. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎಂಬುದು, x ನಿಂದ ಇದರ ಅರ್ಧದೂರದಷ್ಟು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ.



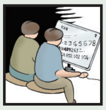
ಅಂದರೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು $x + \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(x + y)$



ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು, ಅದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $-2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $4\frac{3}{4}$ ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು,

$$\frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{8}$$



(1) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $1, -5$ ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ v) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$

(2) ಒಂದನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $\frac{1}{3}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು $\frac{1}{2}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಬಿಂದುಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೀಜಗಣಿತ

ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 3 ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 3 ಆಗಿದೆ. -2 ಮತ್ತು 0 ಮತ್ತು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 2.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ x ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು x ಆಗಿದೆ. x ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೋ?

(ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ, ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೋ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡದೆ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು x,y ಎಂಬಂತೆ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಪಯೋಗಿಸದೆ ಬರೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಎಂಟನೆಯ ತರಗತಿಯ **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ?)

ಆಗ ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬೇಕು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣದ ಋಣವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$-(-2) = 2$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಬದಲು ಅದರ ಋಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು ಆಗ x ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು $-x$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $x = -3$ ಆದರೆ

$$-x = -(-3) = 3$$

ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $-x$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಹೀಗೆ $x > 0$ ಆದರೆ (ಅಂದರೆ x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ) x ಆಗಿಯೂ $x < 0$ ಆದರೆ (ಅಂದರೆ x ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ) $-x$ ಆಗಿಯೂ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $|x|$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು. ಇದನ್ನು x ನ ಕೇವಲ ಬೆಲೆ (absolute value) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

ಸೊನ್ನೆಯ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಯೆಂದೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದು. ಇದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಚುಟುಕಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \text{ ಆದರೆ} \\ -x & x < 0 \text{ ಆದರೆ} \\ 0 & x = 0 \text{ ಆದರೆ} \end{cases}$$

ಇದುವರೆಗೆ ಹೇಳಿದ್ದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $|x|$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ದೂರವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಆಗ x, y ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$x > y \text{ ಆದರೆ, ದೂರ } x - y$$

$$x < y \text{ ಆದರೆ, ದೂರ } y - x$$

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳುವುದರ ಬದಲು $x - y$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು; ಅಥವಾ $x - y > 0$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿದೆಯೆಂದು

ಹೇಳುವುದರ ಬದಲು y ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು; ಅಥವಾ $x - y < 0$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

$x - y > 0$ ಆದರೆ, ದೂರವು $x - y$

$x - y < 0$ ಆದರೆ, ದೂರವು $y - x$

ಇನ್ನು $x - y, y - x,$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೇನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ಎಂದು ಆಲೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರ ಋಣವು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿ ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಉಪಯೋಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಅಂದರೆ, x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗಲೂ

$$y - x = -(x - y)$$

ಆಗ ನಾವು ಮಾಡಿದ ದೂರ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪುನಃ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ.

$x - y > 0$ ಆದರೆ, ದೂರ $x - y$

$x - y < 0$ ಆದರೆ, ದೂರ $-(x - y)$

ಇದನ್ನೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸಿರಿ. $x - y$ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, $x - y$ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಅದರ ಋಣವನ್ನಲ್ಲವೇ ತೆಗೆದಿರುವುದು. $x - y$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯು ಇದಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ದೂರದ ಕುರಿತು ಎರಡಾಗಿ ತಿಳಿದಿರುವುದನ್ನು, ಇನ್ನು ಒಂದಾಗಿಸುವ. ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $|x - y|$ ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಅವುಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ 2, 5 ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು

$$|2 - 5| = |-3| = 3$$

2, –5 ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೋ?

$$|2 - (-5)| = |2 + 5| = |7| = 7$$

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

$|x - 1| = 3$ ಆದರೆ x ಯಾವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು?

ಇದನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ $|x-1|$ ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x, 1 ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿದೆ. ಈ ದೂರವು 3 ಆಗಬೇಕು.

1 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರವು $1 + 3 = 4$

ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಬೆಲೆ

x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, x | ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, x ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ x^2 ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

$\sqrt{x^2}$ ಎಷ್ಟು?

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $x = 4$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = x$$

$x = -4$ ಆದರೋ?

$x^2 = 16$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16} = 4 = -x$$

ಯಾವುದೇ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಗೆ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿವೆ. ಅದರ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು $\sqrt{\ }$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವು $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ ಆದರೆ $\sqrt{x^2}$ ಎಂಬುದು x ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

1 ರ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರವು 3 ಆದ ಸಂಖ್ಯೆ $1 - 3 = -2$ ಆಗಿದೆ

ಆಗ $x = 4$ ಅಥವಾ $x = -2$

ಇನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಿದರೋ? $x > 1$ ಆದರೆ $|x-1| = x-1$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. $x - 1 = 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $x = 4$ ಆಗಬೇಕು.

$x < 1$ ಆದರೋ? ಆಗ $|x-1| = 1-x$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $1 - x = 3$. ಆಗ $x = 1 - 3 = -2$ ಆಗಬೇಕು.

ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೋ?

> $|x+1| = 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು?

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯಾಗಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು, $|x+1|$ ನ್ನು ಒಂದು ದೂರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ ದೂರವಾಗಿ ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ ಮೊದಲು $x + 1$ ನ್ನು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$$x + 1 = x - (-1)$$

ಇದರಿಂದ $|x+1|$ ಎಂಬುದು, x ಮತ್ತು -1 ಕ್ಕಿರುವ ದೂರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ -1 ರ ಬಲಭಾಗಲದಲ್ಲಿ ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು $-1 + 3 = 2$ ಎಂದೂ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ದೂರವು 3 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು $-1 - 3 = -4$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

> x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $|x|^2 = x^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $|x| = x$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$|x|^2 = x^2$$

x ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೋ? $|x| = -x$ ಆಗ

$$|x|^2 = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x \times x = x^2$$

ಕೊನೆಯದಾಗಿ, $x = 0$ ಆದರೋ? $|x| = 0$

$$|x|^2 = 0^2 = 0$$

ಇನ್ನು $x = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x^2 = 0^2 = 0$$

ಆಗ

$$|x|^2 = 0 = x^2$$

(1) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದುವ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $|x - 1| = |x - 3|$

ii) $|x - 3| = |x - 4|$

iii) $|x + 2| = |x - 5|$

iv) $|x| = |x + 1|$

(2) $1 < x < 4, 1 < y < 4$ ಆದರೆ $|x - y| < 3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) $x < 3, y > 7$ ಆದರೆ $|x - y| > 4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) $|x + y| = |x| + |y|$ ಆಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) $|x + y| < |x| + |y|$ ಆಗುವ x, y ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೋ?

(6) $|x + y| > |x| + |y|$ ಆಗುವ x, y ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೋ?

(7) $|x - 2| + |x - 8| = 6$ ಆದರೆ x ಆಗಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(8) $|x - 2| + |x - 8| = 10$ ಆದರೆ x ಆಗಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

$|x - 2| + |x - 8| = n$, n ಆಗಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದೆಲ್ಲ ಆಗಿರಬಹುದು?

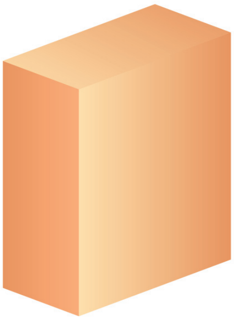
ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಋಣಗಳನ್ನು ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಶಯವನ್ನು ಕೇವಲ ಬೆಲೆ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾ ಪರವಾದ ಆಶಯವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು.			
• ಕೇವಲ ಬೆಲೆಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೆಲವು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಮತ್ತು ಅಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			

ಸ್ತಂಭಗಳು

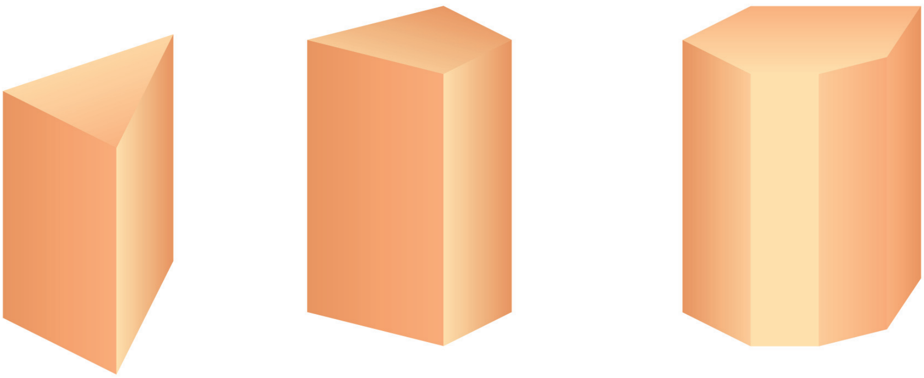
ಪಾದ ಹಲವು ವಿಧ

ಆಯತ ಗಟ್ಟಿಯ ಕುರಿತು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಘನಫಲದ ಕುರಿತು ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವೆವಲ್ಲವೆ.



ಹಲವು ಆಯತಗಳು ಸೇರಿ ಇದರ ಹೊರ ಆವರಣ ಅಥವಾ ಹೊರಮೈಯು ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಕೆಳಭಾಗ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಆಕೃತಿಯ ಎರಡು ಆಯತಗಳು, ಅದೇ ರೀತಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಆಯತ, ಮೂರನೇ ಜತೆಯು ಮುಂಭಾಗ ಮತ್ತು ಹಿಂಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಟ್ಟು ಆರು ಆಯತಗಳು.

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಮೇಲ್ಮೈ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವಿರುವ ಇವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಮಾನ ರೂಪಗಳು (three diamentional shapes) ಅಥವಾ ಘನರೂಪಗಳು (solids) ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುವರು. ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಇತರ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳಿವೆ.

ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ

ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಿದ್ಧತೆಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿವೆ.

- ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನು ತೆರೆದು View ನಿಂದ Algebra, Graphic, 3D ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ತೆರೆಯಬೇಕು.
- 3D Graphics ನಲ್ಲಿ Right click ಮಾಡಿ Graphic ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ Preferences ಎಂಬ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ Show Axes, Use clipping, Show clipping ಎಂಬಿವುಗಳ ಎದುರಿರುವ √ ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು.
- Options → Labelling → No New Object ನ್ನು ನೀಡಿದಾಗ ರಚಿಸುವ ಆಕೃತಿಗಳ ಹೆಸರು ಬರೆದು ಬರುವುದನ್ನು ತಡೆಯಬಹುದು. ಇನ್ನು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ.

Graphic ನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನ, ಆಯತ ಮುಂತಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು (ಇದಕ್ಕಾಗಿ Grid ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು). ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು 3D Graphics ನಲ್ಲೂ ಕಾಣಲು ಸಾಧ್ಯ. 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ Extrude to Prism or Cylinder ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 3D Graphicsನಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವು ಲಭಿಸುವುದು. Rotate 3D Graphics View ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಮಗುಚಿಯೂ ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯ.

Graphics ನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯ ರೂಪವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಸ್ತಂಭದ ಆಕೃತಿಯೂ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯಾಗಿ ಸ್ಲೈಡರ್‌ನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿದರೆ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಅಗತ್ಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

ಘನಫಲ

ಆರನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯತ ಸ್ತಂಭಗಳ (ಆಯತ ಗಟ್ಟಿಗಳ) ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೋ? ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಆಯತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

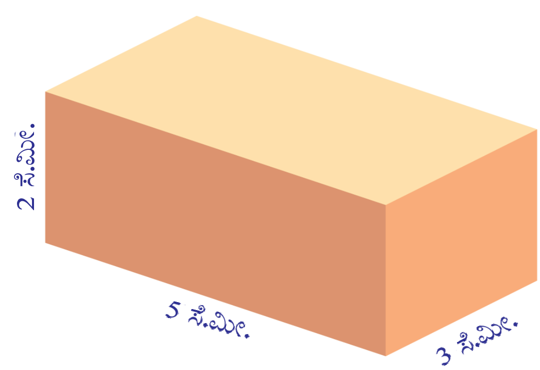
ಮೊದಲ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈಯು, ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಆಯತಗಳು ಸೇರಿದವುಗಳಾಗಿವೆ. ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬದಲು ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಷಡ್ಭುಜಗಳೂ ಆಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಹೊರಮೈ ಎಂಬುದು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜಗಳೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಾಗಿ ಸಮಾನ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಆಯತಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳು (prisms) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

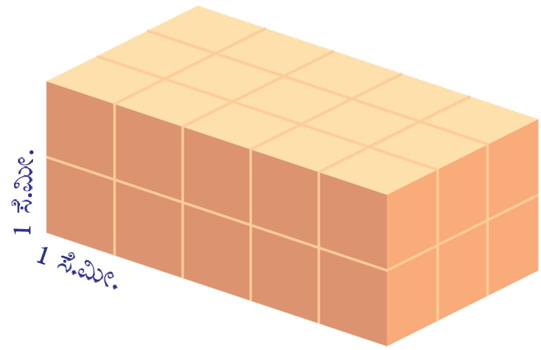
ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳನ್ನು ಅದರ ಮುಖಗಳು (faces) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಪಾದಮುಖಗಳೆಂದೂ, ಆಯತಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುವರು. ಪಾದಮುಖಗಳ ರೂಪಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭ, ಆಯತಸ್ತಂಭ ಎಂಬಂತೆ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವರು.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭ, ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭ ಮತ್ತು ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಇದುವರೆಗೆ ಆಯತ ಗಟ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆದಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು (ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ) ಆಯತಸ್ತಂಭ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಡ್‌ಬೋರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಟೊಳ್ಳಾದ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವಂತೆ ಇದನ್ನು ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಗಟ್ಟಿಗಳಾಗಿ ಭಾಗ ಮಾಡೋಣ.

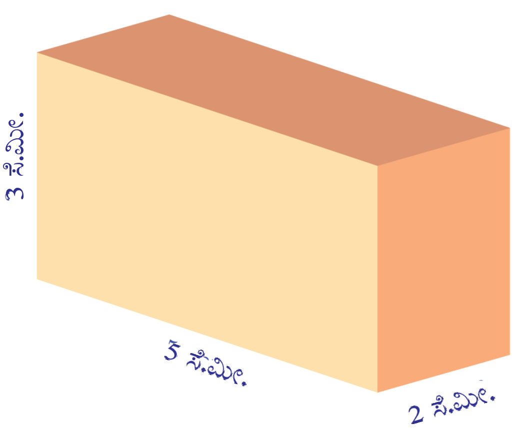


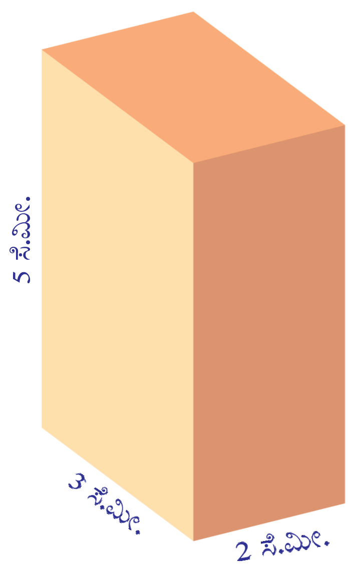
ಇದರಲ್ಲಿ $5 \times 3 \times 2 = 30$ ಚೌಕ ಗಟ್ಟಿಗಳಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು 30 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಆರನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ಭಾಗಗಳ ಭಾಗ** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ **ವಿಭಿನ್ನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯೆಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾದರೂ ಘನಫಲವು, ಈ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. **ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿನ **ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಆಯತದ ಸ್ತಂಭದ ಅಳತೆಗಳು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ, ಘನಫಲವು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಪಾದವು ಆಯತವಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 5×3 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಆಗ ಘನಫಲವು ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಾದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

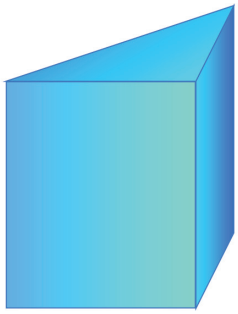
ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳು ಆಯತವಾದುದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಮುಖವನ್ನು ಪಾದವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.



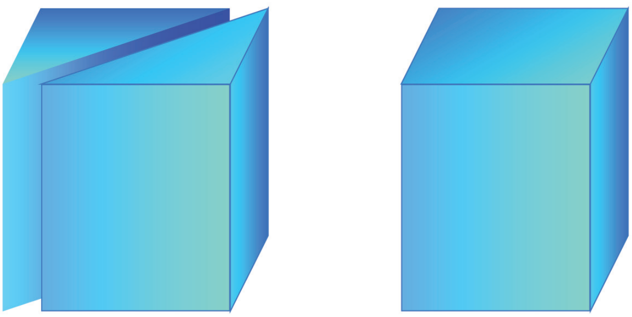


ಹೇಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಘನಫಲವೆಂಬುದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

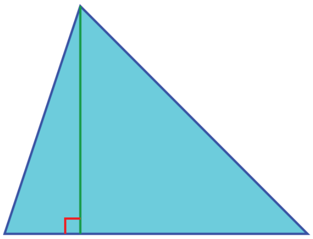


ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಆಯತ ಸ್ತಂಭವನ್ನುಂಟುಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.

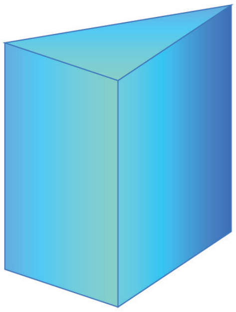


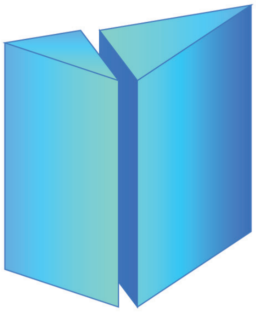
ಪಾದವಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು A ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇಂತಹ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೀಗೆ ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು) $2A$; ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೇ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು $2Ah$. ಆಗಿದೆ. ಇದು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳು ಸೇರಿದ ಘನಫಲವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು Ah. ಅಂದರೆ, ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಪಾದವು ಲಂಬಕೋನವಲ್ಲದ ತ್ರಿಕೋನವಾದರೋ? ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು, ಒಂದು ಶೀರ್ಷದಿಂದ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು, ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು.



ಆಗ ಪಾದವು ಲಂಬಕೋನವಲ್ಲದ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಈ ಗೆರೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳಾಗುವುವು.

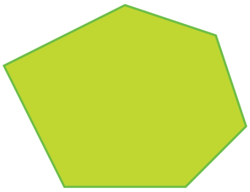


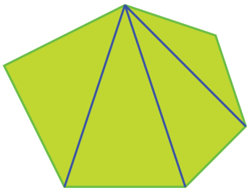


ತುಂಡರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮೊದಲ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಲಭಿಸುವುದು. ತುಂಡರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲಿರುವ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ A, ತುಂಡರಿಸಿ ಸಿಗುವ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ B, ಮತ್ತು C ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $A = B + C$. ಎಲ್ಲಾ ಸ್ತಂಭಗಳ ಉನ್ನತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವು $Bh + Ch = (B + C)\,h = Ah$. ಇದು ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವಲ್ಲವೇ?

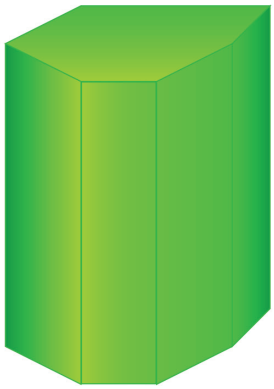
ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

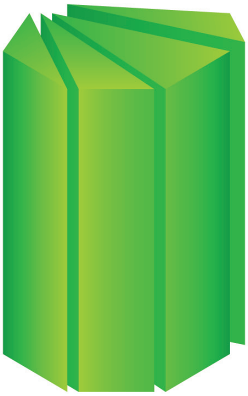
ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಶಿರವನ್ನು ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ, ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹೀಗೆ ವಿಭಜಿಸಿ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.





ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.





ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ a ಎಂದೂ, ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ h ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪಾದವನ್ನು n ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಾದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸ್ತಂಭವನ್ನು n ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳನ್ನಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣವು b_1, b_2, ..., b_n ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಘನಫಲವು b_1h, b_2h, ..., b_nh ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು,

$$b_1h + b_2h + \dots + b_nh = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)h = ah$$

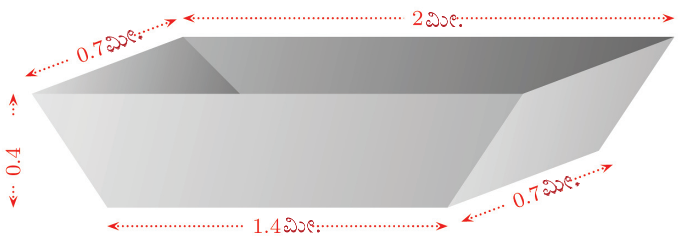
ಅಂದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು, ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವು

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಇದು ಮುಂಭಾಗದ ಮತ್ತು ಹಿಂಭಾಗದ ಮುಖಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬಗಳಾದ ಸ್ತಂಭವಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಈ ಸಮಲಂಬದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$\frac{1}{2} \times (2 + 1.4) \times 0.4 = 0.68 \text{ ಚದರಮೀಟರು.}$$

ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಘನಫಲವು,

$$0.68 \times 0.7 = 0.476 \text{ ಘನಮೀಟರು,}$$

ಒಂದು ಘನಮೀಟರು ಅಂದರೆ ಸಾವಿರ ಲೀಟರು. ಆಗ ಟ್ಯಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ 476 ಲೀಟರು ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(ನೀತಿ: ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಪಾದವು ಕೆಳಗಿರುವಂತೆ ಇರಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.)

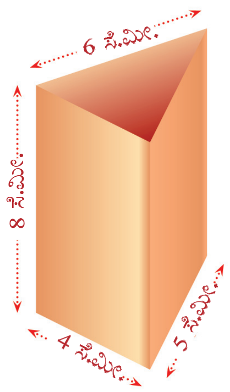
(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಸುತ್ತಳತೆ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಮಳೆನೀರನ್ನು ಸಂಗ್ರಹಿಸಲು, ಶಾಲಾ ಅಂಗಳದಲ್ಲಿ, ಸಮಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಂಡವಿದೆ. ಇದರ ಒಂದು ಭುಜ 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಹೊಂಡದ ಆಳ 3 ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದವರೆಗೆ ನೀರಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಹೊಂಡದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರಿದೆ?

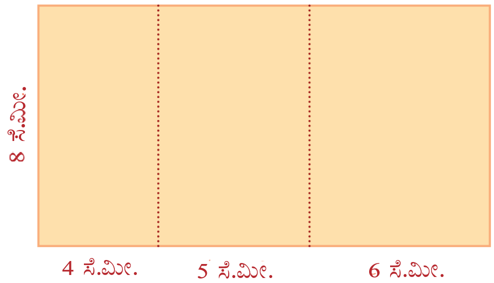
(3) ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಪಾದವು, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿದೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎತ್ತರದವರೆಗೆ ನೀರಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಗಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಿದರೆ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮೇಲಕ್ಕೇರಬಹುದು?

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೊಳವೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬೇಕು.



ಮೂರು ಆಯತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಅಂಟಿಸಿ ಉಂಟುಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದೇ ಆಯತವನ್ನು ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು.



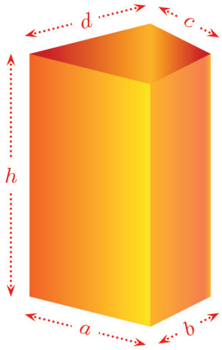
ಇದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಚದರಮೀಟರು ಕಾಗದ ಬೇಕು? ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

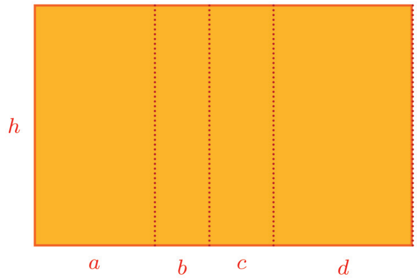
$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ

ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿಡುವ ಆಕೃತಿಯು ಹೇಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯ. **ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ**ದಲ್ಲಿ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಂತೆ ರಚಿಸಬೇಕು. 3D Graphics ನ Net ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿದ ರೂಪವು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರೂ ಲಭಿಸುವುದು. ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಸರಿಸುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸ್ತಂಭವು ರಚಿಸಲ್ಪಡುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮರೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ Algebra ದಲ್ಲಿನ Prism ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಿರುವುದರ ನೇರವಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. ರಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು Hide ಮಾಡಲು Algebra ದ Point ಎಂದು ಬರೆದಿರುವುದರಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಬಳಿಕ ರೈಟ್ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ Show Object ಎಂಬುದರ ನೇರವಿರುವ √ ಗುರುತನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು.

ಇದು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಎಲ್ಲಾ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಎಲ್ಲಾ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (lateral surface area) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಇದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು 15ನ್ನು 8ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ $4 + 5 + 6 = 15$, ಎಂಬುದು ಪಾದವಾದ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು 8 ಎಂಬುದು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ? ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಪಾದವು ತ್ರಿಕೋನದ ಬದಲಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೇ?





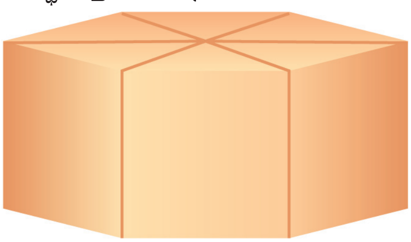
ಈ ಚತುರ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $(a + b + c + d)\,h$; ಅಂದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಮುಚ್ಚಿದ ಸ್ತಂಭವಾದರೆ ಹೊರಮೈಯ ಒಟ್ಟುವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು, ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಮರದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ 6 ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಯಿತು.



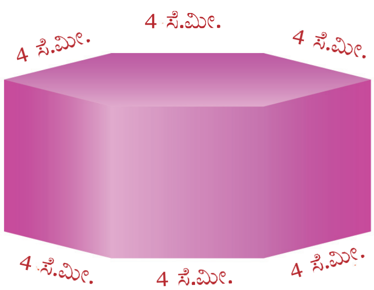
ಇದಕ್ಕೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ ಅಂದಗೊಳಿಸಲು, ಎಷ್ಟು ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದಬೇಕು?

ಇಲ್ಲಿ ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಾಣಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉನ್ನತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯು $48 \div 4 = 12$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಪಾದವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $12 \div 3 = 4$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಇನ್ನು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿನ ಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $6 \times 4 = 24$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು. ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $24 \times 4 = 96$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಎರಡು ಪಾದಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇಂತಹ 6 ತ್ರಿಕೋನ ಪಾದಗಳು ಸೇರಿರುವ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

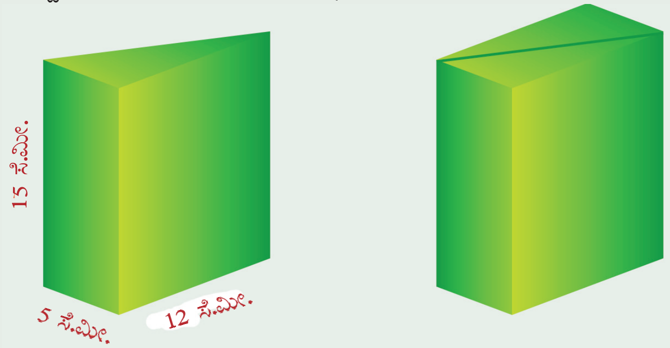
ಆಗ ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಹೊರಮೈಯನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$96 + \left(2 \times 24\sqrt{3}\right) = 96 + 48\sqrt{3} = 48\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

$\sqrt{3}$ ರ ಸರಿ ಸುಮಾರು ಬೆಲೆಯಾದ 1.73 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಇದು 179 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಹೇಗಿದ್ದರೂ 180 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಕಾಗದವು ಬೇಕಾಗುವುದು.

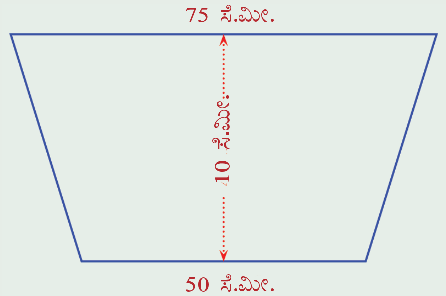
(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಸುತ್ತಳತೆ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪಾದವು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನವಾದ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು.



ಈ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(3) ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಸಮಲಂಬಮುಖಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

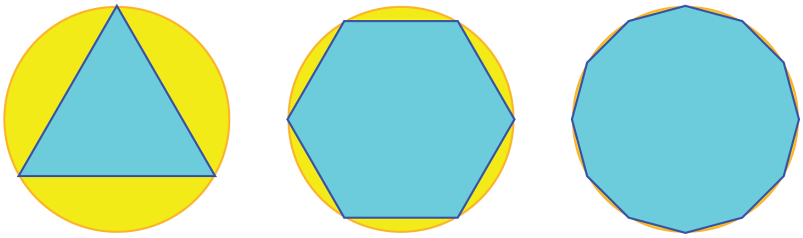


ಇದರ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಹೊರ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಕೊಡಲು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗೆ 100 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಬೇಕಾಗುವುದು?

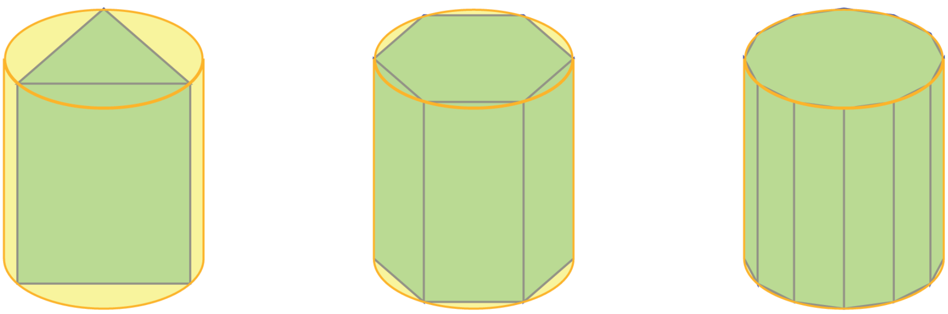
ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ

ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳೆಂದರೆ ಅಗ್ರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಬಹುಭುಜಗಳಿರುವ ಮತ್ತು ಬದಿಗಳು ಆಯತವೂ ಆಗಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಅಗ್ರಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಗಳು, ಬದಿಗಳು ಆಯತಗಳಾಗಿರುವ ಸ್ತಂಭಗಳೂ ಇವೆ. ದಪ್ಪ ಹಾಗೂ ಟೊಳ್ಳಾದ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ.

ಇಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ (cylinder) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು, ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೋ? ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಎಳೆಯುವ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲವೇ?



ಆಗ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳಲ್ಲಿ ಪಾದದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಅವು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದತ್ತ ತಲುಪುವುದಲ್ಲವೇ?



ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದೊಳಗಿನ ವಿಭಿನ್ನ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $p_1, p_2, p_3, ...$ ಎಂದೂ, ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p_1, p_2, p_3, ...$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು. ಎಲ್ಲಾ ಸ್ತಂಭಗಳ ಉನ್ನತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವು $p_1h, p_2h, p_3h, ...$ ಎಂಬಂತಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ch ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ch ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು , ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

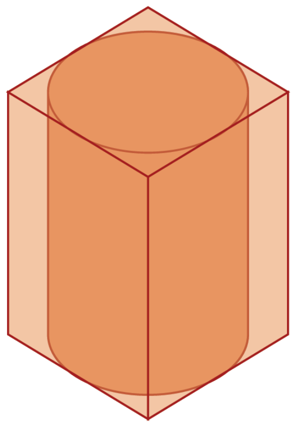
ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವನ್ನು π ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ.

ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವು $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ ಘನ ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಚೌಕಾಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುಂಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದವು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉನ್ನತಿಯಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತೆಗೆಯಬಹುದಾದ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಪಾದದೊಳಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತವು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಾಗಿದೆ. ಉನ್ನತಿಯು ಚೌಕಸ್ತಂಭದಷ್ಟೇ ಆಗಿದೆ.



ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು.

ಆಗ ಪಾದವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು; ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಘನಫಲವು $25\pi \times 20 = 500\pi$ ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

(1) ಕಬ್ಬಿಣದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯು 32 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟು?

(2) ಸಮಾನ ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 3:4 ಎಂಬ

ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಇವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

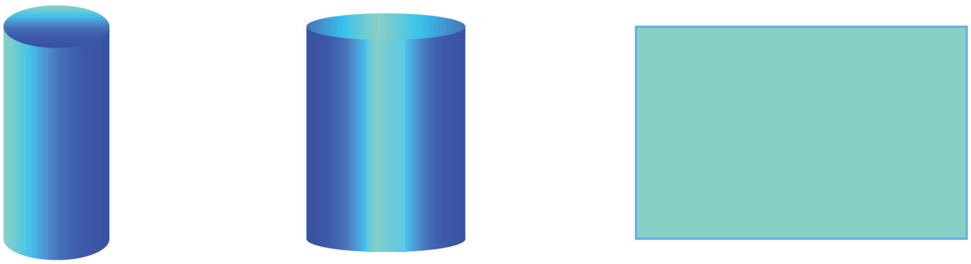
(3) ಎರಡು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 2:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲೂ ಉನ್ನತಿಗಳು 5:4ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲೂ ಆಗಿವೆ.

i) ಇವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯಾವುದು?

ii) ಮೊದಲ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ 720 ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಎರಡನೇ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

ವಕ್ರಮೈ

ಆಯಾತಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕಾಗದ ಅಥವಾ ತಗಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ ಕೊಳವೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು. ಅಥವಾ ಟೊಳ್ಳಾದ, ಎರಡು ಅಗ್ರಮುಖಗಳೂ ತೆರೆದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಆಯತವಾಗುವುದು.



ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (curved surface area) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಚುಟುಕಾಗಿ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯು ಪಾದವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಈ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ, ವ್ಯಾಸದ π ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದರೆ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.

ಅಗ್ರಮುಖವು ಮುಚ್ಚಿದ ಸ್ತಂಭವಾದರೆ, ಹೊರಮೈಯ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲಭಿಸಲು ಎರಡು ಅಗ್ರಮುಖಗಳ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

(1) ಒಂದು ಬಾವಿಯ ಒಳಗಿನ ವ್ಯಾಸ 2.5 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಆಳ 8 ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಿಮೆಂಟು ಸಾರಣೆ ಮಾಡಲು ಚದರ ಮೀಟರಿಗೆ 350 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಗುವುದು?

(2) 1.20 ಮೀಟರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೋಲ್‌ನ ವ್ಯಾಸವು 80 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ.

ಇದು ಒಂದು ಸಲ ತಿರುಗುವಾಗ, ಸಮತಟ್ಟಾಗುವ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

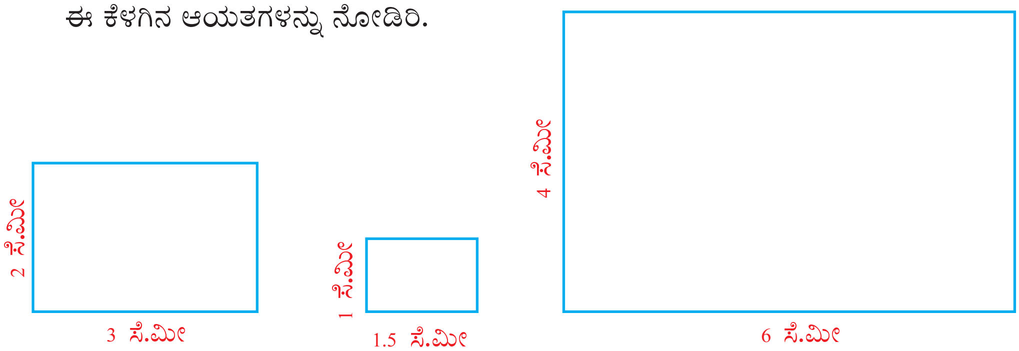
(3) ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು. • ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಸ್ತಂಭಗಳು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು.			

ಅನುಪಾತ

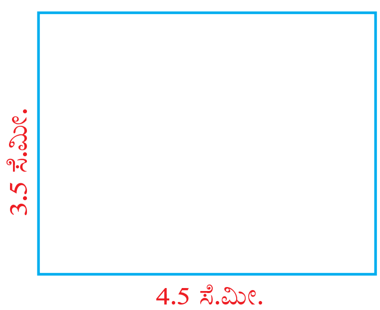
ಈ ಕೆಳಗಿನ ಆಯತಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲೊಂದು ಲೆಕ್ಕವಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಮೊದಲ ಆಯತದ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧವು, ಎರಡನೆಯ ಆಯತದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯು ಮೂರನೆಯ ಆಯತದ್ದಾಗಿದೆ. ಅಗಲವು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದಲ್ಲವೆ?

ಅಂದರೆ, ಈ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ, ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಹೊಸ ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಈ ಆಯತವನ್ನು ಮೇಲಿನ ಆಯತಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದೇ?

ಮೊದಲ ಆಯತದ ಉದ್ದದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯು ಈ ಆಯತದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ; ಅಗಲವು ಒಂದೂ ಮುಕ್ಕಾಲು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಬದಲಾಗಿದ್ದು ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದುದರಿಂದ, ಈ ಆಯತವು ಈ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ.

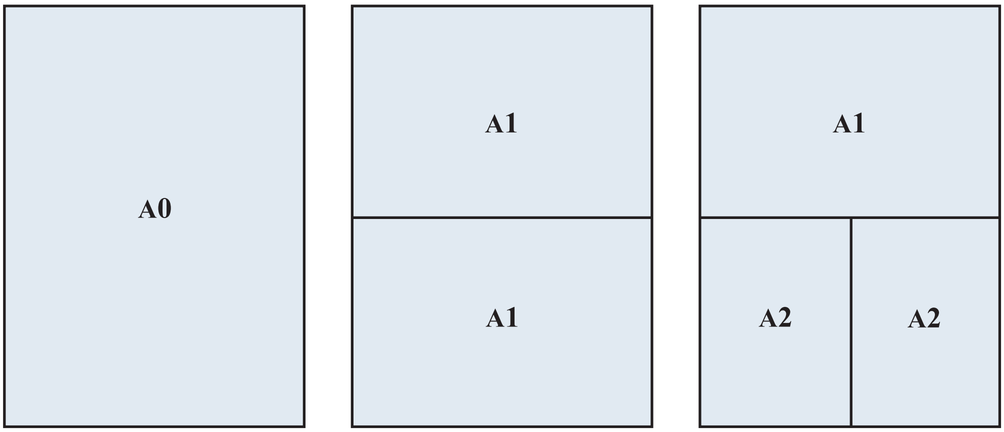
ಗುಂಪಿನ ಮೊದಲ ಆಯತದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿಟ್ಟು ತೀರ್ಮಾನಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೆ. ಅಲ್ಲದೆಯೂ ಇದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಗುಂಪಿನ ಎಲ್ಲಾ ಆಯತಗಳಲ್ಲೂ, ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಲ್ಲವೆ? ಹೊಸ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲವಲ್ಲವೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಗುಂಪಿನ ಮೂರು ಆಯತಗಳಲ್ಲೂ, ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3:2; ಹೊಸ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಇದು 9:7 ಆಗಿದೆ. ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲ.

ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅನುಪಾತ (proportion) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಮೂರು ಆಯತಗಳಲ್ಲೂ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

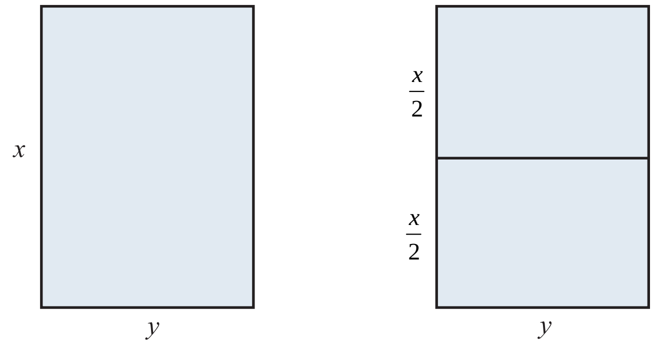
ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಹಲವು ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ತಯಾರು ಮಾಡುವುದಾದರೂ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲೂ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 16:9 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದೇಶದ ಬಾವುಟದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ನಿರ್ಧಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿವೆ. ಮುಂತಾದ ಇತರ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೆ?

ಅನುಪಾತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೋಡುವ: ಬರೆಯಲು ಮತ್ತು ಇತರ ಅಗತ್ಯಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ A4 ಕಾಗದವನ್ನುಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ?. A0, A1, A2,... ಹೀಗಿರುವ ಹಲವು ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕಾಗದಗಳಿವೆ. ಇದರ ಲೆಕ್ಕ ಹೇಗೆ?

A0 ಕಾಗದದ ಅರ್ಧವು A1 ಕಾಗದವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಅರ್ಧ A2 ಹೀಗೆ ಇವುಗಳ ಗಾತ್ರವು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.



ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಯ ಕೂಡ ಇದೆ. ಈ ಆಯತಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡುವ: ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಗುಂಪಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕಾಗದವನ್ನು, ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ A1, ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ, ಇದರ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು xಎಂದೂ, ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.



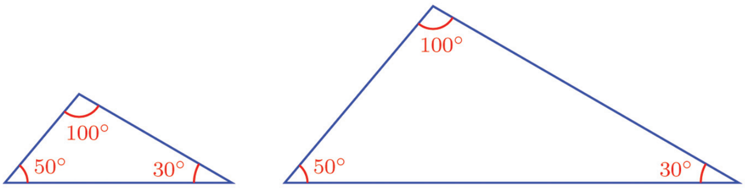
ಅರ್ಧವಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಿದ ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು y ಮತ್ತು ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ ಉದ್ದವು $\frac{x}{2}$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಎರಡು ಆಯತಗಳ ಭುಜಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, x ನ್ನು y ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ y ನ್ನು $\frac{x}{2}$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.
$\frac{x}{2}$ ರಿಂದ ಇರುವ ಭಾಗಾಕಾರವೆಂದರೆ. $\frac{2}{x}$ ರಿಂದ ಇರುವ ಗುಣಾಕಾರವಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ

$$y \div \frac{x}{2} = y \times \frac{2}{x} = \frac{2y}{x}$$

ಆಗ ಭುಜಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಸಲಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$$

ಇದರಿಂದ $x^2 = 2y^2$ ಎಂದೂ; ಅನಂತರ $x = \sqrt{2}\,y$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.
ಅಂದರೆ, A0, A1, A2 . . . ಎಂಬೀ ಕಾಗದಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು, ಚಿಕ್ಕ ಭುಜದ $\sqrt{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.
ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲೂ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

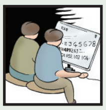


ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ , ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಜೋಡಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅವುಗಳೊಂದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಮತ್ತೊಂದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು (**ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ ಎಂಬ ಪಾಠ**). ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೇ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ

Dilate from Point ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸದೃಶ್ಯ ರೂಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಾದೃಶ್ಯ ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆಯಲ್ಲವೆ. ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಸದೃಶರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ, ಸುತ್ತಳತೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿ ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲೂ ಮೊದಲಿನ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಎರಡನೆಯ ಅಳತೆಯು ಬದಲಾಗುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ
(ii) ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
(iii) ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಹೊಸ ಶೈಲಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿವೆ. ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಇಂತಹ ಅನುಪಾತ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಪಾತ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಯೌಗಿಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮೂಲವಸ್ತುಗಳ ಭಾರವು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿರುವ ಓಕ್ಸಿಜನ್ ಮತ್ತು ಹೈಡ್ರೋಜನ್‌ಗಳ ಭಾರವು ಸರಿಸುಮಾರು 8:1 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ 100 ಗ್ರಾಂ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಸರಿಸುಮಾರು 88.8 ಗ್ರಾಂ ಓಕ್ಸಿಜನ್ ಮತ್ತು 11.2 ಗ್ರಾಂ ಹೈಡ್ರೋಜನ್ ಇವೆ. (ಒಂದು ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂ ನೀರಿನಲ್ಲೋ)



(1) ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ 10000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಮತ್ತು 15000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಎರಡು ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಾಗಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದನು. ಒಂದು ವರ್ಷ ಕಳೆಯುವಾಗ, ಮೊದಲ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ 900 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ಎರಡನೆ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ 1200 ರೂಪಾಯಿ ಬಡ್ಡಿ ಲಭಿಸಿತು?

i) ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿ ಲಭಿಸಿರುವುದೇ?

ii) ಮೊದಲ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯಾವುದು? ಎರಡನೆ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲೋ?

iii) ಮೊದಲ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯ ದರದ ಶೇಕಡಾಮಾನವೆಷ್ಟು? ಎರಡನೆ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲೋ?

(2) A0 ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಚದರ ಮೀಟರಾಗಿದೆ. A4 ಕಾಗದದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಕ್ಯಾಲ್ಸಿಯಂ ಕಾರ್ಬೋನೇಟಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಯಾಲ್ಸಿಯಂ, ಕಾರ್ಬನ್, ಓಕ್ಸಿಜನ್ ಇವುಗಳ ಭಾರ 10 : 3 : 12 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಯೌಗಿಕದ 150 ಗ್ರಾಂನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ 60 ಗ್ರಾಂ ಕ್ಯಾಲ್ಸಿಯಂ, 20ಗ್ರಾಂ ಕಾರ್ಬನ್, 70 ಗ್ರಾಂ ಓಕ್ಸಿಜನ್ ಇರುವುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಯಿತು. ಇದು ಕ್ಯಾಲ್ಸಿಯಂ ಕಾರ್ಬೋನೇಟ್ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರತೆ

ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಎರಡು ಮಡಿ ಮಾಡಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗುವುದು?

ಮೊದಲು ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈಗ ಅವುಗಳೆಲ್ಲ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದುವು. ಸುತ್ತಳತೆಯು ಮೊದಲು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿತ್ತು, ಈಗ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಚೌಕಕ್ಕೂ ಇದು ಸರಿಹೊಂದುವುದೇ?

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡಲು, ಬೀಜಗಣಿತವು ಉತ್ತಮವಾದ ದಾರಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಮೊದಲು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು x

ಸೆಂಟಿಮೀಟರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆ $4x$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವಾಗ, ಸುತ್ತಳತೆ $4 \times 2x = 8x$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಅಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿದರೆ? ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿಸಿದರೆ? ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ ಸಮಾನ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಚೌಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆಗ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

- ಯಾವುದೇ ಚೌಕದಲ್ಲಿ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಭುಜದ 4 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.
- ಯಾವುದೇ ಚೌಕದಲ್ಲಿ, ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $1 : 4$ ಆಗಿದೆ.
- ಚೌಕದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು.
- ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಸುತ್ತಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಭುಜದ ಉದ್ದದ $\sqrt{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು. **ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ಯಾವ ಯಾವ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು?

ಇನ್ನು ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಗಳಿಗೆ ಬದಲು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ?

ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, 1 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿಸಿದರೆ,ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು. ಹಾಗಾದರೆ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಅಥವಾ ಅವುಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಲ್ಲ.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ; ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ 10 ಮೀಟರು/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂಬ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ವಸ್ತುವು, 1 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರು, 2 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರು $\frac{1}{2}$ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 5 ಮೀಟರು ಸಂಚರಿಸುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, x ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ $10x$ ಮೀಟರು ಸಂಚರಿಸುವುದು ಅಂದರೆ, ಸಮಯದ 10 ಮಡಿ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ದೂರವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬದಲಾಗುವುದು, ಅಥವಾ, ಸಮಯ ಮತ್ತು ದೂರಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $1 : 10$ ಆಗಿದೆ. ದೂರವು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ವೇಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೆ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲಿನಿಂದ ಭೂಮಿಯ ಕಡೆಗೆ ಬೀಳುವ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷಣದಲ್ಲೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ; x ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವುದು $4.9x^2$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲಿ 4.9 ಮೀಟರು, ಎರಡು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 19.6 ಮೀಟರು ಸಂಚರಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ , ಸಮಯ ಮತ್ತು ದೂರಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಅವುಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಅವುಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಲ್ಲ.

ಈ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ, x ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗವನ್ನು y ಮೀಟರು/ಸೆಕೆಂಡು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಸಮಯ–ವೇಗ ಸಮವಾಕ್ಯವು $y = 9.8\ x$ ಎಂದಾಗುವುದು.ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವುದೇ?

ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ನೋಡಿರಿ.

ಸಂದರ್ಭ	ಅಳತೆಗಳು		ಸಮವಾಕ್ಯ	ಅನುಪಾತಿಕ
	x	y		
ಚೌಕ	ಭುಜ	ಸುತ್ತಳತೆ	$y = 4x$	ಆಗಿದೆ
	ಭುಜ	ಕರ್ಣ	$y = \sqrt{2}x$	ಆಗಿದೆ
	ಭುಜ	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	$y = x^2$	ಇಲ್ಲ
ಸಂಚಾರ ಒಂದೇ ವೇಗ	ಸಮಯ	ದೂರ	$y = 10x$	ಆಗಿದೆ
ಸಂಚಾರ ಬದಲಾಗುವ ವೇಗ	ಸಮಯ	ದೂರ	$y = 4.9\ x^2$	ಇಲ್ಲ
	ಸಮಯ	ವೇಗ	$y = 9.8x$	ಆಗಿದೆ

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿ ಒಂದು Angle slider αನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಒಂದು ಗೆರೆ AB ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ α ಕೋನ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಗೆರೆ AB' ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಆದರಿಂದ ABಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಲಂಬ ಮತ್ತು AB ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ ಇನ್ನು ಲಂಬವನ್ನು ಮರೆಮಾಡಬಹುದು. CA, CD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. C ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. CA, CD ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದೇ? 30°, 45°, 60° ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇವುಗಳಲೆಲ್ಲಾ ಏನನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು? ಒಂದು ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ, ಅದರೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅಳತೆಗಳೆಲ್ಲ ಅದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಬದಲಾಗುವುದು. ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಯ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೆ, ಈ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಬದಲಾವಣೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವ , ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಯನ್ನು x ಎಂದೂ, ಅದರೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು y ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಯಾವುದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ x ಎಂಬ ಅಳತೆಗೆ k ಎಂಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ (x ಬದಲಾಗುವಾಗ ಬದಲಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆ,) ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ y ಎಂದಾದರೆ, ಈ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ

$$y = kx$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$\frac{y}{x} = k$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು, ಆಗ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು $1 : k$ ಆಗಿ ಬದಲಾಗದೆ ನಿಲ್ಲುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ, x ಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ y ಬದಲಾಗುವುದು.

ಅನುಪಾತಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ (propotionality constant) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಭೂಮಿಗೆ ಬೀಳುವ ವಸ್ತುವಿನ ಸಮಯ–ವೇಗ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ 9.8 ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದೆ. ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯಿಂದಾದ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ(accelaration due to gravity) ಎಂಬುದು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭೌತಿಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವಾಗಿದೆ.

ಇದರಂತೆ ಒಂದೇ ಮೂಲವಸ್ತುವಿನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು (mass), ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಮೂಲವಸ್ತುವಿನ ಸಾಂದ್ರತೆ (density) ಎಂದು ಹೇಳುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕಬ್ಬಿಣದ ಸಾಂದ್ರತೆ 7.87; ತಾಮ್ರದ ಸಾಂದ್ರತೆ 8.96, ಅಂದರೆ, ಕಬ್ಬಿಣದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಗಾತ್ರದ 7.87 ಮಡಿ ಮತ್ತು ತಾಮ್ರದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಗಾತ್ರದ 8.96 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

?

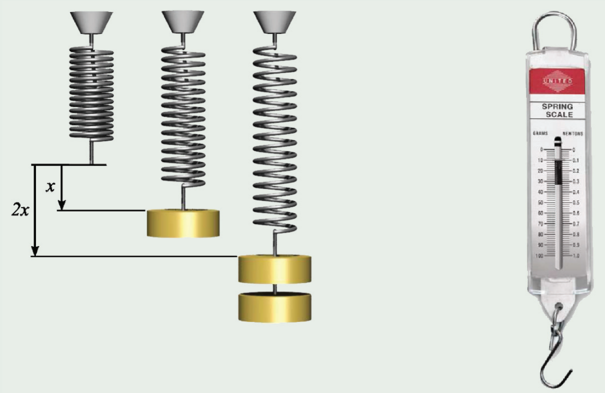
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮೊದಲ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಅಳತೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

- i) ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ
- ii) ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
- iii) ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಳೆಯ ತಿರುಗುವಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ
- iv) ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ.
- v) ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎರೆಯುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ ಮತ್ತು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಎತ್ತರ.

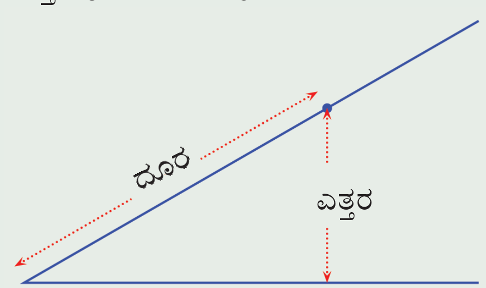
(2) ಮಳೆ ಬರುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಚದರಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲೂ ಬೀಳುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ ಸಮಾನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ

- i) ಒಂದು ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲ, ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.
- ii) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಇಟ್ಟಿರುವ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಮಳೆನೀರು ತುಂಬುವುದು ಯಾಕೆಂದು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸ್ಪ್ರಿಂಗ್‌ತ್ರಾಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾರವನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ ಅದರ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ, ಭಾರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.
ಸ್ಪ್ರಿಂಗ್ ತ್ರಾಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಇದನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ವಿವರಿಸಿರಿ.



(4) ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೋನದ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ದೂರ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಿಂದಿರುವ ಎತ್ತರವೂ ಬದಲಾಗುವುದು.



i) ಎತ್ತರವು ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) 30°, 45°, 60° ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

ಹಲವು ವಿಧದ ಅನುಪಾತ

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಎಂಟನೇ ಕ್ಲಾಸಿನಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸಂಬಂಧ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ?

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180°; ಷಡ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 720°. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವಾಗ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾಯಿತು. ಆಗ ಆ ಸಂಬಂಧವು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಲ್ಲ.

ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ಕಳೆದು ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 180^{o} ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಅಂದರೆ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಎಂದೂ, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ s^{o} ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

$$s = 180\ (n - 2)$$

ಇದರಲ್ಲಿ, $n - 2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ?

ಸಮವಾಕ್ಯವು

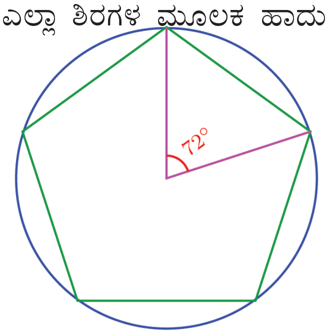
$$s = 180\ m$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆಗ s ಎಂಬ ಅಳತೆ, m ಎಂಬ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ , ಒಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2ನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದಳತೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದಳತೆ ಅನುಪಾತಿಕ ವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಮೊದಲ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗುವ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (π ಯಿಂದ) ಗುಣಕವಾದುದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗದೊಂದಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಇದರಂತೆ ಎತ್ತರದಿಂದ ಭೂಮಿಗೆ ಬೀಳುವ ವಸ್ತು ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಸಮಯದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ

ಯಾವುದೇ ಸಮಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಶಿರಗಳು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅಳತೆಯೆಷ್ಟು?



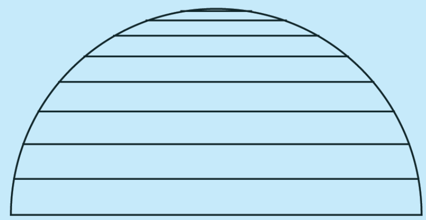
x ಭುಜವಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಈ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ y^{o} ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$y = \frac{360}{x} \qquad y = 360 \times \frac{1}{x}$$

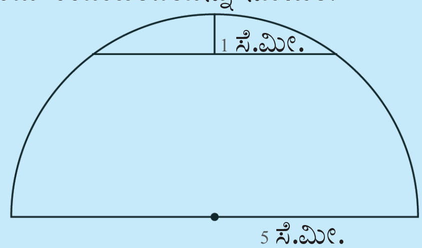
ಅಂದರೆ , ಇಲ್ಲಿ xನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ y ಬದಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕ್ಕೆ

ಅನುಪಾತ ಸಮಸ್ಯೆ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಹಲವು

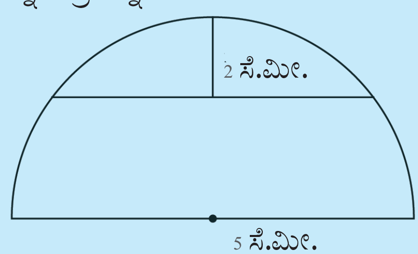


ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.ಮೇಲಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಈ ಬದಲಾವಣೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ? ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ 6 ಸೆ.ಮೀ. ಎಂದು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ)

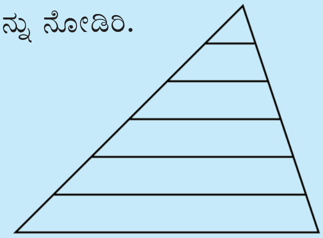
ಇನ್ನು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



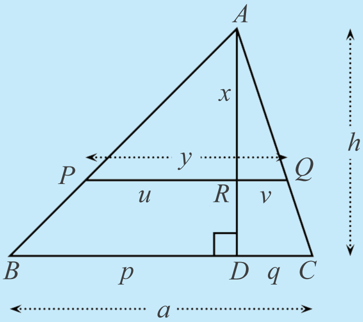
ಈಗ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಆಯಿತು. ಮೇಲಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿ ಗೊಳಿಸಿದರೆ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಬದಲಾವಣೆಯು ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲ.

ಎತ್ತರವೂ ಅಗಲವೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಹಲವು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ದೂರವು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ?



$\Delta APR, \Delta ABD$ ಇವುಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{u}{p}=\frac{x}{h}$$

$\Delta AQR, \Delta ACD$ ಇವುಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{v}{q}=\frac{x}{h}$$

ಇದರಿಂದ

$$\frac{u}{x}=\frac{p}{h}, \quad \frac{v}{x}=\frac{q}{h}$$

ಆಗ

$$\frac{y}{x}=\frac{u+v}{x}=\frac{p+q}{h}=\frac{a}{h}$$

ವಿವಿಧ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ x, y ಬದಲಾಗುವುದು a, h ಇವುಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೆ? ಅಂದರೆ x, y ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದಳತೆ ಬದಲಾಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇವೆ. ಹೀಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಮನುಪಾತ(inverse proportion) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಅಂದರೆ x ಎಂಬ ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವ ಸಮವಾಕ್ಯ $y = \frac{k}{x}$ ರೂಪದಲ್ಲಾದರೆ x ನ ವಿಲೋಮನುಪಾತದಲ್ಲಿ y ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂದು ಹೇಳುವರು. (ಇಲ್ಲಿಯೂ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಬದಲಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ k).

ಈ ರೀತಿಯ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿ ಹೇಳಲಿರುವ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ $y = kx$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತ (direct proportion) ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿದೆ.

ವಿಲೋಮನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 100 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ನೇರ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಸಂಚರಿಸುವ ವೇಗ 10 ಮೀಟರ್/ ಸೆಕೆಂಡ್ ಆದರೆ, ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಲು 10 ಸೆಕೆಂಡ್ ಬೇಕಾಗುವುದು. ವೇಗವನ್ನು 25 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, 4 ಸೆಕೆಂಡ್ ಸಾಕಾಗುವುದು.ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೇಗ x ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದೂ, ಗುರಿ ತಲುಪಲು ತಗಲುವ ಸಮಯ y ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದೂ ಬರೆದರೆ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಹೀಗಾಗುವುದು.

$$y=\frac{100}{x}$$

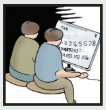
ಅಂದರೆ, x ನ ವಿಲೋಮನುಪಾತದಲ್ಲಿ y ಬದಲಾಗುವುದು.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾಗಿರುವುದು ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣಾ ನಿಯಮ (law of universal gravitation)

ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಆಕರ್ಷಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಆಕರ್ಷಣ ಬಲವು ಅವುಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೂ, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮನುಪಾತದಲ್ಲಿಯೂ ಇದೆ.

ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು m_1, m_2 ಎಂದೂ, ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ r ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಈ ನಿಯಮದ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$$



(1) i) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ? ಆಗಿದ್ದರೆ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಇತರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಅನುಪಾತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

(3) ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಎದುರಿರುವ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದಗಳೊಳಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು? ಅತೀ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಬದಲಾಗಿ ಅತೀ ಚಿಕ್ಕ ಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ?

(4) ಸಮಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಯಾವುದು? ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದೇ?

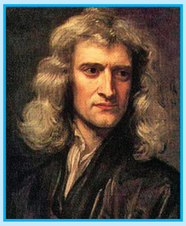
(5) ಒಂದು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀರನ್ನು ಒಂದು ಪೈಪ್‌ನ ಮೂಲಕ ತುಂಬಿಸಬೇಕು. ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಪೈಪ್‌ಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ದರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು. ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಯೂ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿಯೂ ಬರೆಯಿರಿ.

i) ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸುವ ದರ, ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಕ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಎತ್ತರ

ii) ನೀರು ತುಂಬಿಸುವ ದರ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾಂಕ್ ತುಂಬಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ.

ನ್ಯೂಟನ್

ಪ್ರಕೃತಿ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು ಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಯನ್ನು ಮೊತ್ತ ಮೊದಲಾಗಿ ಹದಿನಾರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗೆಲಿಲಿಯೋ ಮಂಡಿಸಿದನು. ಈ ಚಿಂತನೆಯ ಅತೀ ಉತ್ತಮವಾದ ಪ್ರಕಟಣೆಯು ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ನ್ಯೂಟನ್ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ತತ್ವಗಳ ಗಣಿತ ನಿಯಮಗಳು (Philosophia Naturalis Principia Mathematica) ಎಂಬ ಗ್ರಂಥವಾಗಿದೆ. ಚಲನೆಯ ಗಣಿತ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣಾ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಇದರ ಮೂಲಕ ನ್ಯೂಟನ್ ಪ್ರಕಟಿಸಿದನು. ಈ ರೀತಿಗಳು ಅನಂತರ ಕಲನ (calculus) ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯಾಗಿ ಬೆಳೆಯಿತು.



KT 531-6/Maths-9(K) Vol-2

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು. • ಅನುಪಾತಿಕವಾದ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು. • ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಅನುಪಾತಿಕ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. • ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು.			

13

ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್

ಸರಾಸರಿ

ಆರನೇ ತರಗತಿಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿಯ ಕುರಿತು ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಒಂದು ಸರಾಸರಿ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕಾ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವ ಐದು ಗೆಳೆಯರ ದಿನದ ಆದಾಯವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

350 ರೂಪಾಯಿ, 400 ರೂಪಾಯಿ, 350 ರೂಪಾಯಿ, 450ರೂಪಾಯಿ, 450 ರೂಪಾಯಿ,

ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನ ದಿನದ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ?

ಐದು ಮಂದಿಯ ಒಂದು ದಿನದ ಒಟ್ಟು ಆದಾಯವನ್ನು ಐದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಅದರಲ್ಲಿ 350, 450 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎರಡು ಸಲ ಆವರ್ತಿಸಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ, ಕೂಡಿಸುವುದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸುಲಭ ಮಾಡಬಹುದು.

$$(2 \times 350) + (2 \times 450) + 400 = 2000$$

ಸರಾಸರಿಯು 400 ರೂಪಾಯಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಆದಾಯವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಹೇಳದೆ, ದಿನದ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯವು 400 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಈ ಐದು ಮಂದಿಯ ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಯ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯುಂಟಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಕೈಗಾರಿಕಾ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ವಿಭಿನ್ನ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ದಿನಕೂಲಿಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ದಿನದ ಕೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕೆಲಸದವರ ಸಂಖ್ಯೆ
300	2
350	4
400	6
450	4
500	4

ದಿನಕೂಲಿಯ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

ಒಟ್ಟು 20 ಕಾರ್ಮಿಕರಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಒಟ್ಟು ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಆವರ್ತಿಸುವ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ದಿನಕೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಟ್ಟು ಕೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ)
300	2	600
350	4	1400
400	6	2400
450	4	1800
500	4	2000
ಒಟ್ಟು	20	8200

ದಿನಕೂಲಿಯ ಸರಾಸರಿ $8200 \div 20 = 410$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಕೂಲಿಯು, 300ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 500ರೂಪಾಯಿಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಸರಾಸರಿ ಕೂಲಿಯಾದ 410 ರೂಪಾಯಿಯೂ ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

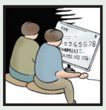
ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 100 ಮತ್ತು 200ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ 8 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯಲಾಗಿದೆಯೆಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 100ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೋ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ 8 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 800ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೋ ಆಗಿದೆ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಲಭಿಸುವ ಸರಾಸರಿಯು 100ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೋ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೋ ಆಗಿದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 200ಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೋ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೋ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸರಾಸರಿಯೂ ಅದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

100, 200, 8 ಎಂಬುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಅವುಗಳ ಸರಾಸರಿಯು ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದು.

?



(1) ಒಂದು ವಾಲಿಬಾಲ್ ತಂಡದ 6 ಕ್ರೀಡಾಳುಗಳ ಭಾರವು ಸಮಾನವಲ್ಲ. ಸರಾಸರಿ ಭಾರವು 60 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಆಗಿದೆ.

i) 60 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಭಾರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಕ್ರೀಡಾಳುವಾದರೂ ಇದ್ದಾನೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

ii) 60 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಭಾರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಆಟಗಾರನಾದರೂ ಇದ್ದಾನೆ ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(2) ಸರಾಸರಿ 60 ಆಗಿರುವ 6 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, 60 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು 2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ii) 60 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, 60 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ 2 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(3) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಕು	ಮಕ್ಕಳು
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

ತರಗತಿಯ ಸರಾಸರಿ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ದಿನಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಳೆ (ಮಿ.ಮಿ.)	ದಿನಗಳು
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ಆ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನದ ಮಳೆಯ ಸರಾಸರಿ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(5) ಒಬ್ಬ ರೈತನಿಗೆ ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ರಬ್ಬರ್ ಶೀಟ್‌ನ ಮಾಹಿತಿಗಳು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ರಬ್ಬರ್ (ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ)	ದಿನಗಳು
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

i) ಈ ತಿಂಗಳ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ರಬ್ಬರ್ ಶೀಟ್ ಲಭಿಸಿತು?

ii) ರಬ್ಬರಿನ ಬೆಲೆಯು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗೆ 120 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ತಿಂಗಳಿನ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ರಬ್ಬರ್‌ನಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಸರಾಸರಿ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

ವಿಭಾಗ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು

ಮಾಹಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗ ಅದನ್ನು ವಿಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಎಂಟನೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೆ. ಅಂತಹ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ದಿನ ಸಂಬಳದ ಕಾರ್ಮಿಕರನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದಿನದ ಸಂಬಳ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
250 - 300	8
300 - 350	4
350 - 400	16
400 - 450	7
450 - 500	5

ಈ ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ದಿನ ಸಂಬಳದ ಸರಾಸರಿ ಎಷ್ಟು ?

ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವ ಒಟ್ಟು ದಿನ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 8 ಕಾರ್ಮಿಕರಿಗೆ 250 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 300 ರೂಪಾಯಿ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕೊಡುವರಾದರೂ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ನಿಖರವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಕೊಡುವರೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಲಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಇವರಿಗೆ ಕೊಡುವ ಒಟ್ಟು ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಮಾಹಿತಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಲದು.

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಕುರಿತು ಕೆಲವು ಊಹೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು. ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಂಟು ಮಂದಿಯ ಸಂಬಳವು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ

ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ಅವರೆಲ್ಲರ ಸಂಬಳವು 250 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 300 ರೂಪಾಯಿಯ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎಂಟು ಮಂದಿಯ ಸರಾಸರಿ ಸಂಬಳವು 250 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 300 ರೂಪಾಯಿಯ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಸರಾಸರಿಯು ಸರಿಸುಮಾರು 250 ಮತ್ತು 300ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವವರ ಸರಾಸರಿ ಸಂಬಳವು, ಆ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಊಹಿಸಿ ಇಂತಹ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಸರಾಸರಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು.

ಇದರಂತೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸೋಣ.

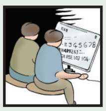
ದಿನದ ಸಂಬಳ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕಾರ್ಮಿಕರ ಸಂಖ್ಯೆ	ವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯಾಂಕ	ಒಟ್ಟು ಸಂಬಳ
250 - 300	8	275	2200
300 - 350	4	325	1300
350 - 400	16	375	6000
400 - 450	7	425	2975
450 - 500	5	475	2375
ಒಟ್ಟು	**40**		**14850**

ಇನ್ನು ಸರಾಸರಿ ದಿನ ಸಂಬಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಕೇರಳದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಲೆಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಭಾರವನ್ನು, ಕೇರಳದ ಒಟ್ಟು ಜನರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ ಮುಂತಾದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಂದ, ಅವರ ಸರಿಸುಮಾರಾದ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕನಿಷ್ಟ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ.

ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದೆಂಬುವುದು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರವಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸರಾಸರಿ (average), ಅಥವಾ ಕೇಂದ್ರ ಪ್ರವಣತೆ (central tendency)ಎಂಬುದಾಗಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು.ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸರಾಸರಿಯೆಂದು ಕರೆಯುವ, ಮೊತ್ತವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಲಭಿಸುವ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಧ್ಯಮಾನ (arithmetic mean or mean) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ದಿನ ಸಂಬಳದ ಮಧ್ಯಮಾನವು 371.25 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ.



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮಧ್ಯಮಾನವಾಗುವಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ಮತ್ತು 30 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ 6 ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 20 ii) 15 iii) 25

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಎತ್ತರದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಎತ್ತರ (ಸೆ.ಮೀ.)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

ಈ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳ ಎತ್ತರದ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರ ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಯ	ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	16
40 - 45	22
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಪ್ರಾಯದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಭಾರ (ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	7		6	3	1

ಭಾರದ ಮಧ್ಯಮಾನ 26 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಆಗಿದೆ. 25 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು 27 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂನ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳಿದ್ದಾರೆ?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಿದೆ	ಇನ್ನು ಉತ್ತಮಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ

ಟಿಪ್ಪಣಿ