வகுப்பு X

கணிதம்

பகுதி - 1

MATHS X
TAMIL MEDIUM

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

மாநிலக் கல்வி ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT), கேரளம்
2016

தேசியகீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா,
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா,
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா,
உச்சல ஜலதி தரங்கா,
தவ சுப நாமே ஜாகே,
தவ சுப ஆசிஸ மாகே,
காகே தவ ஜய காதா
ஜனகண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா.
ஜய ஹே, ஜயஹே, ஜயஹே
ஜய ஜய ஜய ஜயஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு . இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர்.எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம்வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்து கொள்வேன். என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். நான் எனது நாட்டினுடையவும், நாட்டு மக்களுடையவும் வளத்திற்காகவும், இன்பத்திற்காகவும் முயற்சி செய்வேன்.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

அன்பு மாணவர்களே,

எண்ணிக்கைகளின், அளவுகளின் கணக்கீடுகளில் இருந்தே கணிதத்தின் தொடக்கம் குறிக்கப்பட்டது. இது வேளாண் யுகத்தில் பரப்பளவுகளின் இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆயிற்று. காலநிலையைக் கணக்கிடும்போது வானவியலாக உயர்ந்து முக்கோணவியல் எனற கணிதக் கிளையாக வளர்ந்தது. மறுமலர்ச்சிக் கால ஐரோப்பாவில், முக்கோணவியல், கடற்பயணங்களின் அடிப்படையாக அமைந்தது. இன்றைய உலகில் கோள்கள் வழியாக உள்ள இட உறுதிப்பாட்டின் அடித்தளம் ஆயிற்று. பதினேழாவது நூற்றாண்டின் கணிதவியலாளர்கள் சார்பு எண்களின் செயல்பாடுகளாக விரித்துரைத்த கோட்பாடுகள், இ-வாணிபத்தின் பாதுகாப்புச் செயல்பாடுகளை நடைமுறைப்படுத்துவதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கணிதத்தின் எல்லையற்ற பயன்பாடுகளைப் பகுத்தறிவுடன் அதன் கோட்பாடுகளில் இலயித்து ஆனந்தம் பெறவும் அனைவருக்கும் இயலட்டும் என வாழ்த்துகிறேன்.

அன்பான வாழ்த்துக்களுடன்,

முனைவர். பி.ஏ. பாத்திமா
இயக்குநர்,
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி

Text Book Development Commite

Participants in Workshop

T.V. Prakasan
GHSS, Vazhakkadu
Malappuram.

Unnikrishnan. M.V.
GHSS, Kumbala
Kasaragod.

Vijayakumar. T.K.
GHSS, Cherkula
Kasaragod.

Ramanujam. R
MNKMGHSS, Pulapatta
Palakkad.

Anilkumar.M.K.
SKNJHSS, Kalpatta
Vyanad

Ubaidhulla.K.C
SOHSS, Areacode.
Malappuram.

Ramesan. N.K.
RGMHSS, Mokeri. Kannur.

Jabir.K
GVHSS, Mogran, Kasaragod.

SreeKumar. T
Govt GHSS, Karamana
Thiruvananthapuram.

K.J. Prakash
GMGHSS, Pattom
Thiruvananthapuram.

C.P.A.Karim
SOHSS Arikkode
Malapuram

Muhammadali. P.P
GMHSS, Collicut Univercity
Campus
Malappuram

P.P.Prabaharan
Rtd. Teacher
Prasanth, Panur,Kozhikodu

Cover

Rajivan. N.T
GHSS, Thariode, Vyanad.

Experts

Dr. E. Krishnan
Rtd Prof. University College
Thiruvananthapuram.

Venugopalan. C
Asst. Prof., Govt College of Teacher
Education, Thiruvananthapuram.

Dr. Rameshkumar
Asst. Prof, Kerala, Univercity
Thiruvananthapuram.

Dr. Sarachandran
Rtd Dy.Directer of Collegeate
Education Kottayam

Accordamic co-ordinator

Sujithkumar. G
Research Officer, SCERT.

TAMIL VERSION

Dr. Kanchana
Former Prof. & Head,
Dept. of Tamil,
University of Kerala.

T.Kumaradhas
Headmaster (Retd.),
GHS Kozhippara,
Palakkad.

Domanatha Sarath Kame
HSA, GHSS, Anakkara,
Idukki

M.J. David
Headmaster (Retd.),
GHS Meenakshipuram,
Palakkad.

S.C. Edwin Daniel
Headmaster (Retd.),
GHS Pambanar,
Idukki.

K. Krishnakumar
HSA GHSS, Kumily, Idukki

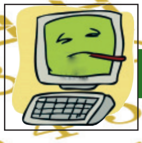
Accordamic co-ordinator

Dr. D. Sahayadhas
Research Officer, SCERT.

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidhyabhavan, Poojapura. Thiruvananthapuram - 695 012

உள்ளடக்கம்

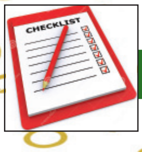
இந்தப் பாடப் புத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில



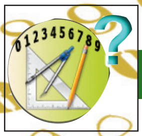
ஐ.சி.டி. வாய்ப்பு

கணக்கைச் செய்து பார்க்கலாம்

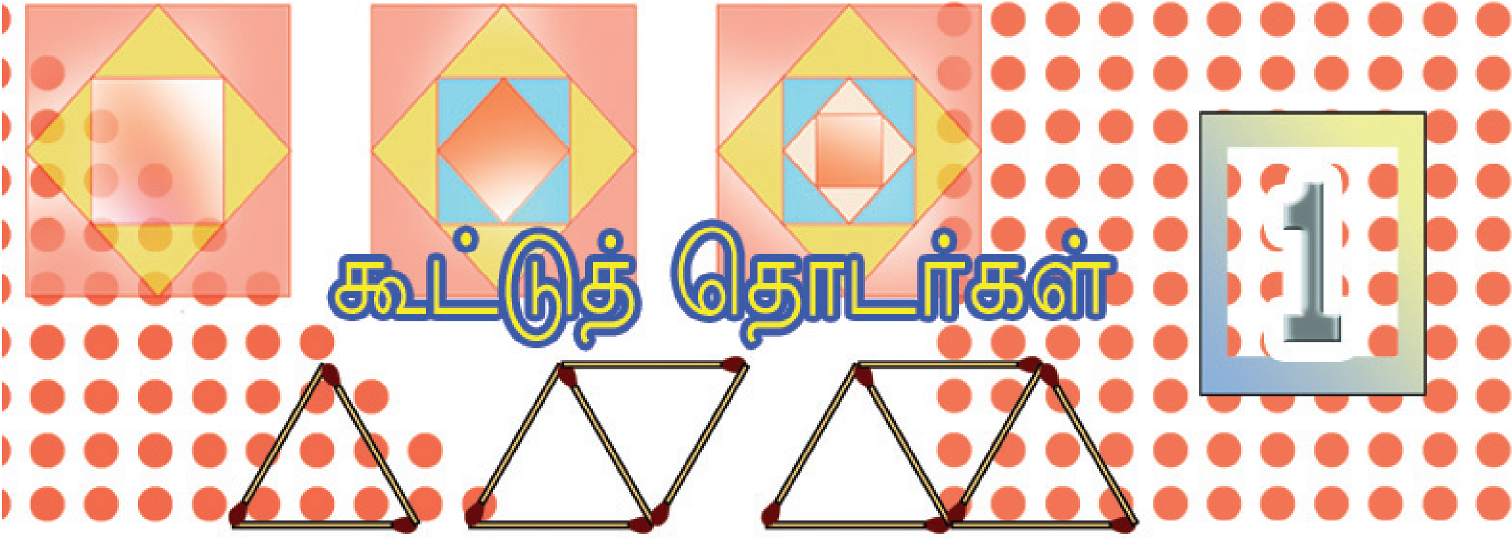
ஆராய்வோம்



மீள்பார்வை



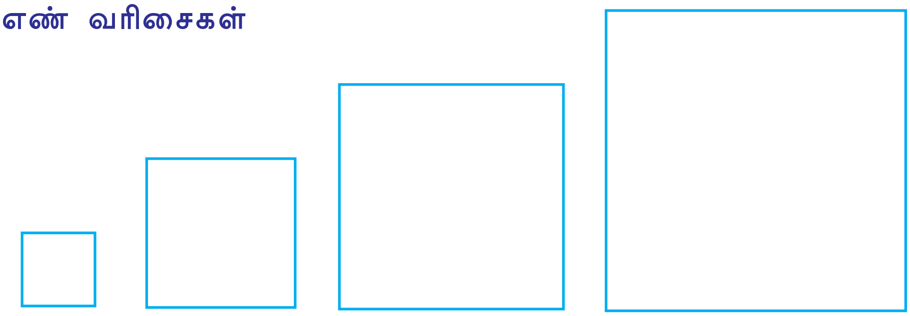
கலந்துரையாடலாம்



கூட்டுத் தொடர்கள்

1

எண் வரிசைகள்



படத்திலுள்ள சதுரங்களைப் பார்க்கவும். அவற்றின் சுற்றளவுகள் எவ்வளவு? பரப்பளவுகளோ?

பக்கங்களின் நீளம்

1 செ.மீ., 2 செ.மீ., 3 செ.மீ., 4 செ.மீ., ...

என இவ்வாறு தொடர்ந்தால், சுற்றளவு

4 செ.மீ., 8 செ.மீ., 12 செ.மீ., 16 செ.மீ., ...

என்று தொடர்கிறது. பரப்பளவு

1 ச.செ.மீ., 4 ச.செ.மீ., 9 ச.செ.மீ., 16 ச.செ.மீ., ...

என்றும்.

எண்களை மட்டுமாகக் கூறினாலோ?

பக்கங்களின் நீளம்

1, 2, 3, 4, ...

என இவ்வாறு எண்ணல் எண்களை வரிசையாக எழுதினால், சுற்றளவு

4, 8, 12, 16, ...

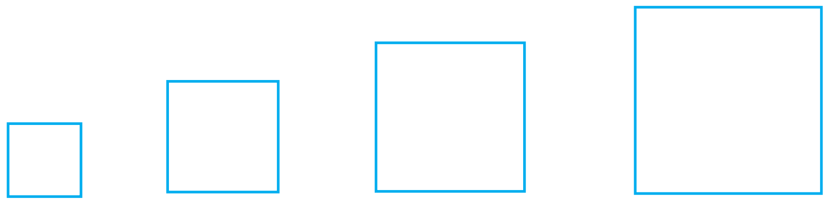
என நான்கின் மடங்குகளின் வரிசை; பரப்பளவு

1, 4, 9, 16, ...

என்ற முழு வர்க்கங்களின் வரிசை.

இவற்றின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களோ? எழுதிப் பார்க்கவும்.

பக்கங்களின் நீளத்தை ஒரு சென்டிமீட்டர் வீதம் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக அரை சென்டிமீட்டர் வீதம் கூட்டினாலோ?

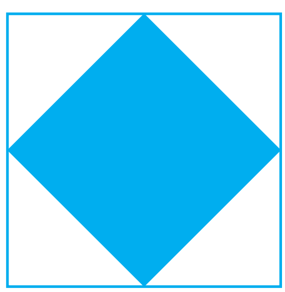


1 செ.மீ. $\quad 1\frac{1}{2}$ செ.மீ. $\quad$ 2 செ.மீ. $\quad 2\frac{1}{2}$ செ.மீ.

பக்கம்	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
சுற்றளவு	4,	6,	8,	10,	...
பரப்பளவு	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
மூலைவிட்டம்	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

இதைப்போன்று ஏதேனும் ஒரு விதிமுறைக்கு ஏற்ப ஒன்றாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது,..... என இவ்வாறு வரிசையாக எழுதுகின்ற ஓர் எண் தொகுப்பை **எண்தொடர் (number sequence)** எனக் கூறுவர்.

சதுரங்களைப் பயன்படுத்தி மற்றொரு தொடரை உருவாக்கலாம். பக்கங்களின் நீளம் ஒரு மீட்டர் உள்ள ஒரு சதுரத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்தால் மற்றொரு சதுரம் கிடைக்கும்.



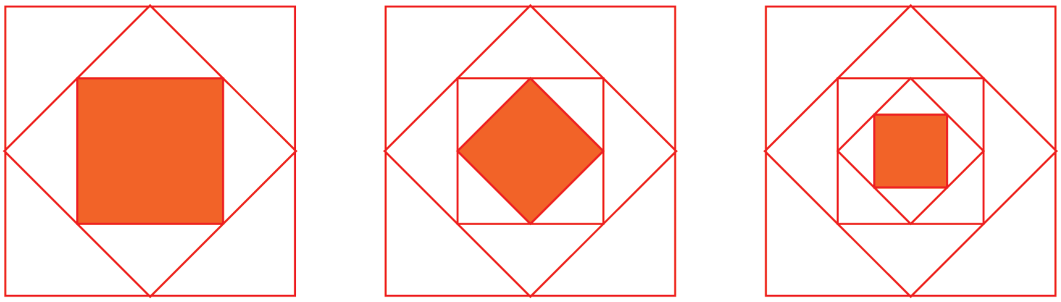
1 மீட்டர்

இந்தச் சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

அதன் மூலைவிட்டம் ஒரு மீட்டராகும்; சதுரத்தின் பரப்பளவு மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கத்தின் பாதி அல்லவா. (எட்டாம் வகுப்பில் **நாற்கரத்தின் பரப்பளவு** என்ற பாடத்தில், **சாய்வுசதுரம்** என்ற பகுதி)

அப்படியானால், சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவு அரை சதுரமீட்டர்.

இது தொடர்ந்தால்,



1 மீட்டர் 1 மீட்டர் 1 மீட்டர்

ஒவ்வொரு முறையும் பரப்பளவு பாதி ஆகும், இவ்வாறு கிடைக்கும் எண் தொடர் என்ன?

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

இயற்பியலில் இருந்தும் தொடர்களை உருவாக்கலாம். மேலிருந்து கீழ் நோக்கி விழும் ஒரு பொருளின் வேகம் படிப்படியாகக் கூடும். t வினாடி நேரத்தில், வேகம் v மீட்டர்/வினாடி என எடுத்தால்,

$$v = 9.8t$$

என்பதே நேரம் - வேகச் சமன்பாடு.

t வினாடி நேரத்தில் பயணிக்கும் தூரம் s மீட்டர் என எடுத்தால்,

$$s = 4.9t^2$$

என்பதே நேரம் - தூரச் சமன்பாடு.

அப்படியானால் இதைப் பயன்படுத்தி இரு தொடர்களை உருவாக்கலாம்.

நேரம்	1,	2,	3,	4,	...
வேகம்	9.8,	19.6,	29.4,	39.2,	...
தூரம்	4.9,	19.6,	44.1,	78.4,	...

அளவுகள் இல்லாத சில சார்பு எண்களின் சிறப்புத் தன்மைகளைப் பயன் படுத்தித் தொடர்களை உருவாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பகா எண்களை ஏறு வரிசையாக எழுதினால்,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

எனத் தொடர்கின்ற தொடர் கிடைக்கும்.

$\frac{21}{37}$ என்ற பின்ன எண்ணின் தசம வடிவத்தின் இலக்கங்களை இடமதிப்பின் வரிசையில் எழுதினால்,

$$5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \ldots$$

என்ற தொடராகும்.

இது போன்று π என்ற எண் எனில்,

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \ldots$$

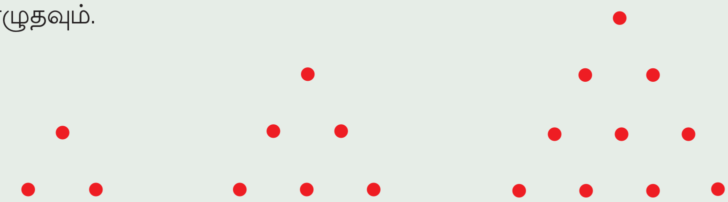
என்ற தொடர் கிடைக்கும்.

ஒரு தொடரைப் பலமுறைகளில் விவரிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 1 இல் முடிகின்ற எண்ணல் எண்களின் தொடர்,

1, 11, 21, 31, ...

இதனையே 10 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 கிடைக்கின்ற எண்களின் தொடர் என்றும் கூறலாம்.

(1) பொட்டுகளை அடுக்கி முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம். ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் உள்ள பொட்டுகளின் எண்ணிக்கையை எழுதவும்.



தொடர்ந்து வரும் மூன்று முக்கோணங்கள் உருவாக்குவதற்குத் தேவையான பொட்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடவும்.

(2) சமபக்க முக்கோணம், சதுரம், ஒழுங்கு ஐங்கோணம் என இவ்வாறு தொடர்கின்ற வடிவியல் வடிவங்களின் தொடரிலிருந்து கீழ்க்கூறப்படும் எண் தொடர்களை உருவாக்கவும்.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 3, 4, 5, ...

உட்கோணங்களின் தொகை

வெளிக்கோணங்களின் தொகை

ஓர் உட்கோணத்தின் அளவு

ஒரு வெளிக்கோணத்தின் அளவு

(3) 3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 1 வரும்எண்ணல் எண்கள் மீதி 2 வரும் எண்ணல் எண்கள் என்பனவற்றின் தொடர்களை எழுதவும்.

(4) 1, 6 என்ற இலக்கங்களில் முடியும் எண்ணல் எண்களின் தொடரை எழுதவும். இத்தொடரை வேறு இரு முறைகளில் விவரிக்கவும்.

(5) ஒரு கனசென்டிமீட்டர் இரும்பின் எடை 7.8 கிராம் ஆகும். பக்கங்களின் நீளம் 1 செ.மீ., 2 செ.மீ., 3 செ.மீ., ... என இவ்வாறு உள்ள இரும்பு சதுரக்கட்டைகளின் கனஅளவையும் எடையையும் தொடர்களாக எழுதவும்.

தொடர்களின் இயற்கணிதம்

பக்கங்களின் நீளம் 1 செ.மீ., 2 செ.மீ., 3 செ.மீ., ... என இவ்வாறு உள்ள சதுரங்களின் சுற்றளவுகளை வரிசையாக எடுத்தால்,

4, 8, 12, ...

என்ற தொடர் கிடைக்கும் எனப் பார்த்தோம்.

ஒரு தொடரிலுள்ள எண்களை அதன் **உறுப்புகள் (terms)** எனக் கூறுவர்.

அதாவது மேலே எழுதிய தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் 4, 8, 12, ... என்பனவாகும். மேலும் விளக்கமாகக் கூறினால், ஒன்றாவது உறுப்பு 4, இரண்டாவது உறுப்பு 8, மூன்றாவது உறுப்பு 12, ...

இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

இடம்	1,	2,	3,	...
உறுப்பு	4,	8,	12,	...

இதில் 5-ஆவது உறுப்பு என்ன? 20 ஆவது உறுப்பு?

இங்கு இடத்திற்கும் உறுப்புக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

தொடரிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும், இடத்தின் நான்கு மடங்காகும்.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி இதையே இவ்வாறு எழுதலாம்:

தொடரின் n ஆவது உறுப்பு $4n$

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகளை இடத்தின் வரிசையில் எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி எழுதுவது x_1, x_2 , x_3 , ... அல்லது y_1, y_2, y_3, ... என்ற முறையிலாகும். எனவே மேலே எழுதிய தொடர் விதிமுறையை மீண்டும் சுருக்கலாம்.

$$x_n = 4n$$

இதில் n ஆக 1, 2, 3, ... எனத் தொடர்ச்சியான எண்ணல் எண்களை எடுக்கும்போது,

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8$$
$$x_3 = 12$$
$$\ldots$$

எனத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் கிடைக்கும்.

தொடரின் 100 ஆவது உறுப்பு

$$x_{100} = 400$$

என்று நேரடியாகக் கணக்கிடலாம்.

ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி, ஒரு கோடு பக்கமான பலகோணங்களின் தொடர் வரையலாம்.

A, B என இரு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்திய பின்னர், Input Bar இல்

Sequence [Polygon [A, B, n], n, 3, 10]

என்ற கட்டளை கொடுத்தால் போதும். n என்ற எண்ணை, 3 முதல் 10 வரை மாற்ற வும். அத்துடன் AB ஒரு பக்கமாக, n பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம் வரையவும் என்பதே இந்தக் கட்டளையின் பொருள்.

பலகோணங்களை ஒவ்வொன்றாக வரைய m என்ற பெயரில் ஓர் Integer Slider உருவாக்கி, வரைவதற்கு உரிய கட்டளையை இவ்வாறு மாற்றவும்.

Sequence [Polygon [A, B, n + 2], n, 1, m]

Slider ஐ நீக்கி m என்ற எண்ணை 1, 2, 3, ... என இவ்வாறு மாற்றுவதற்கு ஏற்ப, 3, 4, 5, பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரையவும் என்பதே இதன்பொருள்.

இதில் n + 2 க்குப் பதிலாக 2n என எழுதினால், எத்தகைய பலகோணங்கள் கிடைக்கும்?

2n + 1 ஆக்கினால்?

சுற்றளவிற்குப் பதிலாக பரப்பளவு எடுத்தால் கிடைக்கும் தொடர் இவ்வாறாகும்.

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

இதில், இடத்துக்கும் உறுப்புக்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பு என்ன?

ஒவ்வொரு உறுப்பும் இடத்தின் வர்க்கம் ஆகும்.

இயற்கணிதத்தில் கூறினால்?

$$x_n = n^2$$

இந்தச் சதுரங்களின் மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தையும் ஒரு தொடராக எழுதலாம். அதன் இயற்கணித வடிவம் என்ன? எழுதிப் பார்க்கவும்.

பக்கங்களின் நீளத்தை அரை சென்டிமீட்டர் வீதம் கூட்டி உருவாக்கிய தொடரைப் பார்ப்போம்.

பக்கம்	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
சுற்றளவு	4,	6,	8,	10,	...
பரப்பளவு	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
மூலைவிட்டம்	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

பக்கங்களின் நீளத்தின் இயற்கணித வடிவத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது? அதற்கு முதலில் இந்தத் தொடரை இவ்வாறு எழுதிப் பார்க்கலாம்.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$$

இதில் முழுஎண்களும் பின்ன எண்களும் உள்ளன. பின்ன எண்கள் அனைத்திற்கும் பகுதி 2 ஆகும். முழுஎண்களையும் பகுதி 2 ஆக வருமாறு பின்ன எண்களாக எழுதினாலோ?

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$$

தொகுதியின் தொடர்

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

இதன் இயற்கணித வடிவம் என்ன? எழுதிப்பார்க்கவும்.

அப்படியானால் பக்கங்களின் நீளத்தின் தொடரை இயற்கணித வடிவத்தில் எவ்வாறு எழுதலாம்?

n ஆவது சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் s_n என எழுதினால்,

$$s_n = \frac{n+1}{2}$$

இதையே

$$s_n = \frac{1}{2}(n+1)$$

எனவும் எழுதலாம்.

சுற்றளவுகளின் தொடரின் இயற்கணித வடிவமோ?

பக்கத்தின் நீளத்தை நான்கால் பெருக்கியதே சுற்றளவு. அப்படியானால், சுற்றளவுகளின் தொடரின் இயற்கணித வடிவம்,

$$p_n = 4 \times \frac{1}{2}\ (n+1) = 2\ (n+1)$$

எடுத்துக்காட்டாக, இத்தொடரின் 25 ஆவது சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம்

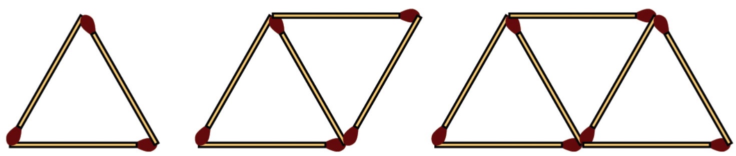
$$s_{25} = \frac{1}{2} \times (25+1) = 13$$

50 ஆவது சதுரத்தின் சுற்றளவு

$$p_{50} = 2 \times (50+1) = 102$$

இதைப்போன்று பரப்பளவுகளின் தொடரையும், மூலைவிட்டங்களின் தொடரையும் இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதிப் பார்ப்போம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:



ஒரு முக்கோணம் உருவாக்க மூன்று தீக்குச்சிகள், இரண்டு உருவாக்க ஐந்து குச்சிகள், மூன்று உருவாக்க ஏழு குச்சிகள்.

இவ்வாறு நான்கு முக்கோணங்கள் உருவாக்குவதற்கு எத்தனை குச்சிகள் வேண்டும்?

ஐந்து முக்கோணங்கள் உருவாக்கவோ?

முதல் முக்கோணம் உருவாக்குவதற்கு மூன்று குச்சிகள், தொடர்ந்துள்ள ஒவ்வொரு முக்கோணம் உருவாக்க இரண்டு குச்சிகள் வீதம் போதும். அவ்வாறு குச்சிகளின் எண்ணிக்கை

3, 5, 7, 9, 11, ...

என்ற தொடராக எழுதலாம்.

10 முக்கோணங்கள் உருவாக்க எத்தனை குச்சிகள் வேண்டும்?

முதல் முக்கோணத்திற்கு 3 குச்சிகள், மீதி 9 முக்கோணங்களுக்கு 2 வீதம், $9 \times 2 = 18$ மொத்தம் $3 + 18 = 21$

100 முக்கோணங்கள் உருவாக்க எத்தனை குச்சிகள் வேண்டும்?

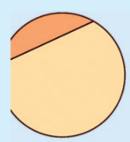
$$3 + (99 \times 2) = 201$$

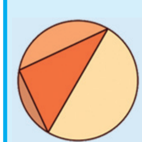
இயற்கணிதம் பயன்படுத்திக் கூறினால்?

n முக்கோணங்கள் உருவாக்குவதற்குத் தேவைப்படும் குச்சிகளின் எண்ணிக்கையை எவ்வாறு எழுதலாம்?

வட்டப்பங்கீடு

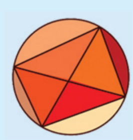
ஒரு வட்டத்தில் இரு புள்ளிகள் எடுத்து ஒரு கோட்டினால் இணைத்தால் அது வட்டத்தை இரு பாகங்கள் ஆகும்.





வட்டத்தில் மூன்று புள்ளிகள் எடுத்து இணைத்தால் நான்கு பாகங்கள் ஆகும்:

நான்கு புள்ளிகள் எடுத்து எல்லா ஜோடிகளையும் இணைத்தால்?



புள்ளிகள் ஐந்து ஆனால்?ஆறு புள்ளிகளை இணைத்தால் எத்தனை பாகங்கள் ஆகும் என எதிர்ப்பார்க்கிறீர்கள்? இது சரியா என வரைந்து பார்க்கவும்.

முதல் முக்கோணம் உருவாக்க 3 குச்சிகளும், மீதி $n-1$ முக்கோணம் உருவாக்க $2\,(n-1) = 2n-2$ குச்சிகளும்;

தேவையான மொத்தக் குச்சிகள் $3 + 2n - 2 = 2n + 1$

அதாவது, n முக்கோணம் உருவாக்குவதற்குத் தேவையான குச்சிகளின் எண்ணிக்கை

$$x_n = 2n + 1$$

இதுவே 3, 5, 7, ... என இவ்வாறு 3 உடன் 2 கூட்டித் தொடர்கின்ற தொடரின் இயற்கணித வடிவம். இதிலிருந்து, 500 முக்கோணங்கள் உருவாக்க எத்தனை குச்சிகள் தேவை என எளிதில் கணக்கிடலாம்.

$$x_{500} = (2 \times 500) + 1 = 1001$$

ஒரு தொடரின் இயற்கணித வடிவத்தைக் கண்டுபிடித்து விட்டால், அதிலுள்ள எண்களைக் கணக்கிட கணினியைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, பக்கங்களின் நீளம் 1 செ.மீ., 2 செ.மீ., 3 செ.மீ., ... என இவ்வாறு உள்ள இரும்பு சதுரக்கட்டைகளின் எடையை வரிசையாக எழுதும் தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 7.8n^3$$

இத்தகைய நூறு கட்டைகளின் எடையை வரிசையாக எழுதுவதற்கு, பைதன் மொழியில் (python 3)

```
for n in range (1,101):
    print (7.8*n**3)
```

என்று எழுதினால் போதும். இதையே `weights.py` என்ற பெயரில் ஒரு புரோகிராமாக எழுதி,

```
python3.2 weights.py > weights.txt
```

என்ற கட்டளை கொடுத்தால், இந்த எண்கள் வரிசையாக weights.txt என்றும் file இல் எழுதப்பட்டுக் கிடைக்கும்.

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் தொடர்கள் ஒவ்வொன்றின் இயற்கணித வடிவத்தை எழுதவும்.

i) ஒற்றை எண்களின் தொடர்

ii) 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வரும் எண்ணல் எண்களின் தொடர்.

iii) 1 இல் முடியும் எண்ணல் எண்களின் தொடர்

iv) 1 இல் அல்லது 6 இல் முடியும் எண்ணல் எண்களின் தொடர்

(2) சமபக்க முக்கோணம், சதுரம், ஒழுங்கு ஐங்கோணம் எனத் தொடர்ந்து வரும் வடிவியல் வடிவங்களின் உட்கோணங்களின் தொகை, வெளிக்கோணங்களின் தொகை, ஓர் உட்கோணத்தின் அளவு, ஒரு வெளிக்கோணத்தின் அளவு என்ற தொடர்களின் இயற்கணித வடிவம் எழுதவும்.

(3) இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.

முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைத்த சிறிய முக்கோணத்தை வெட்டி மாற்றியதே இரண்டாவது படம். இதிலுள்ள மூன்று சிவப்பு முக்கோணங்களிலிருந்தும் இதைப் போன்று நடுவிலுள்ள முக்கோணத்தை வெட்டி மாற்றியதே மூன்றாவது படம்.

i) ஒவ்வொரு படத்திலும் எத்தனை சிவப்பு முக்கோணங்கள் உள்ளன?

ii) முதல் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 1 என எடுத்து, ஒவ்வொரு படத்திலும் ஒரு சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

iii) ஒவ்வொரு படத்திலும் உள்ள சிவப்பு முக்கோணங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

iv) இவ்வாறு தொடர்ந்தால் கிடைக்கும் இந்த மூன்று தொடர்களின் இயற்கணித வடிவம் எழுதவும்.

கூட்டுத்தொடர்கள்

பக்கங்களின் நீளம் 1, 2, 3, 4, ... உடைய சதுரங்களின் சுற்றளவுகளைக் கணக்கிட்டபோது

4, 8, 12, 16, ...

என்ற தொடர் கிடைத்தது. இங்குப் பக்கங்களின் நீளம் 1 வீதம் கூடுவதால் சுற்றளவு 4 வீதம் கூடுகிறது. பக்கங்களின் நீளத்தை $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ என எடுத்தால்?

பக்கங்களின் நீளம் $\frac{1}{2}$ வீதம் கூடுவதால், சுற்றளவு $4 \times \frac{1}{2} = 2$ வீதம் கூடுகிறது. கிடைக்கும் தொடர்

4, 6, 8, 10, ...

மேலும் தீக்குச்சிகளால் முக்கோணம் உருவாக்கிய கணக்கைப் பார்க்கவும். முதல் முக்கோணத்திற்கு 3 குச்சிகள்; தொடர்ந்து வரும் ஒவ்வொரு முக்கோணத்திற்கும் 2 வீதம் கூடுகின்றது. அவ்வாறு 3 இல் இருந்து தொடங்கி, மீண்டும் மீண்டும் 2 கூடுகிறது.

3, 5, 7, 9, ...

என்ற தொடர் கிடைக்கிறது.

ஓர் எண்ணிலிருந்து தொடங்கி ஒரே எண்ணையே மீண்டும் மீண்டும் கூட்டிக் கிடைக்கும் தொடரின் பெயர், **கூட்டுத்தொடர் (arithmetic sequence)** எனப்படும்.

இரண்டாவது சதுரக்கணக்கில் பக்கங்களின் நீளம்

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2}, \ldots$$

என்ற தொடர் அல்லவா. இதுவும் ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும். 1 இல் இருந்து தொடங்கி, $\frac{1}{2}$ மீண்டும் மீண்டும் கூட்டப்படுகிறது.

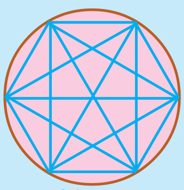
பலகோணங்களின் வெளிக்கோணங்களின் தொகையாகக் கிடைக்கும் தொடர்

$$360, 360, 360, \ldots$$

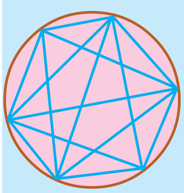
என்பது அல்லவா. இதுவும் கூட்டுத்தொடராகும். 360 இல் இருந்து தொடங்குகிறது. மீண்டும் மீண்டும் 0 கூட்டப்படுகிறது.

முடிவுகளின் தவறு

வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் பாகங்களைக் குறித்து வட்டப் பங்கீடு என்ற பகுதியில் பார்த்தோம் அல்லவா. புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 2, 3, 4, 5 என்று இவ்வாறாகும் போது பாகங் களின் எண்ணிக்கை 2, 4, 8, 16 எனக் கிடைக்கும். எண்ணிக் கையில் புள்ளிகள் 6 எனில்? 32 என ஊகிக் கலாம். வரைந்து பார்ப் போமா?



புள்ளிகள் ஒரே தூரத்தில் இருந்தால் 30 பாகம் அல்லது 31 பாகம். எதுவாயினும் 31 பாகம் வரை வரையலாம்.



பொதுவாகக் கூறினால், வட்டத்தில் உள்ள n புள்ளிகளை ஒன்றுக் கொன்று இணைத்தால் கிடைக்கும் பாகங்களின் கூடுதலான எண்ணிக்கை

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

என நிறுவ முடியும்.

இந்த இயற்கணிதச் சொற்றொடரில் 2^{n-1} என்பதற்கு $n = 1, 2, 3, 4, 5$ என்ற எண்களைப் பயன்படுத்தும் போது கிடைப்பது, 1, 2, 4, 8, 16 என்ற எண்களாகும் என்பதே வியப்பிற்கு உரியது. $n = 6$ முதல், இரு சொற்றொடர்களிலும் கிடைக்கும் எண்கள் வெவ்வேறானவை ஆகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

ஒரு நேர்கோடு வழியாக 10 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் பயணிக்கும் ஒரு பொருளின்மேல், பயணத்தின் எதிர்த்திசையில் குறிப்பிட்ட ஆற்றல் செலுத்தி, ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 2 மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் குறைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வினாடி முடியும் போது வேகம்

$$10, 8, 6, \ldots$$

என்ற தொடரில் அல்லவா.

இங்கு 10 இல் இருந்து 2 மீண்டும் மீண்டும் கழித்தே தொடரின் உறுப்புகள் கிடைக்கின்றன. இதுவும் ஒரு கூட்டுத்தொடராகவே ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது. இத்தகைய தொடர்களையும் ஏற்றுக் கொள்வதற்குக் கூட்டுத்தொடரின் விதிமுறையில் "ஒரே எண்ணைத் தொடர்ந்து கூட்டவும்" என்பதை "ஒரே எண்ணைத் தொடர்ந்து கூட்டவோ தொடர்ந்து கழிக்கவோ செய்ய வேண்டும் என மாற்ற வேண்டும்". இல்லாவிடில் "2 கழிக்கவும் என்பதை -2 கூட்டவும்" என்று கணித மொழி வாயிலாகத் தெளிவுபடுத்தலாம்.

கூட்டுத்தொடர்களை வேறொரு முறையிலும் விளக்கலாம். இத்தகைய ஒரு தொடரில், எந்த இடத்திலுள்ள உறுப்பி லிருந்தும் அதன் தொட்டு முன்னர் உள்ள உறுப்பை அடைவதற்கு ஒரே எண்ணைக் கூட்டவேண்டும். அப்படி யானால் எந்த உறுப்பிலிருந்தும் அதன் தொட்டுப் பின்னால் உள்ள உறுப்பைக் கழித்தால் கிடைப்பது இந்த எண்ணே ஆகும்.

எந்த உறுப்பிலிருந்தும் அதன் தொட்டுப் பின்னால் உள்ள உறுப்பைக் கழித்தால் ஒரே எண் கிடைக்கின்ற தொடரே கூட்டுத்தொடர்.

ஓர் உறுப்பிலிருந்து அதன் தொட்டுப் பின்னால் இருக்கும் உறுப்பைக் கழித்துக் கிடைக்கும் இந்த மாறாத வித்தியாசத்தைக் கூட்டுத்தொடரின் **பொதுவித்தியாசம் (common difference)** எனக் கூறுவர்.

பல சூழல்களில் இது கூட்டுத்தொடரா எனச் சோதித்துப் பார்ப்பதற்கு, உறுப்புகளின் வித்தியாசம் மாறாமல் இருக்கின்றதா எனப் பார்த்து உறுதிப்படுத்தினால் போதும். எடுத்துக்காட்டாக, 3 இன் மடங்குகளைப் பார்ப்போம்:

$$3, 6, 9, \dots$$

3 இன் அடுத்ததடுத்த இரு மடங்குகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசம் 3 அல்லவா. அதாவது இது பொதுவித்தியாசம் 3 ஆன ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும்.

இனி இந்த மடங்குகள் ஒவ்வொன்றுடனும் 1 ஐக் கூட்டினாலோ?

$$4, 7, 10, \dots$$

என்ற தொடர் கிடைக்கும்.

இதுவும் 3 பொதுவித்தியாசம் ஆன கூட்டுத்தொடரே..

மேலும் 3 இன் அடுக்குகளின் தொடரைப் பார்ப்போம்:

$$3, 9, 27, \dots$$

$9 - 3 = 6$ உம் $27 - 9 = 18$ உம்; அதாவது, அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரே எண் அல்ல.

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் அல்ல.

மேலும் இதுவரை பார்த்த தொடர்கள் அனைத்தையும் மீண்டும் ஒரு முறை பார்ப்போம். அவற்றிலிருந்து கூட்டுத்தொடர்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(1) கீழ்க்காணும் தொடர்கள் ஒவ்வொன்றும் கூட்டுத்தொடரா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும். காரணம் எழுத வேண்டும். கூட்டுத்தொடர் எனில், பொதுவித்தியாசம் எழுதவும்.

i) ஒற்றை எண்களின் தொடர்

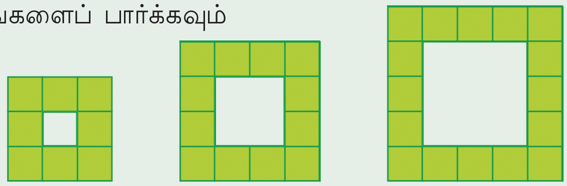
ii) இரட்டை எண்களின் தொடர்

iii) ஒற்றை எண்களின் பாதியான பின்ன எண்களின் தொடர்

iv) 2 இன் அடுக்குகளின் தொடர்

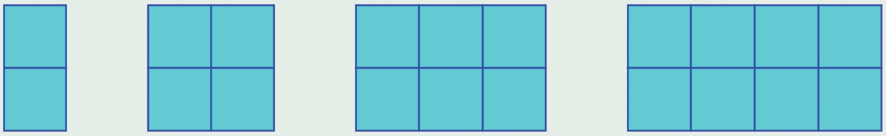
v) எண்ணல் எண்களின் தலைகீழிகளின் தொடர்

(2) இப்படங்களைப் பார்க்கவும்



இவ்வாறு தொடர்ந்தால் கிடைக்கின்ற படங்களில் வர்ணம் தீட்டப்பட்ட சிறிய சதுரங்களின் எண்ணிக்கை கூட்டுத்தொடர் ஆகுமா? எதனால்?

(3) கீழ்க்காணும் படங்களைப் பார்க்கவும்.



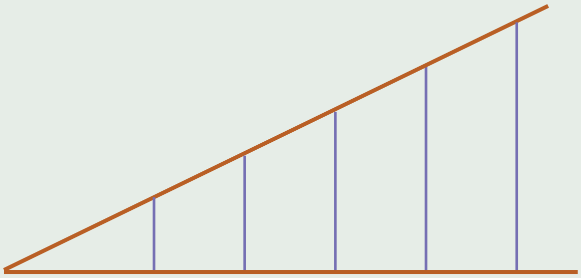
i) ஒவ்வொரு செவ்வகத்திலும் எத்தனை சிறிய சதுரங்கள் உள்ளன?

ii) பெரிய சதுரங்கள் எத்தனை?

iii) மொத்தம் எத்தனை சதுரங்கள்?

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் கிடைக்கும் ஒவ்வொரு தொடரும் கூட்டுத் தொடராகுமா?

(4) படத்தில் கீழே உள்ள கோட்டிற்கு ஒரே இடை வெளியில் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையப் பட்டுள்ளன.



இவ்வாறு தொடரும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளம் கூட்டுத்தொடர் என நிறுவுக.

(5) ஒரு தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$$

இது கூட்டுத்தொடர் ஆகுமா?

இடமும் உறுப்பும்

1, 11 எனும் எண்கள் முதல் உறுப்பும் இரண்டாம் உறுப்பும் ஆன ஒரு கூட்டுத்தொடரை உருவாக்கலாமா?

எளிதாக உள்ளது அல்லவா? 1 இல் இருந்து 11 இல் சென்று சேர 10 ஐக் கூட்ட வேண்டும். தொடர்ந்து 10 ஐ மட்டும் கூட்டினால் கூட்டுத்தொடராகும்.

1, 11, 21, 31, ...

அப்படியானால் வேறொரு வினா : 1, 11 என்பன முறையே முதல் உறுப்பும், மூன்றாவது உறுப்பும் எனில் ஒரு கூட்டுத்தொடரை உருவாக்கலாமா?

இத்தகைய ஒரு கூட்டுத்தொடரின் பொதுவித்தியாசத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது?

1 உடன் பொதுவித்தியாசத்தைக் கூட்டுவதே இரண்டாவது எண்; அது நமக்குத் தெரியாது. மீண்டும் ஒரு முறை பொதுவித்தியாசத்தைக் கூட்டினால் மூன்றாவது எண்ணான 11 கிடைக்க வேண்டும்.

அதாவது, 1 உடன் பொதுவித்தியாசத்தின் இரு மடங்கைக் கூட்டும்போது 11 கிடைக்கிறது.

அப்படியானால் பொதுவித்தியாசத்தின் இரு மடங்கு 10; பொதுவித்தியாசம் 5

இனி தொடரை எழுதலாம் அல்லவா.

1, 6, 11, 16, 21, ...

3 ஆவது உறுப்பு 37 உம், 7 ஆவது உறுப்பு 73 உம் உடைய கூட்டுத்தொடர் எனில்?

3 ஆவது உறுப்பிலிருந்து 7 ஆவது உறுப்புக்குச் செல்ல பொதுவித்தியாசம் $7 - 3 = 4$ முறை கூட்ட வேண்டும். கூட்டிய எண் $73 - 37 = 36$

அப்படியானால் பொதுவித்தியாசத்தின் 4 மடங்கு, 36; பொதுவித்தியாசம் $36 \div 4 = 9$

முதல் உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

3ஆவது உறுப்பிலிருந்து இரண்டு முறை பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது $37 - (2 \times 9) = 19$

தொடரும் மீதியும்

இரட்டை எண்களான 2, 4, 6, ... ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும். ஒற்றை எண்களான 1, 3, 5, ... உம் கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இரு தொடர்களின் பொதுவித்தியாசம் 2 தான்.

2 ஆல் முழுவதையும் வகுக்க முடிகின்ற. (மீதி 0 ஆகும்) எண்ணல் எண்கள் அல்லவா இரட்டை எண்கள்; மீதி 1 வருபவை ஒற்றை எண்களும்.

இதைப் போன்று 3 ஆல் எண்ணல் எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 0, 1, 2 என வரும் மூன்று கூட்டுத்தொடர்களைப் உருவாக்கலாம். இவை அனைத்திற்கும் பொதுவித்தியாசம் என்ன?

வகுப்பது 4 ஆனால்?

இனி திருப்பிச் சிந்திப்போம். உறுப்புகள் அனைத்தும் எண்ணல் எண்களாக உள்ள ஒரு தொடரை எடுத்தால், எந்த இரு உறுப்புகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசம் பொதுவித்தியாசத்தின் மடங்கு ஆகும். ஆகவே, இந்த உறுப்பு களைப் பொதுவித்தியாசத்தால் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதிகள் சமம் ஆகும். (எதனால்?)

இனி தொடரை முதல் உறுப்பிலிருந்து எழுதலாம் அல்லவா:

19, 28, 37, ...

இத்தொடரின் 25 ஆவது உறுப்பை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

பல வழிமுறைகள் உள்ளன.

3 ஆவது உறுப்புடன் பொதுவித்தியாசத்தின் $(25 - 3) = 22$ மடங்கு கூட்டலாம்:

$$37 + (22 \times 9) = 235$$

2 ஆவது உறுப்புடன் பொதுவித்தியாசத்தின் $(25 - 2) = 23$ மடங்கு கூட்டலாம்:

$$28 + (23 \times 9) = 235$$

1 ஆவது உறுப்புடன் பொதுவித்தியாசத்தின் $(25 - 1) = 24$ மடங்கு கூட்டலாம்:

$$19 + (24 \times 9) = 235$$

சுருங்கக்கூறின், ஒரு கூட்டுத்தொடரிலுள்ள இரு உறுப்புகளும் அவற்றின் இடமும் தெரிந்தால் தொடர் முழுவதையும் கணக்கிடலாம். அதற்குப் பயன் படுத்தும் கோட்பாடு என்ன?

ஒரு கூட்டுத்தொடரில் இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசம், அவற்றின் இடங்களின் வித்தியாசம், பொதுவித்தியாசம் என்பனவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்:

எந்த ஒரு கூட்டுத்தொடரிலும், உறுப்புகளின் வித்தியாசம் இட வித்தியாசத்திற்கு விகித சமமாகும். இந்த விகிதசம மாறிலி பொதுவித்தியாசமாகும்.

ஓர் எண் ஒரு கூட்டுத்தொடரிலுள்ள உறுப்பா எனச் சோதித்துப் பார்ப்பதற்கு இந்தக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, முன்னர் எழுதிய ஒரு தொடரைப் பார்ப்போம்;

$$19, \ 28, \ 37, \ldots$$

இதில் எந்த இரு உறுப்புகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசமும், பொதுவித்தியாசமான 9 இன் மடங்கு அல்லவா. மாறாக ஏதேனும் ஓர் எண்ணுக்கும் தொடரிலுள்ள ஓர் உறுப்புக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் 9 இன் மடங்கு எனிலோ?

எடுத்துக்காட்டாக, 1000 என்ற எண்ணுக்கும் இத்தொடரின் முதல் உறுப்பான 19 க்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் $1000 - 19 = 981 = 109 \times 9$. இது 9 இன் மடங்கு ஆகும். அப்போது முதல் உறுப்பான 19 உடன் பொதுவித்தியாசத்தின் 109 மடங்கைக் கூட்டும்போது 1000 கிடைக்கிறது. ஆகவே 1000 இத்தொடரின் 110 ஆவது உறுப்பாகும்.

தொடர் விதி

3, 5, 7, ... என்ற தொடரில் அடுத்த உறுப்பு எது?

இங்குக் கூட்டுத்தொடர் என கூறப்படவில்லை. அப்போது அடுத்த உறுப்பு 9ஆக இருக்க வேண்டும் என்றில்லை. எடுத்துக்காட்டாக எதிர்பார்த்தது ஒற்றை எண்களான பகா எண்களின் தொடர் எனில் அடுத்த உறுப்பு 11 ஆகும்.

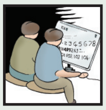
இது தரும் அறிவுரை என்ன? பல எண்களை வரிசையாக எழுதியதிலிருந்து, தொடரின் தொடர்ந்துள்ள உறுப்புகளைச் சரியாகக் கூறுவதற்கு இயலாது. தொடர் உருவாக்கப் பயன்படுத்திய விதிமுறை அல்லது தொடர் உருவாகும் சூழலைத் தெளிவாகக் கூறினால்தான் தொடர்ந்துள்ள உறுப்புகள் எவையெனக் கூறுவதற்கு இயலும்.

இந்தத் தொடர்களைப் பார்க்கவும்:

$$x_n = 2n - 1$$
$$x_n = n^2 - n + 1$$
$$x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1$$

அனைத்திலும் முதல் இரு உறுப்புகள் 1, 3 மட்டும்தானே?

10 இன் எந்த அடுக்காவது 19, 28, 37, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் உறுப்பு ஆகுமா?



(1) கீழே கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரிலும் சில எண்கள் எழுதப்படவில்லை. அவற்றின் இடம் ◯ என அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இந்த எண்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

i) 24, 42, ◯, ◯, ... ii) ◯, 24, 42 , ◯, ...

iii) ◯, ◯, 24, 42, ... iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

v) ◯, 24, ◯, 42, ... vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

(2) சில கூட்டுத்தொடர்களில் குறிப்பிட்ட இரு இடங்களில் உள்ள உறுப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை எழுதவும்.

i) 3 ஆவது உறுப்பு 34
6 ஆவது உறுப்பு 67

ii) 3 ஆவது உறுப்பு 43
6 ஆவது உறுப்பு 76

iii) 3 ஆவது உறுப்பு 2
5 ஆவது உறுப்பு 3

iv) 4 ஆவது உறுப்பு 2
7 ஆவது உறுப்பு 3

v) 2 ஆவது உறுப்பு 5
5 ஆவது உறுப்பு 2

(3) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 5 ஆவது உறுப்பு 38, 9 ஆவது உறுப்பு 66; 25 ஆவது உறுப்பு காண்க?

(4) 13, 24, 35 என இவ்வாறு தொடரும் கூட்டுத்தொடரில் 101 ஓர் உறுப்பு ஆகுமா? 1001 எனில்?

(5) 7 ஆல் வகுக்கும் போது மீதியாக 3 கிடைக்கும் மூன்றிலக்க எண்கள் எத்தனை?

(6) கீழ்க்காணும் சதுரத்தில், ஒவ்வொரு நிரையிலும் நிரலிலும் கூட்டுத்தொடர் ஆகும் விதத்தில் எழுதப்படாத கட்டங்களில் எண்களை எழுதவும்.

1			4
7			28

1, 4, 28, 7 என்ற எண்களுக்குப் பதிலாக வேறு ஏதேனும் நான்கு எண்களை எழுதினால்?

(7) அட்டவணையில் சில கூட்டுத்தொடர்களும், தொடர்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் நேராக இரு எண்களும் எழுதப்பட்டுள்ளன. எண்கள் ஒவ்வொன்றும் அந்தந்த தொடரில் உள்ளதா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

தொடர்	எண்	ஆம்/இல்லை
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \dots$	3	
	4	

கூட்டுத்தொடர்களின் இயற்கணிதம்

எண்ணல் எண்களின் தொடரே மிகவும் எளிதான கூட்டுத்தொடர் ஆகும். இதன் பல்வேறு சிறப்புத்தன்மைகளையும் ஏழு, எட்டாம் வகுப்புகளில் பார்த்தோம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$$
$$2 + 3 + 4 = 9 = 3 \times 3$$
$$3 + 4 + 5 = 12 = 3 \times 4$$

தொடர்ச்சியான எந்த மூன்று எண்ணல் எண்களாயினும் அவற்றின் தொகை, நடுவில் உள்ள எண்ணின் மூன்று மடங்காவது எதனால்?

இதனைப் புரிந்து கொள்ள, தொடர்ச்சியான மூன்று எண்ணல் எண்களின் நடுவில் உள்ள எண்ணை x என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால் முதல் எண் $x - 1$; மூன்றாவது எண் $x + 1$. இவற்றின் தொகை

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$$

இது நடுவில் உள்ள எண்ணின் மூன்று மடங்கு அல்லவா.

இது தொடர்ச்சியான ஒற்றை எண்களுக்குச் சரியாகுமா?

இரட்டை எண்களுக்கோ?

இனி ஏதேனும் ஒரு கூட்டுத்தொடரின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளை எடுத்தாலோ?

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கூட்டுத்தொடரைப் பார்க்கவும்:

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

இதில் உள்ள தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளே 37, 42, 47.

இவற்றின் தொகை

$$37 + 42 + 47 = 126$$

இது 42 இன் மூன்று மடங்கு அல்லவா?

எல்லாக் கூட்டுத்தொடர்களிலும் இது சரியாகுமா?

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திப் பார்ப்போம்:

ஏதேனும் ஒரு கூட்டுத்தொடரின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளில் நடுவில் உள்ள உறுப்பு x என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இரு பக்கமும் உள்ள உறுப்புகளை எழுதுவதற்குப் பொதுவித்தியாசம் அறிந்திருக்க வேண்டும்.

பொதுவித்தியாசம் y என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால் முதல் எண் $x - y$; மூன்றாவது எண் $x + y$; மூன்று எண்களின் தொகை

$$(x - y) + x + (x + y) = 3x$$

அதாவது இது எல்லாக் கூட்டுத்தொடர்களிலும் உள்ள ஒரு சிறப்புத் தன்மை ஆகும்:

> எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் தொகை, நடுவில் உள்ள உறுப்பின் மூன்று மடங்கு ஆகும்.

இதிலிருந்து வேறொன்றையும் காணலாம். முதல் உறுப்பையும், நடுவில் உள்ள உறுப்பையும், மூன்றாவது உறுப்பையும் கூட்டியபோது நடுவில் உள்ள உறுப்பின் மூன்று மடங்கு ஆயிற்று. அப்படியானால் முதல் உறுப்பையும், கடைசி உறுப்பையும் மட்டும் கூட்டினால் நடுவில் உள்ள உறுப்பின் இரு மடங்கு ஆக வேண்டாமா? (ஓர் எண்ணும் அதன் இரு மடங்கும் சேர்ந்தது அல்லவா மூன்று மடங்கு)

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்:

> எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளை எடுத்தால், முதல் உறுப்பு, கடைசி உறுப்பு என்பனவற்றின் தொகையின் பாதியே நடுவில் உள்ள உறுப்பு.

இவற்றை இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம்.

> x, y, z என்பன ஒரு கூட்டுத்தொடரின் தொடர்ச்சியான உறுப்புகள் எனில்,
>
> - $x + y + z = 3y$
> - $y = \frac{1}{2}\,(x + z)$

கூட்டுத்தொடரின் தொடர்ச்சியான ஐந்து உறுப்புகளை எடுத்தால், அவற்றின் தொகைக்கும், நடுவில் உள்ள உறுப்புக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? ஏழு உறுப்புகள் ஆனால்? இவற்றிலிருந்து கிடைக்கும் பொது முடிவு என்ன?

மேலும் சில கூட்டுத்தொடர்களின் இயற்கணித வடிவம் பார்ப்போம். முதலில்

$$19, 28, 37, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடரைப் பார்ப்போம். இதில் எந்த இடத்தில் உள்ள உறுப்பைக் கணக்கிடுவதற்கும், ஒன்றாம் இடத்துடன் உள்ள இட வித்தியாசத்தைப் பொதுவித்தியாசமான 9 ஆல் பெருக்கி, ஒன்றாம் உறுப்பான 19 உடன் கூட்ட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, இதன் 15 ஆவது உறுப்பிற்கு ஒன்றாம் இடத்துடன் உள்ள இடவித்தியாசம் $15 - 1 = 14$; எனவே 15 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிட முதல் உறுப்பான 19 உடன் பொதுவித்தியாசமான 9 இன் 14 மடங்கைக் கூட்டினால் போதும்.

$$15 \text{ ஆவது உறுப்பு } \ 19 + (14 \times 9) = 145$$

இருபதாம் உறுப்போ?

பொதுவாகக் கூறினால், எந்த எண்ணல் எண்ணை n என எடுத்தாலும், n ஆவது உறுப்பு

$$19 + (n - 1) \times 9 = 9n + 10$$

அதாவது, இத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 9n + 10$$

மேலும்

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடர் ஆனால்?

முதல் கணக்கைப் போன்று சிந்தித்தால், n ஆவது உறுப்பு

$$\frac{1}{2} + (n - 1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

அதாவது, தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = \frac{1}{4}\ (n + 1)$$

முதலாவது தொடரில், இட எண்ணான n ஐ, 9 ஆல் பெருக்கி, 10 கூட்டப்படுகிறது.

இரண்டாவது தொடரில், $\frac{1}{4}$ ஆல் பெருக்கி, $\frac{1}{4}$ கூட்டப்படுகிறது.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரும் இந்த வடிவத்தில் ஆகுமா?

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு f எனவும், பொதுவித்தியாசம் d எனவும் எடுத்தால், அதன் n ஆவது உறுப்பு

$$f + (n - 1)\, d = dn + (f - d)$$

அதாவது, n ஐ, d என்ற எண்ணால் பெருக்கி, $f - d$ என்ற எண்ணைக் கூட்டவும்.

அப்போது எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள உறுப்பு, இடஎண்ணைப் பொதுவித்தியாசத்தால் பெருக்கி, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் கூட்டியது ஆகும். அதாவது, எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = an + b$$

மாறாக, $x_n = an + b$ எனும் எந்தத் தொடரும் கூட்டுத்தொடர் ஆகுமா?

இதில் தொடர்ச்சியான எந்த இரு உறுப்புகளும் $an + b, a(n + 1) + b$ என்பன அல்லவா; இவற்றின் வித்தியாசம்

$$a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

அதாவது தொடர்ச்சியான எந்த இரு உறுப்புகளிலும் வித்தியாசம் a ஆகும். ஆகவே இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் ஆகும்.

எந்த ஒரு கூட்டுத்தொடருக்கும் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = an + b$$

என்பதே. இதில் a, b என்பன குறிப்பிட்ட எண்கள் ஆகும். மாறாக இந்த வடிவத்திலுள்ள எந்த ஒரு தொடரும் கூட்டுத்தொடர் ஆகும்.

$x_n = an + b$ எனும் கூட்டுத்தொடரில், பொதுவித்தியாசம் a எனவும் காணலாம்.

இதைப் பயன்படுத்தி, ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவத்தை எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2}$ இல் இருந்து தொடங்கி, தொடர்ச்சியாக $\frac{1}{3}$ ஐக் கூட்டிக் கிடைக்கும் கூட்டுத்தொடரைப் பார்ப்போம்:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{3}$ ஆனதால், இதன் இயற்கணித வடிவம்

ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தி

Sequence [Circle [A, n], n, 1, 10]

என்ற கட்டளை கொடுத்தால், A மையப் புள்ளியும், ஆரம் 1 முதல் 10 வரை உள்ள எண்ணல் எண்களும் உள்ள வட்டங்கள் கிடைக்கும். வட்டங்களை ஒவ்வொன்றாக வரையவும். வட்டங்களின் எண்ணிக்கையை மாற்றவும், m என்ற ஒரு integer slider ஐ உருவாக்கி, கட்டளையை மாற்றினால் போதும்:

Sequence [Circle [A , n], n, 1, m]

மேலும் இதில் n க்குப் பதிலாக 2n என்றோ 2n + 1 என்றோ மாற்றி ஆரங்களை இரட்டை எண்களாகவோ, ஒற்றை எண்களாகவோ மாற்றலாம்.

Min = 0 உடைய a, b என்ற இரு Slider ஐ உருவாக்கி, கட்டளை

Sequence [Circle [A , an + b], n, 1, m]

எனக் கொடுத்தால், a, b மாற்றி ஆரங்கள் பலவற்றைக் கூட்டுத்தொடராக்கலாம்.

ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் வரைந்து, அதன் அனைத்து உச்சிகளிலும் இத்தகைய வட்டத் தொடர்களை வரைந்து பார்க்கவும்.

$\frac{1}{3}n + b$ என்பதாகும். இதில் $n = 1$ என எடுத்தால், முதல் உறுப்பு $\frac{1}{3} + b$ அப்படியானால்,

$$\frac{1}{3} + b = \frac{1}{2}$$

என்றும் அதிலிருந்து

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

என்றும் காணலாம். தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

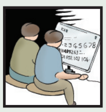
எனக் கிடைக்கும்.

இத்தொடரின் இயற்கணித வடிவத்தைப் பின்ன எண்ணாக இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x_n = \frac{2n+1}{6}$$

இதிலிருந்து வேறு சிலவற்றைப் புரிந்து கொள்ளலாம். இவ்வாறு கிடைக்கும் பின்ன எண்களின் தொகுதி ஒற்றை எண்ணாகவும் பகுதி 6 உம் ஆகும். எந்த ஒற்றை எண்ணுக்கும் 2 காரணி அல்ல; ஆகவே 6 உம் காரணி அல்ல. எனவே தொடரிலுள்ள எந்த ஓர் உறுப்பும் எண்ணல் எண் அல்ல.

வேறொரு முறையில் கூறினால், இந்தத் தொடரில் எண்ணல் எண்கள் ஒன்றுமில்லை.



(1) முதல் 5 உறுப்புகளின் தொகை 30 என வருமாறு மூன்று கூட்டுத்தொடர்கள் எழுதவும்.

(2) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் உறுப்பு 1 உம், முதல் 4 உறுப்புகளின் தொகை 100 உம் ஆகும். தொடரின் முதல் நான்கு உறுப்புகள் காணவும்.

(3) ஒரு கூட்டுத்தொடரில் தொடர்ச்சியான எந்த நான்கு உறுப்புகளை எடுத்தாலும், முதலாவதும் இறுதியிலும் உள்ள உறுப்புகளின் தொகை, நடுவில் உள்ள இரு உறுப்புகளின் தொகைக்குச் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(4) முதல் 4 உறுப்புகளின் தொகை 100 என வருகின்ற நான்கு கூட்டுத்தொடர்களை எழுதவும்.

(5) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 8 ஆவது உறுப்பு 12 உம், 12 ஆவது உறுப்பு 8 உம் ஆகும். இத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம் என்ன?

(6) எட்டாம் வகுப்பில் உள்ள பறவைக் கணக்கைச் (**சமன்பாடுகள்** என்ற பாடம்) சிறிது மாற்றி இவ்வாறு அமைக்கலாம்.

பறவை சொல்கிறது.

"நாங்களும், எங்கள் அளவும், எங்களில் பாதியும், அதில் பாதியும் ஒன்றும் சேர்ந்தால் ஓர் எண்ணல் எண்ணாகும்"

பறவைகளின் எண்ணிக்கையாக வருகின்ற எண்களை ஏறுவரிசையில் எழுதவும். எண்ணிக்கையில் இதன் ஒவ்வொரு எண்ணை எழுதும் போதும் பறவை சொன்ன தொகையையும் வரிசையாக எழுதவும்.

இந்த இரு தொடர்களின் இயற்கணித வடிவத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(7) முதல் உறுப்பு $\frac{1}{3}$ உம்; பொதுவித்தியாசம் $\frac{1}{6}$ உம் உள்ள கூட்டுத்தொடரில் அனைத்து எண்ணல் எண்களும் உள்ளன எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(8) முதல் உறுப்பு $\frac{1}{3}$ உம், பொதுவித்தியாசம் $\frac{2}{3}$ உம் உள்ள கூட்டுத்தொடரில் எல்லா ஒற்றை எண்களும் உள்ளன எனவும், இரட்டை எண் ஒன்றுகூட இல்லை எனவும் தெளிவுபடுத்தவும்.

(9) 4, 7, 10, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் எல்லா உறுப்புகளின் வர்க்கங்களும் இத்தொடரிலேயே உள்ளன என நிறுவுக.

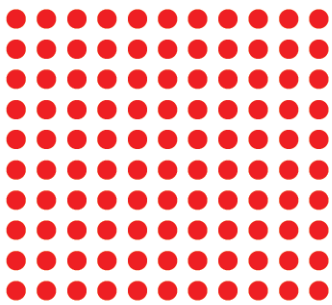
(10) 5, 8, 11, ... என்ற கூட்டுத்தொடரில் முழுவர்க்கங்கள் ஒன்றும் இல்லை எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(11) ஓர் ஐங்கோணத்தின் கோணங்கள் கூட்டுத்தொடரில் ஆகும். அதில் மிகச்சிறிய கோணத்தின் அளவு 36° ஐவிடக் கூடுதலாகும் என நிறுவுக.

(12) $\frac{11}{8}, \frac{14}{8}, \frac{17}{8}, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடரில் உள்ள முழுஎண் உறுப்புகளின் தொடர் எழுதுக. இது கூட்டுத்தொடர் ஆகுமா?

தொகைகள்

இப்படத்தைப் பார்க்கவும்.



படத்தில் மொத்தம் எத்தனை பொட்டுகள் உள்ளன?

ஒவ்வொன்றாக எண்ண வேண்டிய தேவை யில்லை. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 11, அவ்வாறு 10 வரிசைகள்; மொத்தம் $10 \times 11 = 110$

இந்த முக்கோணத்தில் எத்தனை பொட்டு கள் உள்ளன?

ஒவ்வொரு வரிசையாக எண்ணி எடுக்கலாம்:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

இதற்கும் எளிய வழிமுறை ஏதேனும் உள்ளதா?

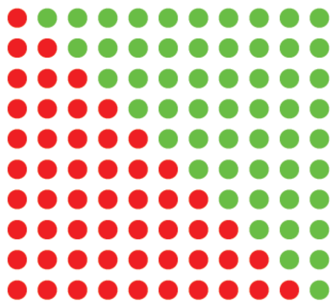
இதைச் செவ்வகமாக உருவாக்கினால்?

விதிமுறைகளின் மொழி

ஒரு தொடரின் உறுப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமெனில், தொடரின் விதிமுறை தெளிவாக இருக்க வேண்டும் எனப் பார்த்தோம். இந்த விதிமுறையை இயற்கணிதத்தில் குறிப்பிடுவதற்கு உரிய எடுத்துக்காட்டு களையும் பார்த்தோம். ஆனால் சில தொடர்களின் விதிமுறைகளை இயற்கணித வடிவில் எழுத இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... எனத் தொடர்கின்ற பகா எண்களின் தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள உறுப்பைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு உரிய இயற்கணிதச் சொற்றொடர் இதுவரை கண்டுபிடிக்கப்படவில்லை. அதைப்போன்று, π இன் தசம வடிவத்தில் வருகின்ற 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... என்ற தொடரிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலுள்ள உறுப்பைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு உரிய இயற்கணிதச் சொற்றொடர் எதுவுமில்லை. இத்தகைய சூழல்களில் தொடரின் விதிமுறையை எளிய மொழியில் கூறுவதற்கே வழி உள்ளது.

அதற்கு இதைப்போன்று வேறொரு முக்கோணம் உருவாக்கலாம்.

இதைத் தலைகீழாக, முதல் முக்கோணத்துடன் இவ்வாறு சேர்த்து வைக்கவும்.



இந்தச் செவ்வகத்தில் முன்னர் பார்த்ததைப் போன்று, $10 \times 11 = 110$ பொட்டுகள் உள்ளன.

ஒரு முக்கோணத்தில்? 110 இன் பாதி 55

படத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்ததை எண்களை மட்டும் பயன்படுத்தியும் எழுதலாம்.

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

என எடுக்கலாம். தொகையைத் திருப்பி எழுதினால்

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ஒரே இடத்திலுள்ள எண்களைக் கூட்டினால்?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

எனில்

$$s = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

இதைப் போன்று 1 முதல் 100 வரையுள்ள எண்ணல் எண்களையும் கூட்டலாம் அல்லவா.

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ஒரு கணிதக் கதை

கௌஸ் என்ற கணித மேதையைக் குறித்துக் கேட்டிருக்கிறோம் அல்லவா. சிறுவனாக இருக்கும்போதே கணிதத்தில் அசாதாரண திறன் வெளிப்படுத்தியவர். அதனைக் குறித்து ஒரு கதை உள்ளது. கௌஸின் பத்தாம் வயதில், வகுப்பு ஆசிரியர் மாணவர்களைக் கட்டுப்படுத்துவதற்கு 1 முதல் 100 வரையுள்ள எண்களையெல்லாம் கூட்டித்தொகையைக் கண்டுபிடிக்குமாறு கூறினார். சிறுவனான கௌஸ் மிக வேகமாக விடையைக் கூறினார்: 5050. இவ்வாறு விளக்கவும் செய்தார்.

1 உம் 100 உம் 101;
அதுபோன்று 2 உம் 99 உம் 101;
இவ்வாறு 50 ஜோடிகள்.
மொத்தத் தொகை
$50 \times 101 = 5050$

ஒரே இடத்திலுள்ள எண்களைக் கூட்டினால்

$$2s = \overbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101}^{100 \text{ எண்ணிக்கை}}$$
$$= 100 \times 101$$

இதிலிருந்து

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 க்குப் பதிலாக எந்த எண்ணல் எண்ணாயினும், இதே முறையில் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அதாவது,

ஒன்று முதல் தொடர்ச்சியான சில எண்ணல் எண்களின் தொகை, கடைசி எண்ணுக்கும் அதன் அடுத்த எண்ணுக்கும் உரிய பெருக்கற் பலனின் பாதி ஆகும்.

இயற்கணித மொழியில் கூறினால்,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

இதைப் பயன்படுத்தி, பிற கூட்டுத்தொடர்களில் உள்ள உறுப்புகளின் தொகையையும் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 2, 4, 6, ..., 100 என்ற இரட்டை எண்களின் தொகையைப் பார்ப்போம். எண்ணல் எண்களை 2 ஆல் பெருக்கிக் கிடைப்பன இரட்டை எண்கள். அப்போது,

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

என எழுதலாம். இதில்

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. இதிலிருந்து

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால், முதல் n இரட்டை எண்கள்

$$2, 4, 6, \;\dots,\; 2n$$

இவற்றின் தொகை

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n\,(n+1)$$

இதைப்போன்று முதல் n 3 இன் மடங்குகளின் தொகையைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

முதல் n ஒற்றை எண்களின் தொகையை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

முதலில் ஒற்றை எண்களின் தொடரை இயற்கணித வடிவில் எழுதலாம்.

$$x_n = 2n - 1$$

இதில் $n = 1, 2, 3, \ldots$ என வரிசையாக எடுத்தால், ஒற்றை எண்களின் தொடர் கிடைக்கும். அப்போது இந்தத் தொடரை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$x_1 = (2 \times 1) - 1$$
$$x_2 = (2 \times 2) - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = (2 \times n) - 1$$

இவற்றையெல்லாம் மேலிருந்து கீழாகக் கூட்டினால்?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ எண்ணிக்கை}} \\ &= 2\,(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

இதில்

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

என்பதைப் பயன்படுத்தினால்,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \times \frac{1}{2}\, n\,(n+1) - n = n^2$$

எனக் காணலாம்.

அதாவது, 1 முதல் தொடர்ச்சியான ஒற்றை எண்களின் தொகை, எண்களின் எண்ணிக்கையின் வர்க்கம் ஆகும்.

இது ஏழாம் வகுப்பில், **வர்க்கமும் வர்க்கமூலமும்** என்ற பாடத்தில் **முழுவர்க்கங்கள்** என்ற பகுதியில் பார்த்தோம் அல்லவா. இப்போது இது கணித முறையில் தெளிவாயிற்று.

இதைப் போன்று எந்தக் கூட்டுத்தொடரின் தொகையையும் கணக்கிடலாம்.

எந்தக் கூட்டுத்தொடரும்

$$x_n = an + b$$

என்ற வடிவத்தில் அல்லவா. இதன் முதல் n உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட, $n = 1, 2, 3, \ldots$ என எழுதிக் கூட்டலாம்.

$$x_1 = a + b$$
$$x_2 = 2a + b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = na + b$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \ldots + b)}^{n \text{ எண்ணிக்கை}}$$
$$= a\,(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$
$$= a\,\frac{n\,(n+1)}{2} + nb$$
$$= \frac{1}{2}\,an\,(n+1) + nb$$

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$\boldsymbol{x_n = an + b}$$

எனில், அதன் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}\,an\,(n+1) + nb}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$1, 4, 7, \ldots$$

என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகையைக் கண்டுபிடிப்பதைப் பார்ப்போம். இத் தொடரின் இயற்கணித வடிவம்

$$x_n = 3n - 2$$

எனில் 100 உறுப்புகளின் தொகை

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 100 \times 101 + \left(100 \times (-2)\right) = 14950$$

பொதுவாகக் கூறினால், இத்தொடரில் உள்ள முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$\frac{1}{2} \times 3 \times n\,(n+1) - 2n = \frac{1}{2}\,(3n^2 - n)$$

கூட்டுத்தொடரின் தொகையை வேறொரு முறையிலும் கணக்கிடலாம். அதற்குத் தொகையின் இயற்கணித வடிவத்தைச் சிறிது மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2}\,an\,(n+1) + nb = \frac{1}{2}\,n\,\left(a\,(n+1) + 2b\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,n\,\left((an + b) + (a + b)\right)$$

இதில் $an + b$ என்பது தொடரின் n ஆவது உறுப்பான x_n உம், $a + b$ என்பது தொடரின் 1ஆவது உறுப்பான x_1 உம் அல்லவா. அப்படியானால்

வர்க்கங்களின் தொகை

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ என்ற முற்றொருமையைப் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. இதைப்போன்று

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

என்பதும் ஒரு முற்றொருமை ஆகும்.

இதிலிருந்து, x எந்த எண்ணாயினும்

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

எனக் காணலாம். இதில் $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ என எடுத்துக் கூட்டினால்,

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

எனக் கிடைக்கும். அதாவது,

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{3}{2}\,n(n+1) + n$$

அப்போது,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}\,n(n+1) - n\right)$$

இச்சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்தைச் சுருக்கினால்,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$$

எனக் கிடைக்கும்.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் கூட்டுத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}n\,(x_n + x_1)$$

எளிய நடையில் கூறினால்,

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளின் தொகை, முதல், கடைசி உறுப்புகளின் தொகையை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையால் பெருக்கியதில் பாதி ஆகும்.

இவற்றிற்கு ஏற்ப 1, 4, 7, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகையைக் கணக்கிட, முதலில் 100 ஆவது உறுப்பைக் கணக்கிடவும்.

$$1 + (99 \times 3) = 298$$

மேலும், முதல் 100 உறுப்புகளின் தொகை

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (298 + 1) = 14950$$

எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் முதல் n உறுப்புகளின் தொகைக்கு ஓர் இயற்கணித வடிவம் உள்ளது. இதைக் காண்பதற்குத் தொகையை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\frac{1}{2}an\,(n + 1) + nb = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

இதில் $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a + b$ என்பன தொடருடன் தொடர்புள்ள குறிப்பிட்ட எண்கள் அல்லவா. அப்போது, தொகை n^2 ஐயும் n ஐயும் குறிப்பிட்ட எண்களால் பெருக்கிக் கூட்டியது ஆகும்.

அதாவது, எந்தக் கூட்டுத்தொடரிலும் தொகையின் இயற்கணித வடிவம் $pn^2 + qn$ என்பதாகும்.

ஒரு தொடரின் இயற்கணித வடிவம் தெரியுமெனில், அதில் தொடர்ச்சியான சில உறுப்புகளின் தொகையைக் காண்பதற்கு பைதன் மொழியில் sum பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக முதல் நூறு முழுவர்க்கங்களின் தொகையைக் கணக்கிட

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

என எழுதினால் போதும்.

(1) கீழே உள்ள ஒவ்வொரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 25 உறுப்புகளின் தொகையைக் காண்க.

i) 11, 22, 33, ... ii) 12, 23, 34, ... iii) 21, 32, 43, ...

iv) 19, 28, 37, ... v) 1, 6, 11, ...

(2) 6, 10, 14, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் தொகைக்கும் அடுத்த 20 உறுப்புகளின் தொகைக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் எவ்வளவு?

(3) 6, 10, 14, ..., என்ற கூட்டுத்தொடரிலும், 15, 19, 23, ... என்ற கூட்டுத்தொடரிலும் உள்ள முதல் 20 உறுப்புகளின் தொகைகளின் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் கணக்கிடவும்.

(4) ஒன்பதின் மடங்குகளான எல்லா மூன்றிலக்க எண்களின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) $5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times \ldots \times 5^{2n} = (0.008)^{-30}$ என்ற சமன்பாட்டில் n ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(6) சில கூட்டுத்தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தொடரின் n ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

i) $n^2 + 2n$ ii) $2n^2 + n$ iii) $n^2 - 2n$

iv) $2n^2 - n$ v) $n^2 - n$

(7) கீழே உள்ள கூட்டுத்தொடர்களின் தொகைகளை மனக்கணக்காகக் கணக்கிடவும்.

i) $51 + 52 + 53 + \ldots + 70$

ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

(8) ஒரு கூட்டுத்தொடரின் முதல் 10 உறுப்புகளின் தொகை 350 உம், முதல் 5 உறுப்புகளின் தொகை 100 உம் ஆகும். தொடரின் இயற்கணித வடிவம் எழுதவும்.

(9) 16, 24, 32, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதல் சில உறுப்புகளின் தொகையுடன் 9 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் எண் முழுவர்க்கம் ஆகும் என நிறுவுக.

(10) 4

7 10

13 16 19

22 25 28 31

....

....

....

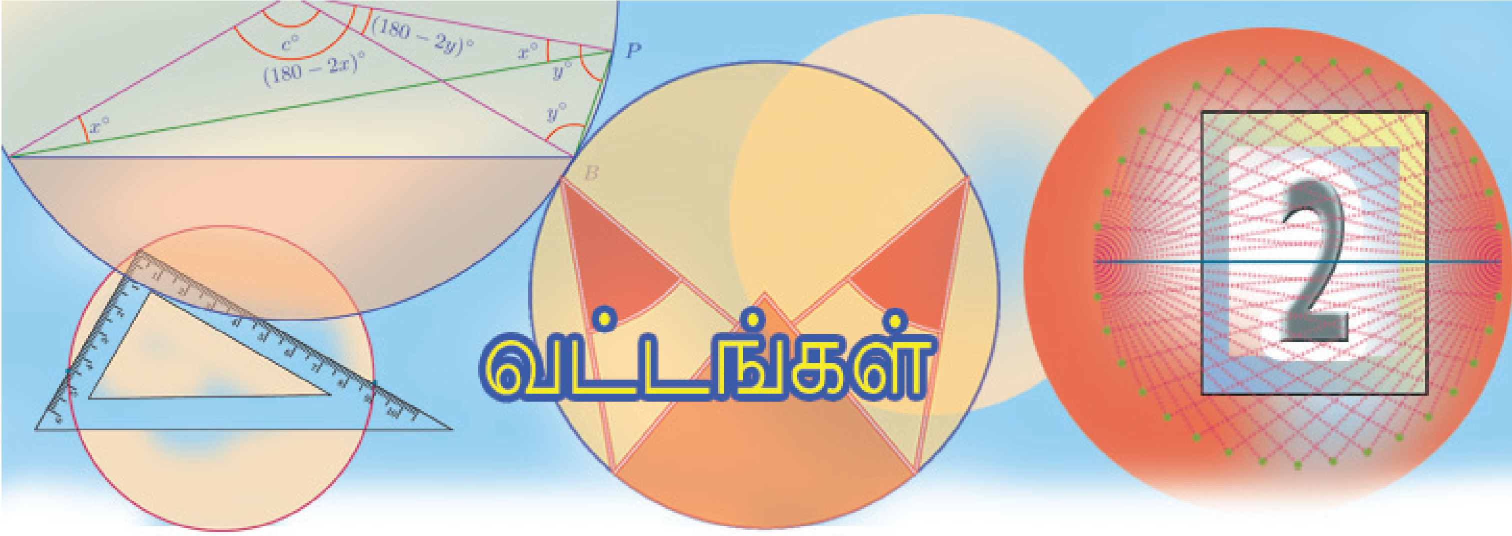
மேலே எழுதிய எண்வரிசையில் அடுத்த இரு வரிசைகளை எழுதவும். 20 ஆம் வரிசையிலுள்ள முதல், கடைசி எண்களை எழுதவும்.

ஆய்வு

- தொடரில் உள்ள உறுப்புகளின் அடுக்குகளில் எல்லாம் அதன் உறுப்புகளான கூட்டுத்தொடர்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
- முதல் உறுப்பு முதல் தொடர்ச்சியான எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினாலும், முழுவர்க்கங்கள் கிடைக்கின்ற கூட்டுத்தொடர்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

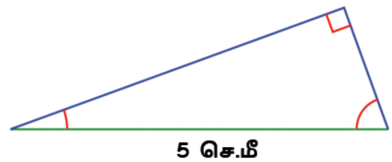
மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• தொடர்களின் விதிமுறையைப் புரிந்துகொண்டு அவற்றின் இயற்கணித வடிவம் எழுதுதல்.			
• பல்வேறு தொடர்களிலிருந்து கூட்டுத்தொடர்களைப் பகுத்தறிதல்.			
• கூட்டுத்தொடரின் உறுப்புகளுக்கும், உறுப்பின் இடங்களுக்கும், பொதுவித்தியாசத்துக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை உருவாக்குதல்.			
• கூட்டுத்தொடரின் தொகையைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு உரிய வழிமுறைகளைப் புரிந்து கொள்வதுடன், பயன்படுத்துதல்.			



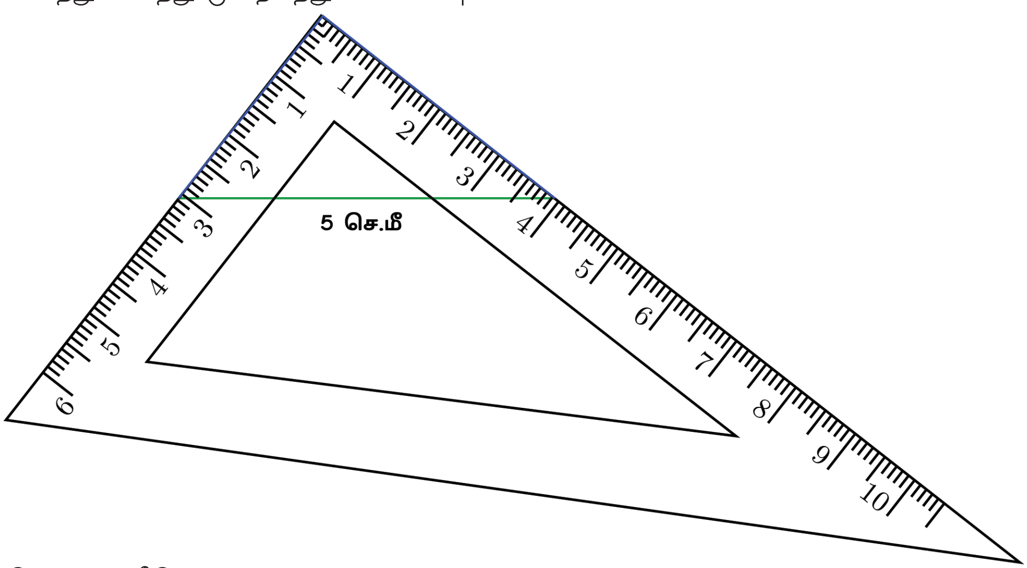
2 வட்டங்கள்

ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைய வேண்டும். கர்ணம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆகும். செங்கோணப் பக்கங்கள் எதுவும் ஆகலாம். எவ்வாறெல்லாம் வரையலாம்?

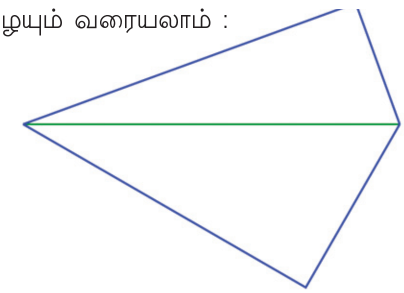


5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கோடு வரையவும், அதன் ஒரு முனையில் விரும்பும் அளவில் ஒரு கோணமும், மறுமுனையில், 90° இல் இருந்து இதனைக் கழித்த கோணமும் வரைந்து, முக்கோணத்தை உருவாக்கலாம்.

செங்கோணமானியைப் பயன்படுத்தியும் வரையலாம். செங்கோண உச்சி மேலே வரும் முறையில் அதன் ஓரங்கள் இரண்டையும் கோட்டின் இரு முனைகளிலும் சேர்த்து வைத்து முயற்சித்துப் பார்க்கவும்:

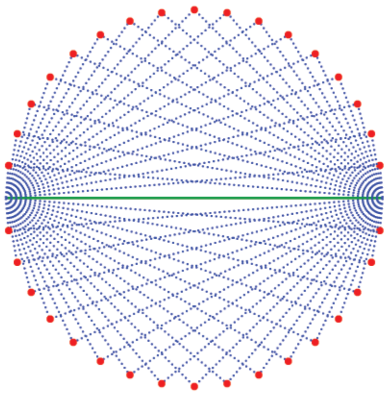


கோட்டின் கீழேயும் வரையலாம் :



இத்தகைய பல முக்கோணங்கள் வரைந்து அவற்றின் மூன்றாவது உச்சிகளை மட்டும் பார்க்கவும்:

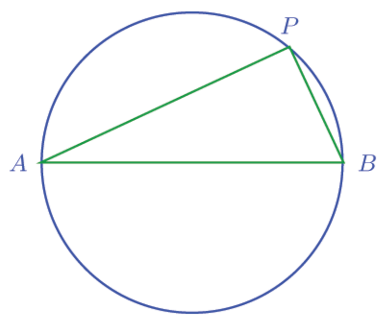
எதனால் இவை யாவும் ஒரு வட்டத்தில் ஆயின? சிந்தித்துப் பார்க்கலாம்.



செங்கோண முக்கோணங்கள் வாயிலாக வட்டம் உருவாகி வருவதை ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி அழகாகக் காணலாம். முதலாவது Segment with Given Length பயன்படுத்தி 5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கோடு வரையவும். இனி 0 முதல் 180 வரை 5 இடைவெளிவிட்டு மாறுகின்ற a என்ற Slider பயன்படுத்தி, கோட்டின் இடது முனையில் Angle with Given Size பயன்படுத்தி, கோட்டின் இடது முனையில் a° அளவில் counter clockwise ஆகவும், வலது முனையில் (90 – a)° அளவில் clockwise ஆகவும், கோணங்கள் உருவாக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கின்ற புள்ளிகளைக் கோட்டின் முனைகளுடன் Line பயன்படுத்தி இணைக்கவும். இந்தக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும் கோட்டின் முனைகளையும் இணைத்து முக்கோணம் உருவாக்கவும். முக்கோணத்தின் மேலே உள்ள கோடுகளுக்கும், மேலே உள்ள உச்சிக்கும் Trace On கொடுத்து, Slider க்கு Animation On கொடுக்கவும்.

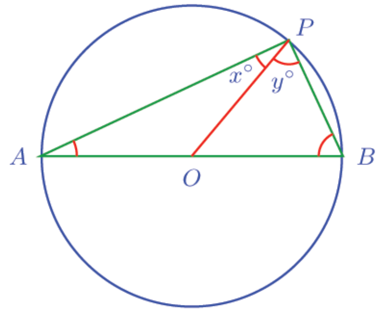
செங்கோணமும் வட்டமும்

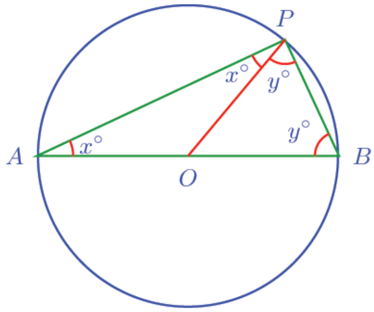
வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகள், வட்டத்தின் வேறொரு புள்ளியுடன் இணைத்து உருவாகும் கோணத்தைப் பற்றி எட்டாம் வகுப்பில் **சர்வசமப்பக்க முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தின் இறுதியில் கலந்துரையாடியது நினைவில் உள்ளதா?



P இல் உள்ள கோணம் செங்கோணம் எனத் தெளிவுபடுத்தியது எவ்வாறு?

P யுடன் வட்டமையம் O வையும் இணைக்கவும். இப்போது P இல் உள்ள கோணம் இரண்டாக்கப்பட்டது:





படத்தில் இடதும் வலதும் உள்ள சிறிய முக்கோணங்கள் AOP உம் BOP உம் இருசமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும். (காரணம்?). எனவே A இல் உள்ள கோணம் $x°$ உம் B இல் உள்ள கோணம் $y°$ உம் ஆகும்.

ABP என்ற பெரிய முக்கோணத்தில் கோணங்களின் தொகை $180°$ ஆனதால்

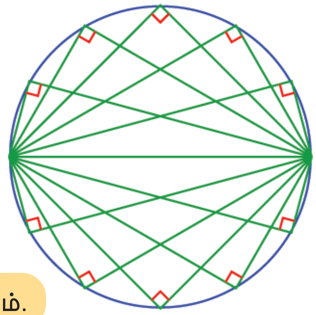
$$x + y + (x + y) = 180$$

எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து

$$x + y = 90$$

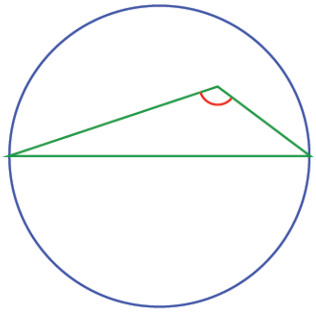
எனக் காணலாம்.

வட்டத்திலுள்ள ஒரு விட்டத்தின் முனைகளை, வட்டத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியுடன் இணைத்தாலும் செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும்.



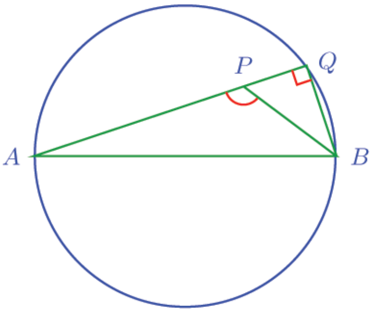
இதனைச் சிறிது சுருக்கமாக இவ்வாறும் கூறலாம்:

அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம் ஆகும்.



இங்கு வேறொன்றையும் பார்க்கலாம். விட்டங்களின் முனைகளை வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்ததால்தான் செங்கோணம் கிடைத்தது. வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தால்?

ஒரு கோட்டினை நீட்டி, வட்டத்தில் சேர்க்கவும். அப்புள்ளியை விட்டத்தின் மறு முனையுடன் இணைக்கவும்:

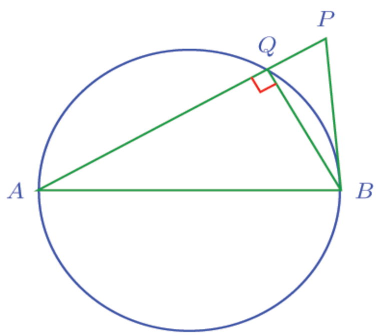


இப்போது ΔPQB இல், P இல் வெளிக்கோணம் APB. இது, முக்கோணத்தின் Q விலும், B யிலும் உள்ள உட்கோணங்களின் தொகை அல்லவா.

இதில் Q இல் உள்ள கோணம் செங்கோணம் ஆனதால், $\angle APB$ செங்கோணத்தை விடக் கூடுதலாகும் எனக் கிடைத்தது அல்லவா?

இனி வட்டத்தின் வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி ஆனாலோ?

இப்போது ΔPQB இல், $\angle APB$ உட்கோணம் ஆகும். செங்கோணமான AQB வெளிக் கோணமும். எனவே $\angle APB$ செங்கோணத்தை விடச் சிறியது அல்லவா?



இனி, ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்களின் முனை களை ஏதோ ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்தபோது செங்கோணம் கிடைத்தது எனக் கருதவும். இப்புள்ளி வட்டத்தின் உள்ளே அல்ல. (உள்ளே உள்ள புள்ளிகள் அனைத்திற்கும் இக்கோணம் செங்கோணத்தை விடக் கூடுதல் அல்லவா?) வட்டத்தின் வெளியிலும் இல்லை. (வெளியே உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் இக்கோணம் செங்கோணத்தை விடக்குறைவு அல்லவா). ஆதலால் இப்புள்ளி வட்டத்திலேயே உள்ளது.

எனவே என்ன கிடைத்தது?

வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளிலிருந்தும் வரையும் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் அவை வட்டத்தில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

இதனைச் சிறிது மாற்றி வட்டத்தை இறுதியில் ஆக்கலாம்.

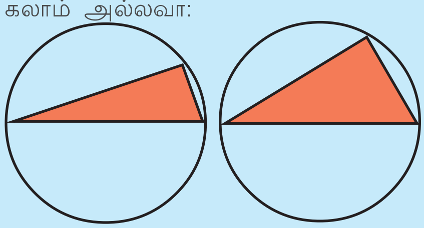
ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலிருந்தும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக வரையும் கோடுகள் அனைத் தும் அந்தக்கோடு விட்டமான வட்டத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும்.

செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்றாவது உச்சியைச் சேர்ந்து முதலாவது வரைந்த படத்தில் வட்டம் கிடைத்தது எதனால் என விளங்குகிறது அல்லவா?

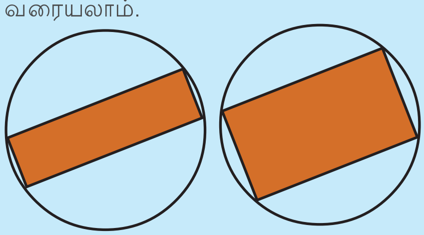
இனி வட்டத்தின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வரையும் கோடுகளுடன், வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை இணைத்து வரையும் கோடு வட்டத்தின் விட்டம் ஆகுமா?

சதுரச் சிறப்பு

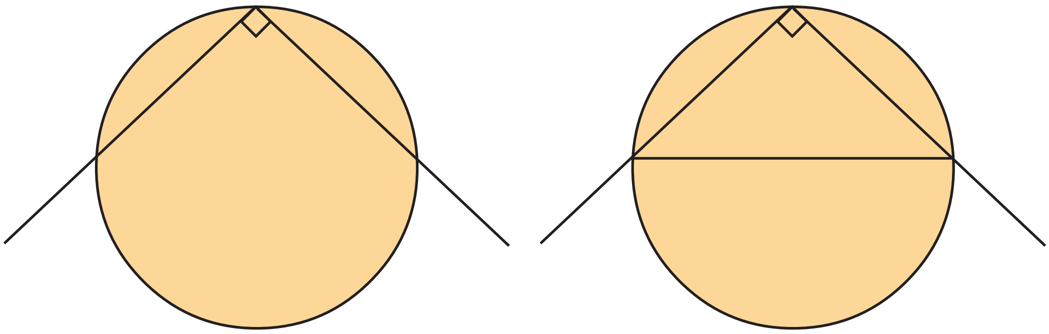
வட்டத்தின் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் எதையாவது விட்டங்களின் இரு முனைகளுடன் இணைத்து, வேறுபட்ட செங்கோண முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம் அல்லவா:



இவற்றில் மிகக் கூடுதல் பரப்பளவு, மேலே உள்ள புள்ளி எந்த இடத்தை நெருங்கும் போது ஆகும்? எனவே வேறொரு வினா: நான்கு உச்சிகளும் வட்டத்தில் ஆன பல செவ்வகங்கள் வரையலாம்.



இவற்றில் மிகக்கூடுதல் பரப்பளவு உள்ள சதுரத்தின் சிறப்புத்தன்மை என்ன?



இப்போது ஒரு செங்கோண முக்கோணமும் அதன் சுற்றுவட்டமும் ஆயிற்று. செங்கோணமுக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளி ஆகும் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் படித்திருக்கிறோம் அல்லவா?

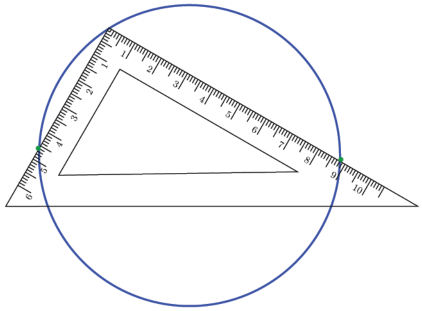
எனவே கீழே உள்ள கோடு விட்டம் ஆகும்.

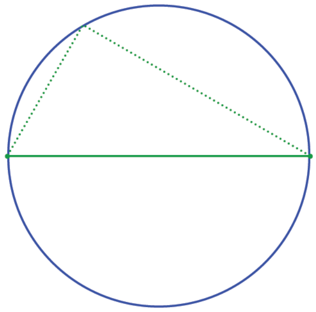
இனி இக்கோட்பாடுகளின் ஒரு பயன்பாட்டைப் பார்க்கலாம்:

வளையலோ, பாத்திரத்தின் மூடியோ பயன்படுத்தி வரையப்படும் வட்டத்தின் மையம் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய ஒரு வழிமுறை, ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டது நினைவில் உள்ளதா?

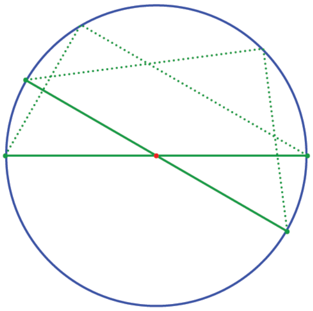
வேறொரு வழிமுறை உள்ளது. ஒரு செங்கோண மானியின் முனையை வட்டத்தில் வைத்து, செங் கோணத்தின் பக்கங்கள் வட்டத்தை வெட்டும் இடங்களை அடையாளப்படுத்தவும்.

இவற்றை இணைக்கும் கோடு வட்டத்தின் விட்டம் அல்லவா.



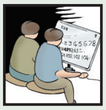


இனி வட்டத்தில் வேறொரு இடத்தில் செங்கோணமானியை வைத்து ஒரு விட்டமும் வரைந்தால், அவை வெட்டும் புள்ளியே வட்ட மையம் ஆகும்.:

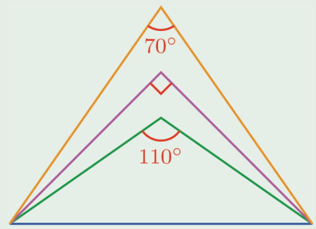


A மையமாக ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B, C என்ற இரு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். Ray பயன்படுத்தி B இல் இருந்து C வழியாக ஒரு கோடு வரையவும்.

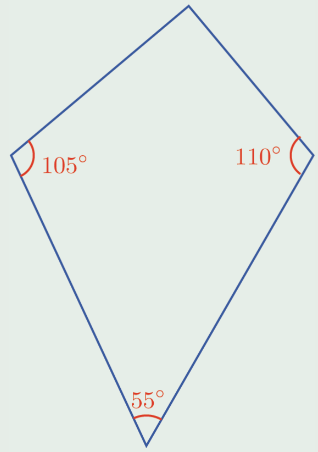
B வழியே BC க்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையவும். இக்கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியை D என அடையாளப்படுத்தவும். CDஐ இணைத்துப் பார்க்கவும். இது வட்டத்தின் விட்டமா? B, C என்ற புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



(1) படத்தில் முக்கோணங்களின் கீழ்ப்பக்கம் விட்டமாக ஒரு வட்டம் வரைந்தால், ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் மேல்உச்சி வட்டத்தின் உள்ளேயா, வெளியேயா அல்லது வட்டத்திலா எனக் கண்டுபிடிக்கவும்.

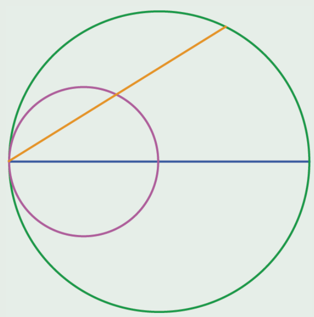


(2) படத்தில் நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு மூலை விட்டத்தையும் விட்டமாகக் கொண்டு வட்டம் வரைந்தால் அந்த மூலைவிட்டத்தில் அல்லாத எதிர் உச்சிகள் வட்டத்தின் உள்ளேயா, வெளியேயா, வட்டத்திலா எனக் கண்டு பிடிக்கவும்.



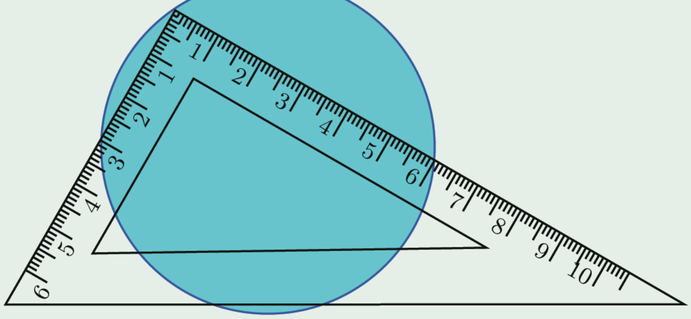
(3) பக்கங்களின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டர், 12 சென்டிமீட்டர், 13 சென்டிமீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் விட்டமாக்கி வட்டங்கள் வரைந்தால், ஒவ்வொரு நிலையிலும் மூன்றாவது உச்சி வட்டத்தின் எங்கே இருக்கும் எனக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(4) படத்தில் ஒரு கோடு விட்டமாக ஒரு வட்டமும் கோட்டின் பாதி விட்டமாக ஒரு சிறிய வட்டமும் வரையப்பட்டுள்ளன. வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி வழியே பெரிய வட்டத்தில் வரையும் எந்த வில்லினையும் சிறிய வட்டம் சமப்பாகம் செய்யும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

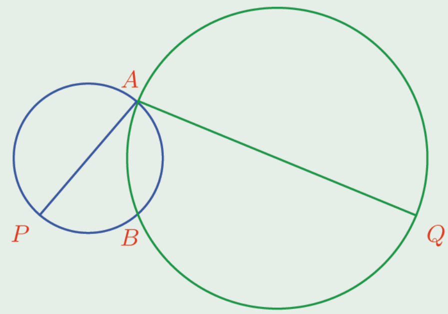


(5) ஓர் இரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் சமமான பக்கங்கள் விட்டங்களாக வரையப்படும் வட்டங்கள், மூன்றாவது பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

(6) படத்தில் வட்டத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் இரு தசம இடங்களுக்குச் சரியாக வருமாறு கணிப்பான் பயன்படுத்திக் கணக்கிடவும்.



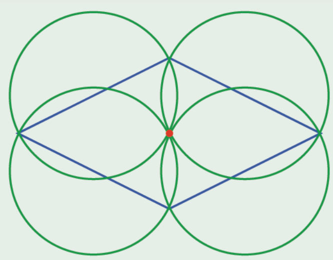
(7) படத்தில் இரு வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டும் புள்ளிகள் A உம், B உம் ஆகும். A வழியே உள்ள விட்டங்களின் மற்ற முனைகள் P உம் Q உம் ஆகும்:



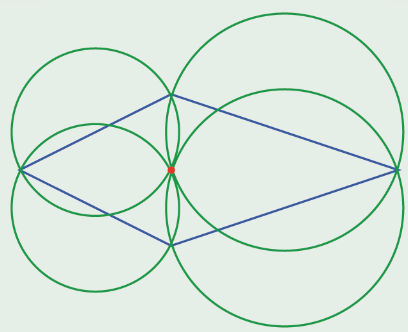
i) P, B, Q என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் உள்ளவை என நிறுவுக.

ii) PQ என்ற கோடு வட்டமையங்களை இணைக்கும் கோட்டுக்கு இணையானது எனவும், PQ இன் நீளம், கோட்டின் நீளத்தின் இரு மடங்கு எனவும் தெளிவுபடுத்தவும்.

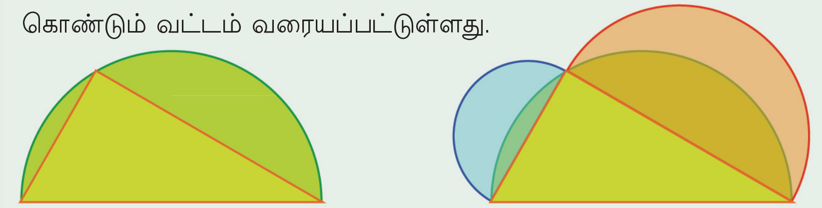
(8) ஒரு சாய்வுசதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களையும் விட்டங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டங்கள் அனைத்தும் பொதுவான ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.



படத்தில் உள்ளதைப் போன்று அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமான எந்த நாற்கரத்திலும் இது சரியாகும் என நிறுவுக.



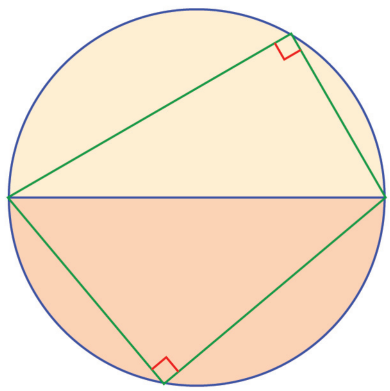
(9) ஓர் அரைவட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியையும் விட்டத்தின் இரு முனைகளையும் இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. தொடர்ந்து, முக்கோணத்தின் மற்ற இரு பக்கங்களை விட்டமாகக் கொண்டும் வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது.



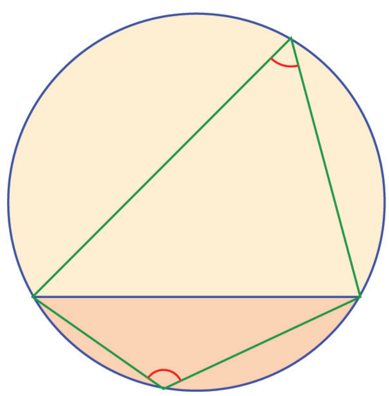
இரண்டாவது படத்தில் நீலமும், சிவப்பும் உடைய சந்திர வட்டங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கிடைக்கும் என நிறுவுக.

நாணும் கோணமும் வில்லும்

வட்டத்தின் எந்த விட்டமும் அதனை இரு சமப்பாகங்கள் ஆக்குகிறது. எந்தப் பாகத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் விட்டத்தின் முனைகளை இணைத்தாலும் செங்கோணம் கிடைக்கிறது.

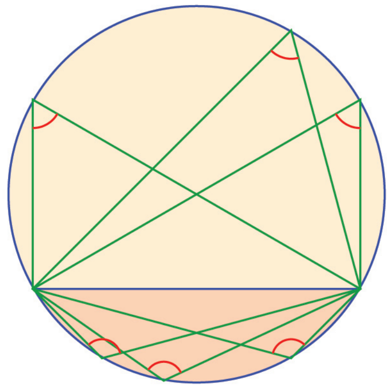


விட்டம் அல்லாத வேறு ஏதேனும் நாண் ஆனால்?

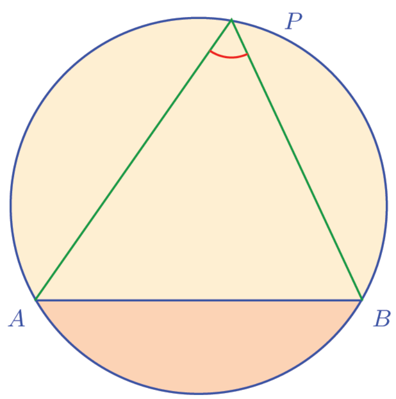


பாகங்கள் சமம் அல்ல. கோணங்கள் செங்கோணமும் அல்ல.

ஆனால் இங்கும் ஒரே பாகத்தில் உள்ள கோணங்கள் அனைத்தும் சமம் ஆகுமா?

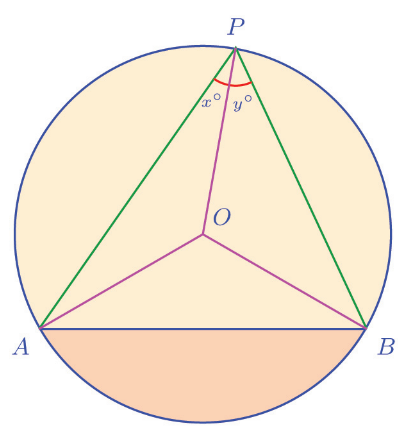


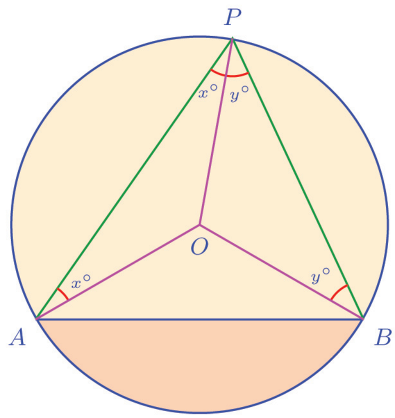
நமக்குப் பார்க்கலாம். முதலில் மேலே உள்ள ஒரு கோணத்தைச் சோதித்துப் பார்க்கவும்:



A மையமான ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B, C, D என்ற மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். BC, CD, BD என்பவற்றை இணைக்கவும். ∠D ஐ அடையாளப்படுத்தி, D இன் இடத்தை வட்டம் வழியாக மாற்றிப் பார்க்கவும். கோண அளவுக்கு என்ன நிகழ்கிறது? B, C என்பனவற்றின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். ∠D எப்போது செங்கோணம் ஆகிறது? செங்கோணத்தைவிடக் கூடுதலாகவும் குறைவாகவும் ஆவது எப்போது?

விட்டத்தின் காரியத்தில் செய்ததைப் போன்று, வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி P ஐ, வட்ட மையம் O உடன் இணைக்கலாம். இக்கோடு P இல் உள்ள கோணத்தை வெட்டி உருவாக்கும் பாகங்களின் அளவுகள் $x°$, $y°$ என எடுக்கவும். இங்கு வட்ட மையம் நாணில் இல்லாததால், OA, OB என்பவற்றையும் இணைக்கலாம்.



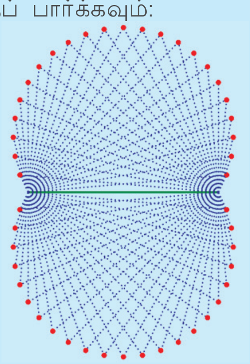


விட்டத்தின் காரியத்தில் உள்ளதைப்போன்று இங்கும் OAP, OBP என்பவை இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள் அல்லவா. எனவே A யிலும் B யிலும் கோணங்களின் ஒரு பாகத்தை எழுதலாம்:

இங்குப் பழையதைப் போன்று இந்த இருசமபக்க முக்கோணங்கள் சேர்ந்து, ஒரே முக்கோணம் ஆவதில்லை. ஆகவே முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகையைக் காண்கின்ற பழைய செயல்பாடு பயனுடையது அல்ல.

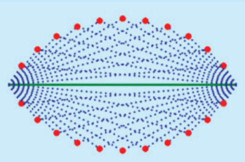
வட்ட வித்தை

ஒரு கோட்டின் மேலாகவும் கீழாகவும் ஒரே அளவு உள்ள கோணங்கள் வரைந்த படத்தைப் பார்க்கவும்:



மேலாகவும் கீழாகவும் 60° எடுத்தே இங்கு வரைந்தோம்.

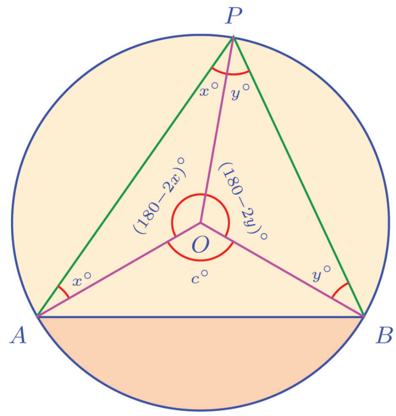
120° எடுத்த போது இவ்வாறானது:



மேலாக 60° உம், கீழே 120° உம் எடுத்துப் பார்க்கவும். ஒரு முழுவட்டம் கிடைக்கிறது அல்லவா? எதனால்?

மேலும் 30° கோணங்களே எடுக்கப் பட்டன எனில், முழுவட்டம் ஆவதற்கு, கீழே எடுக்க வேண்டிய கோணம் எது?

பதிலாக, O இன் சுற்றிலும் உள்ள கோணங்களை எழுதிப் பார்க்கலாம்:



படத்தில் காண்பித்திருப்பதைப் போன்று $\angle AOB = c°$ என எடுத்தால்,

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

எனக் காணலாம். இதிலிருந்து

$$2(x + y) = c$$

எனத் தொடர்ந்து,

$$\angle APB = (x + y)° = \frac{1}{2}c°$$

எனக் கிடைக்கும்.

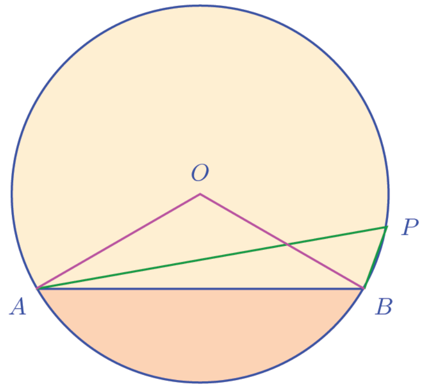
இங்குக் கவனிக்க வேண்டியது, A, B என்பவற்றை உறுதிப் படுத்திய பின்னர், P இன் இடத்தை மாற்றும் போது, x, y என்பவை மாறினாலும், c மாறுவதில்லை.

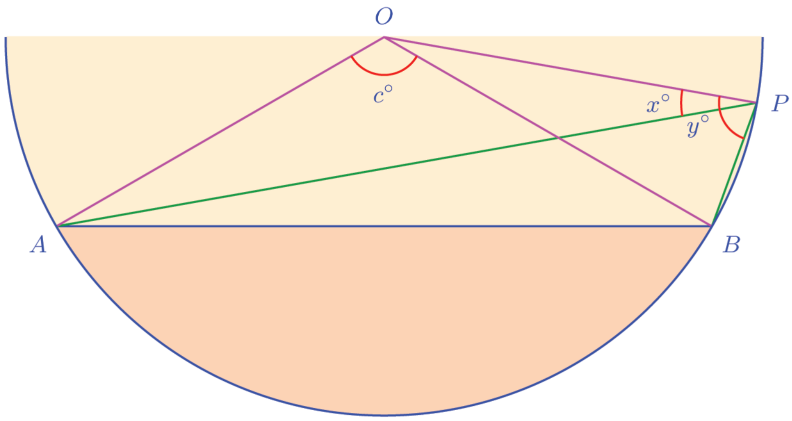
எனவே P இன் இடம், AB இன் மேலாக வட்டத்தில் எங்கிருந்தாலும் $\angle APB = \frac{1}{2}c°$ எனக் கிடைக்குமா?

இவ்வாறு ஆனால்?

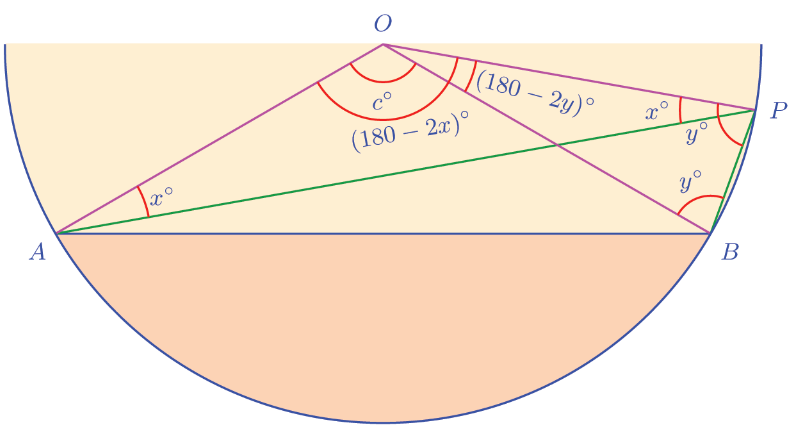
முன்னர் செய்ததைப் போன்று $\angle APO = x°$ எனவும் $\angle BPO = y°$ எனவும் எடுக்கலாம்.

கோணங்களைத் தெளிவாகக் காண்பதற்கு, படத்தில் தேவையான பாகத்தைப் பெரியதாக ஆக்கலாம்.





OAP, OBP என்பவை இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள் என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தி, முன்னர் செய்ததைப் போன்று பிற கோணங்களை எழுதலாம்.



P இன் கோணங்களிலிருந்து

$$\angle APB = (y - x)^\circ$$

எனக் காணலாம்; O இன் கோணங்களிலிருந்து

$$c = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)$$

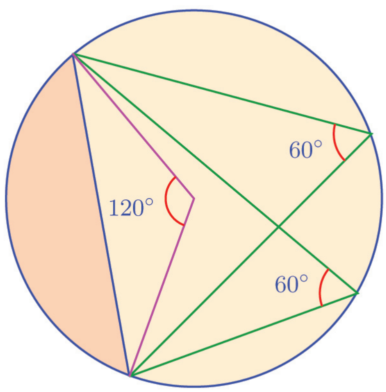
எனவும் காணலாம். எனவே மீண்டும்

$$\angle APB = \frac{1}{2} c^\circ$$

எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது, விட்டம் அல்லாத ஒரு நாணின் முனைகள் பெரிய வட்டப்பகுதியில் உள்ள எந்தப்புள்ளியுடனும் இணைத்து உருவாக்கும் கோணம், அவற்றை மையத்துடன் இணைத்து உருவாக்கும் கோணத்தின் பாதியாகும்:

எடுத்துக்காட்டாக, இப்படத்தைப் பார்க்கவும்.



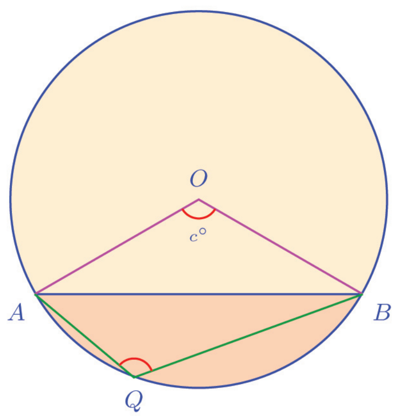
இனி வட்டத்தின் சிறிய பாகத்தின் கோணங்களைப் பார்க்கலாம்:

A மையமாக வரையும் ஒரு வட்டத்தில் B, C, D என்ற மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.

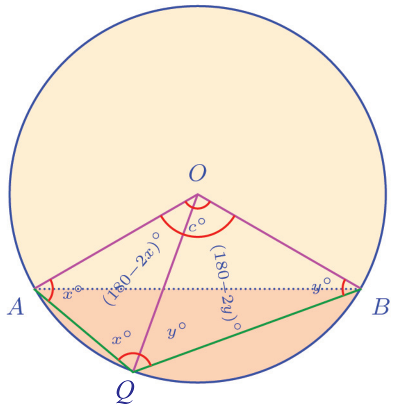
B, C என்ற புள்ளிகளை A உடனும் D உடனும் இணைக்கவும்.

∠BDC, ∠BAC என்பவற்றை அடையாளப்படுத்தவும். இந்த இரு கோண அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

B, C, D என்பனவற்றின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



OQ ஐ இணைத்தால் இங்கும் இரண்டு இரு சமப்பக்க முக்கோணங்கள் கிடைக்கும். எனவே முன்னர் செய்ததைப் போன்று கோணங்களை எழுதலாம்.



O இல் உள்ள கோணங்களைப் பார்த்தால்,

$$c = (180 - 2x) + (180 - 2y)$$

எனக் காணலாம், இதிலிருந்து

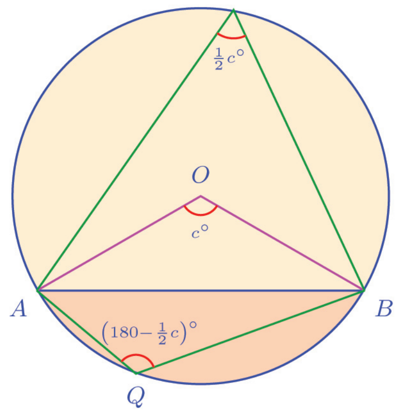
$$2(x + y) = 360 - c$$

எனவும் தொடர்ந்து,

$$\angle AQB = (x + y)^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$$

எனக் கிடைக்கும்.

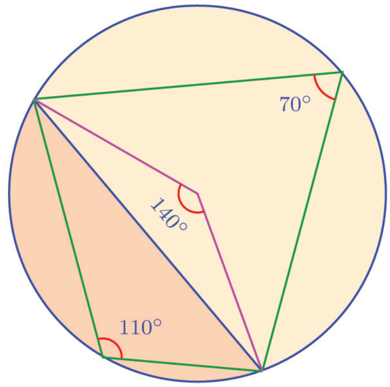
இனி வட்டத்தின் இரு பாகங்களில் உள்ள கோணத்தையும் மையத்தில் உள்ள கோணத்தையும் ஒருமித்துப் பார்க்கவும்:

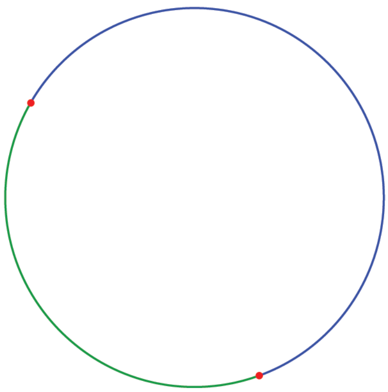


விட்டம் அல்லாத ஒரு நாண் வட்டத்தை ஒரு பெரிய பாகமும் ஒரு சிறிய பாகமும் ஆகப் பிரிக்கிறது. பெரிய பாகத்தின் எந்தப் புள்ளியுடனும் நாணின் முனைகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் கோணம், அவற்றை வட்டமையத்துடன் இணைத்துக் கிடைக்கும் கோணத்தின் பாதி ஆகும். சிறிய பாகத்தின் எந்தப் புள்ளியுடனும் நாணின் முனைகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் கோணம், மையக்கோணத்தின் பாதி 180° இல் இருந்து கழித்ததாகும்.

சுருங்கக் கூறினால், ஒரு நாண் மையத்தில் உருவாக்கும் கோணம் தெரியுமெனில் அந்த நாண் அதன் இரு பாகங்களிலும் உருவாக்கும் எல்லாக் கோணங்களையும் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மையக்கோணம் $140°$ உருவாக்கும் நாண், பெரிய வட்டப் பாகத்தில் $\frac{1}{2} \times 140° = 70°$ கோணமும், சிறிய பாகத்தில் $180° - \left(\frac{1}{2} \times 140°\right) = 110°$ கோணமும் உருவாக்குகிறது:



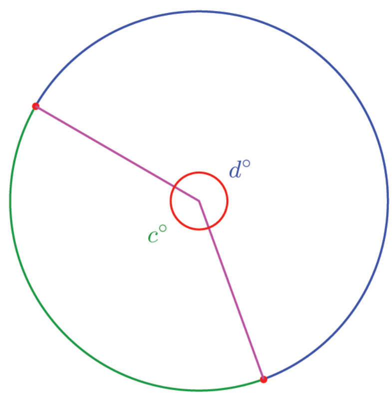


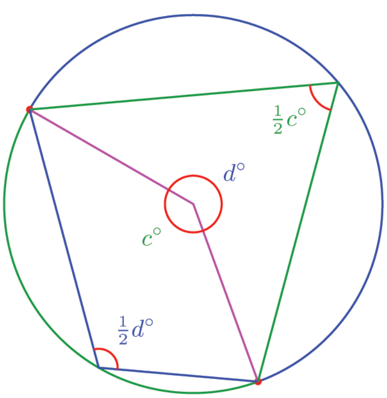
வட்டத்தின் விற்களின் மையக்கோணத்தைக் குறித்து ஒன்பதாவது வகுப்பில் படித்தீர்கள் அல்லவா. அதனைப் பயன்படுத்தி மேலே உள்ள கோட்பாட்டைக் கூறலாம்.

வட்டத்தில் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளும் அதனை இரு விற்களாகப் பிரிக்கின்றன.

இவற்றில் ஒவ்வொரு வில்லினையும் மற்ற வில்லின் **எதிர்வில் (alternate arc)** என்றோ, **நிரப்பு வில் (complementary arc)** என்றோ கூறலாம். இவற்றின் மையக்கோணங்கள் $c°$, $d°$ என எடுத்தால்,

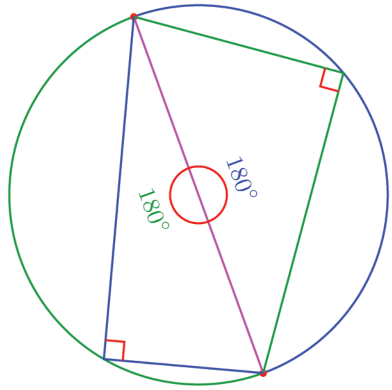
$$c + d = 360$$





இனி வட்டத்தில் முதலாவது எடுத்த இரண்டு புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வில்லிலும் உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் உருவாக்கும் கோணங்களைப் பார்க்கலாம். முன்னர் கண்டதற்கு ஏற்ப, பெரிய வில்லில் உருவாக்கும் கோணம் $\frac{1}{2}c°$; சிறிய வில்லில் உருவாக்கும் கோணம்.

$$\left(180 - \frac{1}{2}c\right)° = \frac{1}{2}(360 - c)° = \frac{1}{2}d°$$



வட்டத்தில் எடுக்கும் புள்ளிகள் ஒரு விட்டத்தின் முனைகள் ஆனாலோ? படம் இவ்வாறாகும்:

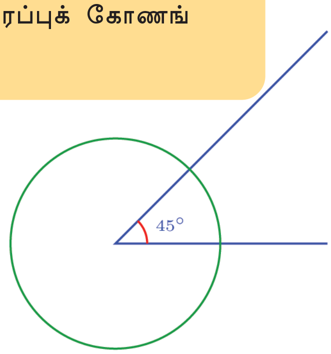
அப்போது வட்டத்தின் எந்த வில்லினைப் பற்றியும் இவ்வாறு கூறலாம்:

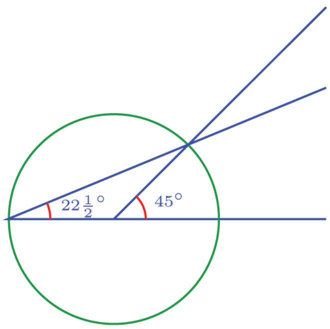
வட்டத்தில் உள்ள எந்த வில்லும் மையத்தில் உருவாக்கும் கோணத்தின் பாதியே அதன் எதிர் வில்லில் உருவாக்கும் கோணம் ஆகும்.

ஒரு வில், எதிர் வில்லில் உருவாக்கும் கோணங்கள் அனைத்தும் சமம் என்றும் இதிலிருந்து கிடைக்கிறது; மேலும் முதலாவது படத்தில் $\frac{1}{2}d^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$ என்பதைத் திரும்பவும் நினைவில் கொண்டால், எதிர் விற்களின் கோணங்களின் தொகை 180° எனக் காணலாம். தொகை 180° உள்ள ஒரு ஜோடி கோணங்களைப் பொதுவாக **மிகை நிரப்புக்கோணங்கள்** (supplementary angles) எனக் கூறுகிறோம். எனவே இக்கருத்துகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

வட்டத்தில் ஒரு வில், எதிர் வில்லில் உருவாக்கும் கோணங்கள் அனைத்தும் சமம் ஆகும். வில்லிலும் எதிர் வில்லிலும் உரு வாக்கும் எந்த ஜோடி கோணங்களும் மிகை நிரப்புக் கோணங் கள் ஆகும்.

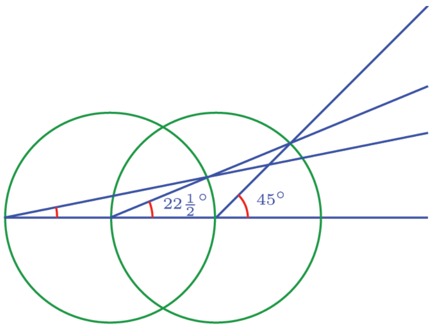
கோணங்களைப் பாதியாக ஆக்குவதற்கு இக்கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தலாம். படத்தைக் காணவும்.





கோணத்தின் உச்சியே வட்டமையம். இனி கோணத்தின் கீழே உள்ள கோட்டினை நீட்டி வட்டத்தில் வெட்டும் புள்ளியையும், கோணத்தின் மேல் உள்ள கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியையும் இணைத்தால் பாதிக் கோணம் ஆகும்.

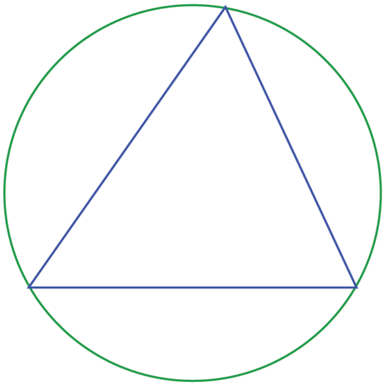
இவ்வாறாக மீண்டும் வரைந்தால்?

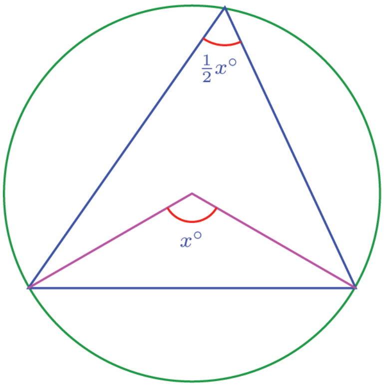


படத்தில் மூன்றாவது கோணத்தின் அளவு என்ன?

குறிப்பிட்ட கோணங்களும். குறிப்பிட்ட சுற்றுவட்டமும் உள்ள முக்கோணம் வரையவும். இக்கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கோணங்கள் 30°, 70°, 80° உம் சுற்றுவட்ட ஆரம் 2.5 சென்டிமீட்டரும் உள்ள முக்கோணம் வரைவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

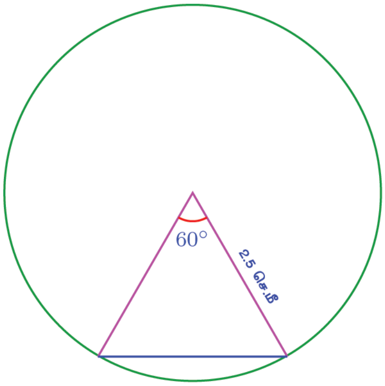
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் சுற்று வட்டத்தின் நாண்கள் அல்லவா.



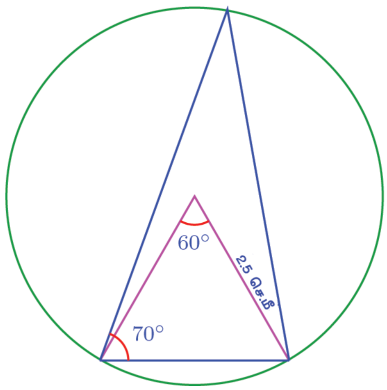


ஆகவே ஒவ்வொரு பக்கமும் சுற்றுவட்ட மையத்தில் உருவாக்கும் கோணத்தின் பாதியே. முக்கோணத்தில் அப்பக்கத்துக்கு எதிரே உள்ள கோணம்.

எனவே நமக்குத் தேவையான முக்கோணம் வரைய, முதலாவது 2.5 சென்டிமீட்டர் ஆரத்தில் வட்டம் வரைந்து, அதன் மையத்தில் 60° கோணம் வரையவும். அதன் முனைகளை இணைத்தால், முக்கோணத்தின் 30° கோணத்துக்கு எதிரே உள்ள பக்கம் ஆனது.



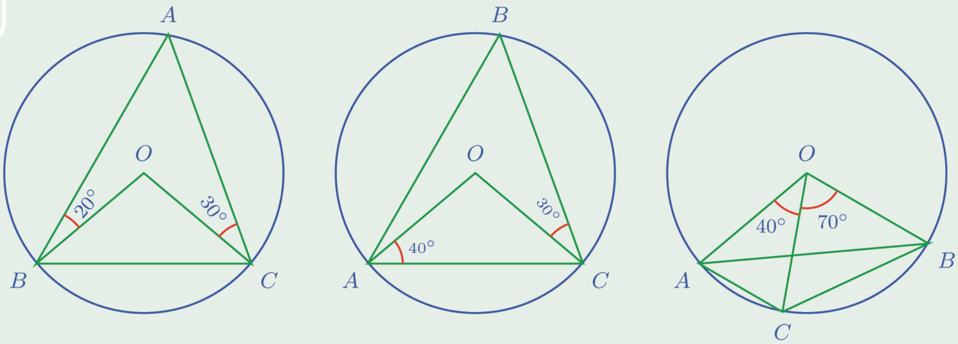
இனி இப்பக்கத்தின் ஒரு முனையில் 70° கோணம் வரைந்து, அதன் மேற்பக்கத்தை வட்டத்தில் இணைக்கவும். இப்புள்ளியை முதல் பக்கத்தின் மற்ற முனையுடன் இணைத்தால் தேவையான முக்கோணம் ஆனது.



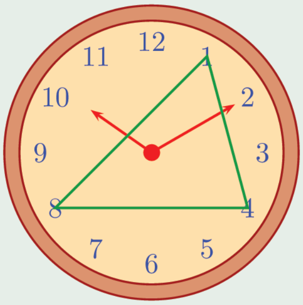
இந்த முக்கோணத்தில் மற்ற இரு கோணங்களும் 30° உம் 80° உம் அல்லவா? (எதனால்?)

இதிலிருந்து ஒரு காரியத்தைப் புரிந்து கொள்ளலாம். ஒரே கோணங்கள் உள்ள பல முக்கோணங்கள் வரையலாம். மேலும்சுற்று வட்டத்தின் ஆரமும் உறுதிப்படுத்தப்பட்டால் முக்கோணத்தைச் சரியாக முழுமைப்படுத்த இயலும்.

(1) கீழ்க்காணும் படங்கள் அனைத்தும் O வட்டமையமும் A, B, C வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளும் ஆகும். ABC, OBC என்ற முக்கோணங்களின் எல்லாக் கோணங்களையும் கணக்கிடுக.



(2) ஒரு கடிகாரத்தில் 1, 4, 8 என்ற எண்களை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையப்படுகிறது.



இந்த முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

கடிகாரத்தின் எண்களை இணைத்து எத்தனை சமபக்க முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம்?

(3) கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கணக்கிலும் ஒரு வட்டமும் அதில் ஒரு வில்லும் வரைந்து வட்டத்தை இரு பாகங்கள் ஆக்க வேண்டும். பாகங்கள் வினாவில் கூறியதைப் போன்றே இருக்க வேண்டும்:

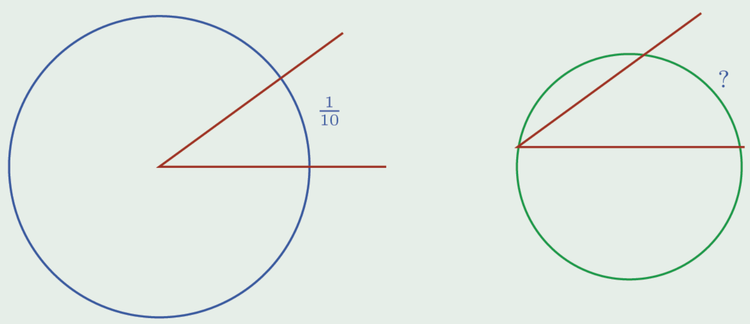
i) ஒரு பாகத்தில் உள்ள கோணங்கள் அனைத்தும் $80°$

ii) ஒரு பாகத்தில் உள்ள கோணங்கள் அனைத்தும் $110°$

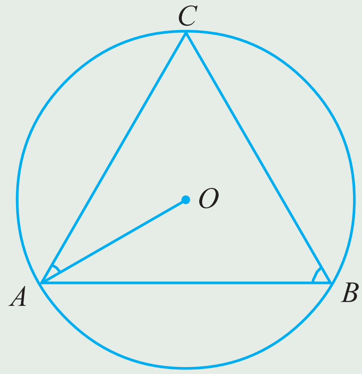
iii) ஒரு பாகத்தில் உள்ள கோணங்கள் அனைத்தும், மறுபாகத்தின் கோணங்களில் பாதி.

iv) ஒரு பாகத்தில் உள்ள கோணங்கள் அனைத்தும், மறுபாகத்தில் உள்ள கோணங்களின் ஒன்றரை மடங்கு

(4) ஒரு கம்பியை இரண்டாக மடக்கி, அதன் உச்சியை ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் வைத்தபோது, வட்டத்தின் $\frac{1}{10}$ பாகம் அதன் உள்ளில் ஆனது. இதே கம்பியின் உச்சியை ஏதேனும் வட்டத்தில் சேர்த்து வைத்தால், அவ்வட்டத்தின் எவ்வளவு பாகம் அதன் உள்ளே அமையும்?

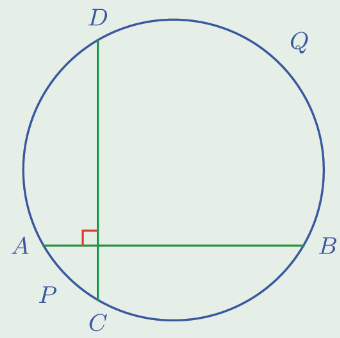


(5) படத்தில் O வட்டமையம் ஆகும். A, B, C என்பன புள்ளிகள். $\angle OAC + \angle ABC = 90°$ ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்

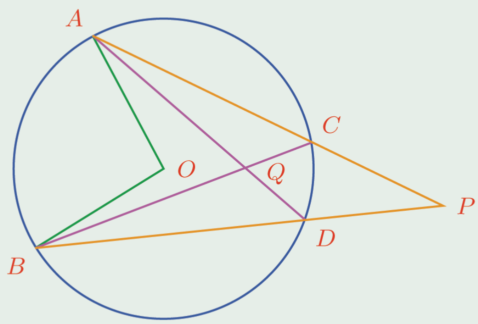


(6) சுற்றுவட்ட ஆரம் 3 சென்டிமீட்டரும், இரு கோணங்கள் $32\frac{1}{2}°$, $37\frac{1}{2}°$ உம் ஆன முக்கோணம் வரையவும்.

(7) படத்தில், AB, CD என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நாண்கள் ஆகும். APC, BQD என்ற விற்களைச் சேர்த்து வைத்தால், வட்டத்தின் பாதி ஆகும் எனத் தெளிவுப்படுத்தவும்.

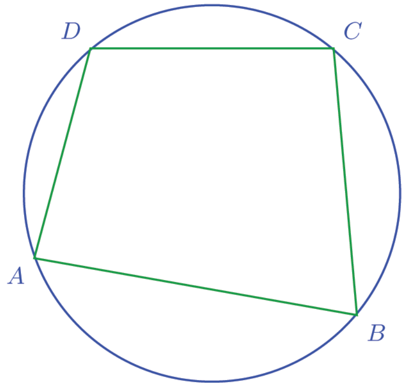


(8) படத்தில் A, B, C, D என்ற புள்ளிகள், O மையமான வட்டத்தில் ஆகும். AC, BD என்ற கோடுகளை நீட்டியபோது, P இல் வெட்டுகிறது; AD, BC என்ற கோடுகள் Q இல் வெட்டுகின்றன. AB என்ற சிறிய வில் O இல் உருவாக்கும் கோணம், P யிலும் Q விலும் உருவாக்கும் கோணங்களின் தொகை ஆகும் என நிறுவுக.



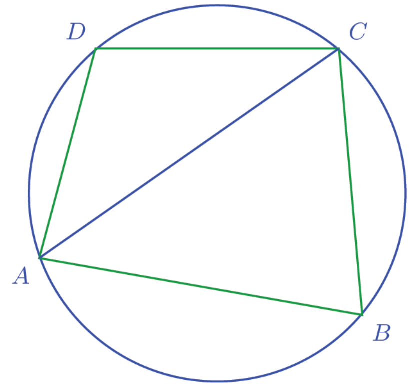
வட்டமும் நாற்கரமும்

இப்படத்தைப் பார்க்கவும் :



A, B, C, D என்ற உச்சிகளில் உள்ள கோணங்களுக்கு இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

AC ஐ இணைத்துப் பார்க்கவும் :



ஒரு வட்டத்தில் நான்கு புள்ளிகளை இணைத்துக்கொண்டு ஒரு நாற்கரம் வரையவும். (Polygon பயன்படுத்தவும்) Angle பயன்படுத்தி நாற்கரத்தின் உள்ளே கிளிக் செய்து எல்லாக் கோணங்களையும் அடையாளப்படுத்தவும். கோணங்களுக்கு இடையே ஏதாவது தொடர்பு உள்ளதா? புள்ளிகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

இப்போது B யிலும் D யிலும் உள்ள கோணங்கள், AC என்ற நாண் வட்டத்தை வெட்டி உருவாக்கும் இரு பாகங்களிலும் உள்ள கோணங்களாகும். ஆகவே அவை மிகை நிரப்பிகள் ஆகும்.

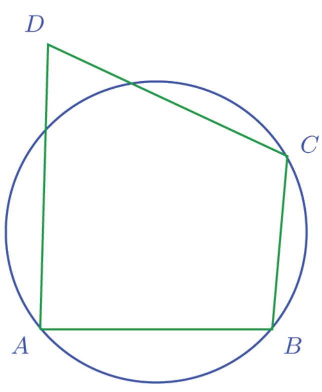
இதுபோன்று, BD ஐ வரைந்து பார்த்தால் A யிலும் C யிலும் உள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் எனவும் கிடைக்கும்.

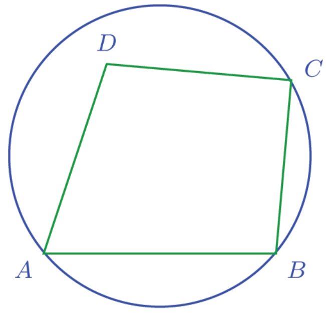
ஆகவே பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

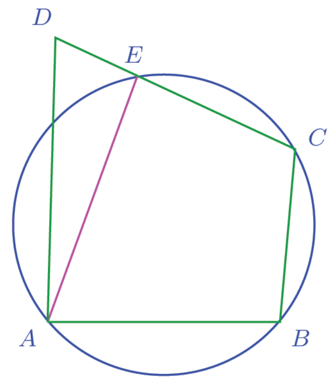
ஒரு நாற்கரத்தின் எல்லா உச்சிகளும் ஒரு வட்டத்தில் எனில், அதன் எதிர்கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் ஆகும்.

மாற்றிக் கூறினால் சரியாகுமா? ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் எனில், அதன் நான்கு உச்சிகள் வழியே கடந்து செல்லுமாறு ஒரு வட்டம் வரைய இயலுமா? இதற்கு விடைகூற ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு உச்சிகளையும் வட்டத்தில் ஆக்க இயலுமா என நடைமுறையில் காண்பது எவ்வாறு எனக் காண்போம்.

நாற்கரத்தின் மூன்று உச்சிகள் வழியாகவும் வட்டம் வரையலாம் அல்லவா. (ஒரு கோட்டில் அல்லாத எந்த மூன்று புள்ளிகள் வழியாகவும் வட்டம் வரையலாம் என ஒன்பதாவது வகுப்பில் கண்டது நினைவில் உள்ளதா?) இனி நான்காவது உச்சி, அது இந்த வட்டத்திலேயே இருந்தால் போதும். ஆனால் இந்த உச்சி சில வேளைகளில் வட்டத்திற்கு வெளியே ஆகலாம் அல்லது வட்டத்தின் உள்ளே ஆகலாம்.







முதலாவது படத்தைப் பார்க்கலாம். வட்டம் CD ஐ வெட்டிச் செல்லும் புள்ளியையும் E யையும் A யையும் இணைத்தால், வட்டத்தினுள் ஒரு நாற்கரம் உருவாகும்:

இப்போது A, B, C, E என்பவை அனைத்தும் ஒரே வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் ஆனதால்,

(1) $\angle B + \angle AEC = 180°$

இனி செங்கோணமும் வட்டமும் என்ற பாகத்தில், வட்டத்தின் உள்ளேயும் வெளியேயும் உள்ள புள்ளிகளைக் குறித்துள்ள கலந்துரையாடலில் உள்ளது போல்,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

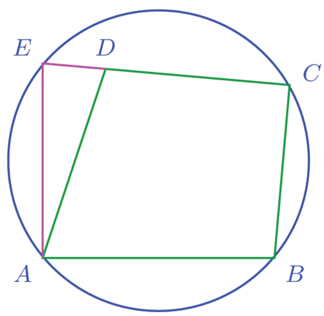
எனவும், அதனால்

(2) $\angle D < \angle AEC$

எனவும் காணலாம் அல்லவா. இங்கு (1), (2) என அடையாளப்படுத்திய தொடர்புகளின் பொருளைச் சிந்தித்தால்,

$$B + \angle D < 180°$$

எனக் காண்பது எளிதாகும். இனி இரண்டாவது படத்தில், CD ஐ நீட்டி அது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியையும் A யையும் இணைக்கவும்:



இதில்

(3) $\angle B + \angle E = 180°$

எனக் காணலாம். ஆகவே ΔEAD இல் இருந்து

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

எனக் காணலாம். அப்போது

(4) $\angle ADC > \angle E$

(3), (4) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

எனக் காணலாம் அல்லவா.

ஒரு வட்டத்தில் A,B,C என மூன்று புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். வட்டத்திற்கு வெளியே D என்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Polygon பயன் படுத்தி ABCD என்ற நாற்கரம் வரைந்து எல்லாக் கோணங்களையும் அடையாளப் படுத்தவும். D இன் இடத்தை வட்டத்தில் ஆக்கும்போது $\angle D$ $\angle B$ என்பனவற்றின் தொகை 180° ஆகும் எனக் கண்டோம் அல்லவா. D இன் இடம் வட்டத்தின் வெளியே ஆகும்போதோ? D இன் இடம் வட்டத்திலிருந்து நீங்கும் தோறும் இத் தொகைக்கு என்ன நிகழ்கிறது? D வட்டத்தின் உள்ளே ஆகும் போதோ?

எனவே கண்டது என்ன?

ஒரு நாற்கரத்தின் மூன்று உச்சிகள் வழியே வரையப்படும் வட்டத்தின் வெளியே நான்காவது உச்சி எனில், அந்த உச்சியிலும், எதிர் உச்சியிலும் உள்ள கோணங்களின் தொகை 180°ஐ விடக் குறைவாகும். உள்ளே எனில் தொகை 180° ஐ விடக் கூடுதலுமாகும்.

(நான்காவது உச்சி வட்டத்தில் எனில் இத்தொகை 180° ஆகும் என முன்னர் கண்டோம் அல்லவா)

இனி ஒரு நாற்கரம், $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $\angle B + \angle D = 180°$ என இருக்கட்டும். A, B, C வழியாக வட்டம் வரையவும்.

D வட்டத்துக்கு வெளியேயா? வெளியே எனில், $\angle B, \angle D$ என்பவற்றின் தொகை 180° ஐ விடக் குறைவு அல்லவா. எனவே வட்டத்தின் வெளியே அல்ல.

D உள்ளேயோ? உள்ளே எனில் $\angle B, \angle D$ என்பவற்றின் தொகை 180° ஐ விடக் கூடுதலாக வேண்டும் அல்லவா. எனவே வட்டத்தின் உள்ளேயும் அல்ல.

வெளியேயும் உள்ளேயும் அல்லாததால், D வட்டத்தில் ஆகும்.

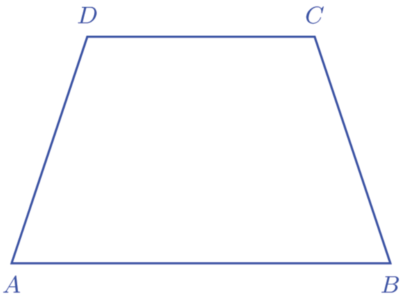
அதாவது,

ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக்கோணங்கள் எனில் நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரையலாம்.

நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும் கடந்து செல்லும் வட்டம் வரைய இயலும் நாற்கரம் என்பதைச் சுருக்கி **வட்ட நாற்கரம்** (cyclic quadrilateral) எனக் கூறுகிறோம். இப்போது மிகை நிரப்பிகளான நாற்கரங்களே வட்ட நாற்கரங்கள் ஆகும்.

செவ்வகங்கள் அனைத்தும் வட்ட நாற்கரங்கள் அல்லவா. இருசமப்பக்க சரிவகங்களும் வட்ட நாற்கரங்களே.

இப்படத்தைப் பார்க்கவும்:



$ABCD$ ஓர் இரு சமப்பக்க சரிவகம் ஆகும். எனவே

$$\angle A = \angle B$$

மட்டுமல்ல, AB உம் CD உம் இணையானதால்

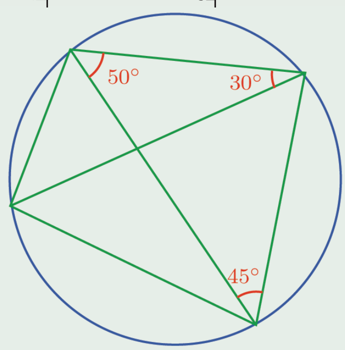
$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

இந்த இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

என்று காணலாம் அல்லவா. அதாவது $ABCD$ வட்ட நாற்கரமாகும்.

(1) படத்தில் நாற்கரத்தின் கோணங்களையும், மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணங்களையும் கணக்கிடவும்.

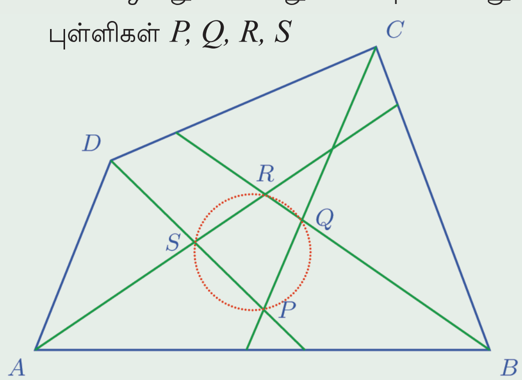


(2) ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எந்த உச்சியிலும் உள்ள வெளிக்கோணம் எதிர் உச்சியில் உள்ள உட்கோணத்துக்குச் சமம் என நிறுவுக.

(3) செவ்வகம் அல்லாத இணைகரங்கள் எதுவும் வட்டத்தில் அமையாது எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

(4) இரு சமப்பக்கம் அல்லாத சரிவகங்கள் எதுவும் வட்டத்தில் அமையாது என நிறுவுக.

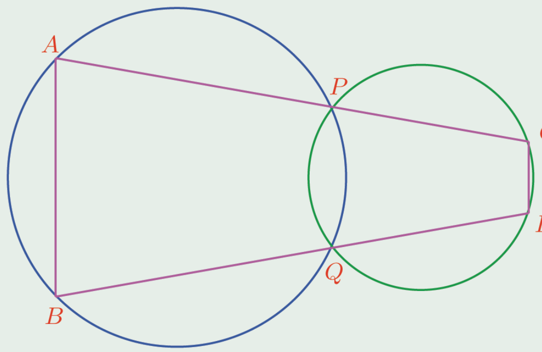
(5) படத்தில் $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளை ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகள் P, Q, R, S



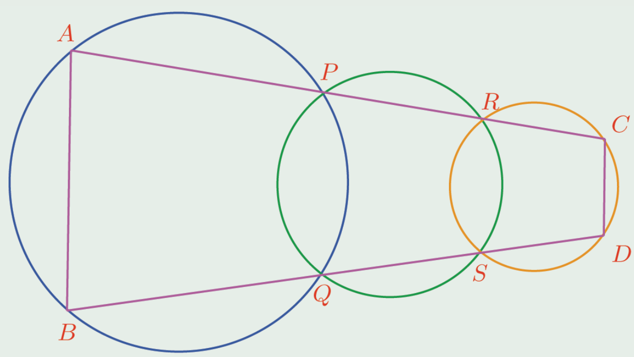
$PQRS$ வட்ட நாற்கரம் என நிறுவுக.

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு நாற்கரம் வரைந்து அதன் கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகள் வரையவும். அடுத்தடுத்த கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி, அவை உச்சிகளாக வரும் நாற்கரம் வரையவும். இந்த நாற்கரம் வட்டத்தில் அமையுமா எனப் பார்க்கவும். இதற்கு Circle through 3 Points பயன்படுத்தி நாற்கரத்தின் மூன்று உச்சிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையவும். அது நான்காவது உச்சி வழியாகச் செல்கிறதா எனப்பார்த்தால் போதும். முதலில் வரைந்த நாற்கரத்தின் உச்சிகளை மாற்றி அதனை இணைகரம், செவ்வகம், சதுரம், இருசமப்பக்க சரிவகம் என்ற வடிவங்களாக்கி உள்ளே வரும் நாற்கரத்தின் சிறப்புத் தன்மையைக் காணவும் (இதற்காக Grid பயன்படுத்தலாம்).

(6) i) படத்தில் வட்டங்கள், P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்கின்றன. இந்தப் புள்ளிகள் வழியே உள்ள இரு கோடுகள், வட்டத்தை $A, B, C,$ D என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. AC, BD என்ற கோடுகளுக்கு ஒரே நீளம் எனில், $ABDC$ வட்ட நாற்கரம் எனத் தெளிவுப்படுத்தவும்.

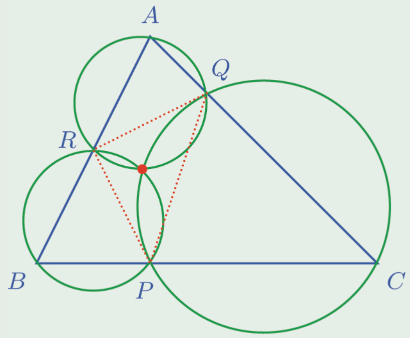


ii) படத்தில் இடதும் வலதும் உள்ள வட்டங்கள் நடுவில் உள்ள வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, S; இவற்றை இணைக்கும் கோடுகள் இடதும் வலதும் உள்ள வட்டங்களை A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. $ABDC$ வட்ட நாற்கரம் ஆகும் என நிறுவுக.

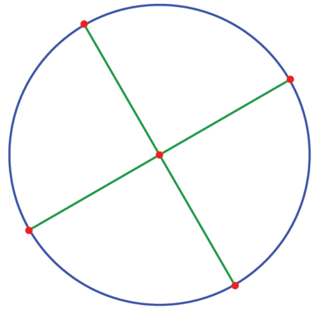


(7) படத்தில் ABC என்ற முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களில் P, Q, R அடையாளப்படுத்தி, AQR, BRP, CPQ என்ற முக்கோணங்களின் சுற்றுவட்டங்கள் வரையப் பட்டுள்ளன.

இம்மூன்று வட்டங்களும் பொதுவான ஒரு புள்ளி வழியே செல்கின்றன என நிறுவுக.



இரண்டு நாண்கள்

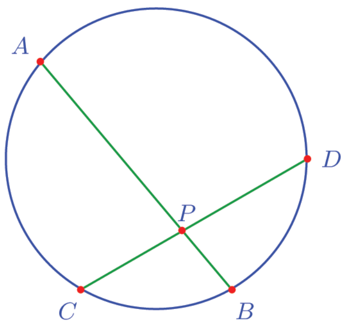


வட்டத்தில் உள்ள எந்த இரு விட்டங்களும் மையம் வழியாக வெட்டிச் செல்கின்றன.

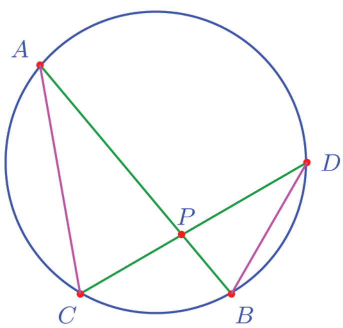
வெட்டிக் கிடைக்கும் நான்கு பாகங்களின் நீளமும் ஆரத்திற்குச் சமம் ஆகும்.

விட்டம் அல்லாத இரு நாண்கள் வட்டத்தின் உள்ளே வெட்டினால்?

படத்தைப் பார்க்கவும்.



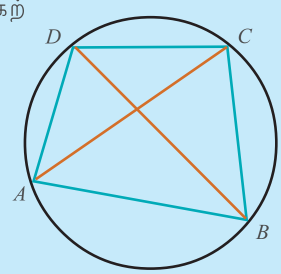
பாகங்கள் ஒன்றும் சமம் அல்ல. ஆயினும் அவற்றிற்குச் சில தொடர்புகள் உள்ளன. அதனைக் காண AC யையும் BD யையும் இணைக்கலாம்.



இப்போது BC என்ற சிறு வில், எதிர் வில்லில் A யிலும் D யிலும் உருவாக்கும் கோணங்கள் சமம் ஆகும். அதைப் போன்று AD என்ற சிறிய வில், எதிர் வில்லில் B யிலும் C யிலும் உருவாக்கும் கோணங்கள் சமம் ஆகும்.

தாலமி கோட்பாடு

வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்க ஜோடிகளின் பெருக்கற் பலனின் தொகை, மூலை விட்டங்களின் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும் எனக் காணலாம். அதாவது $ABCD$ என்ற நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் எனில்,



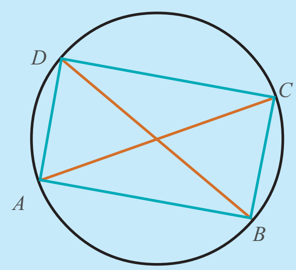
$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$

மாறாக, ஏதேனும் நாற்கரத்தில் இது சரியெனில், அந்த நாற்கரம் வட்டத்தில் அமைந்தது ஆகும். இதுவே தாலமியின் கோட்பாடு (Ptolemy's Theorem) என அறியப்படுகிறது.

செவ்வகம் வட்டத்தில் அமைந்தது அல்லவா. செவ்வகத்தில் எதிர்ப் பக்கங்கள் சமம் ஆகும். மூலைவிட்டங்களும் சமம். எனவே $ABCD$ செவ்வகம் எனில் இக்கோட்பாட்டிற்கு ஏற்ப

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

இது பைதகோரஸ் தேற்றம் அல்லவா?



அதாவது PAC, PDB என்னும் முக்கோணங்களின் கோணங்கள் அனைத்தும் சமம் ஆகும் எனவே பக்கங்களின் விகிதமும் சமம் ஆகும்.

அப்போது,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

இதைப் பெருக்கல் வடிவத்தில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

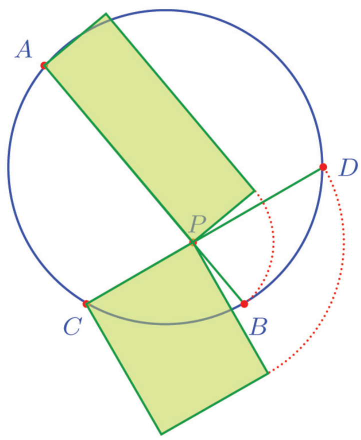
$$PA \times PB = PC \times PD$$

இதில் PA, PB என்பவை AB என்ற நாணின் பாகங்களும் PC, PD என்பவை CD என்ற நாணின் பாகங்களும் அல்லவா. அப்படியானால், இதை இவ்வாறு கூறலாம்:

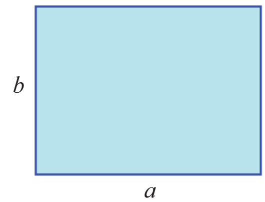
ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் வட்டத்திற்குள் வெட்டிச் செல்லும் போது, இரு நாண்களின் பாகங்களின் பெருக்கற் பலன் சமம் ஆகும்.

இரு நீளங்களின் பெருக்கற் பலனைப் பரப்பளவாகக் கூறலாம் அல்லவா. அப்படியானால் இந்தக் கோட்பாட்டை வடிவியல் முறையில் இவ்வாறு கூறலாம்:

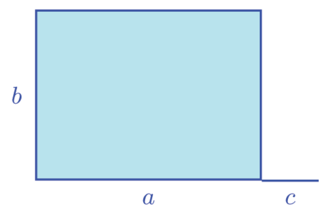
ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் வட்டத்திற்குள் வெட்டிச்செல்லும் போது, ஒவ்வொரு நாணினுடையவும் பாகங்கள் பக்கங்கள் ஆன செவ்வகங்களுக்கு ஒரே பரப்பளவு ஆகும்.



பரப்பளவுடன் தொடர்புள்ள சில கணக்குகளை இதைப் பயன்படுத்திச் செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக இந்தச் செவ்வகத்தைப் பார்ப்போம்:



இதன் நீளத்தைச் சிறிது அதிகரித்து பரப்பளவு மாறாமல் வேறு ஒரு செவ்வகம் வரைய வேண்டும்.

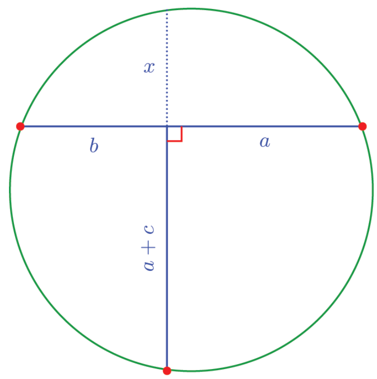


இந்தப் பிரச்சினையை இயற்கணித மொழியில் இவ்வாறு கூறலாம்.

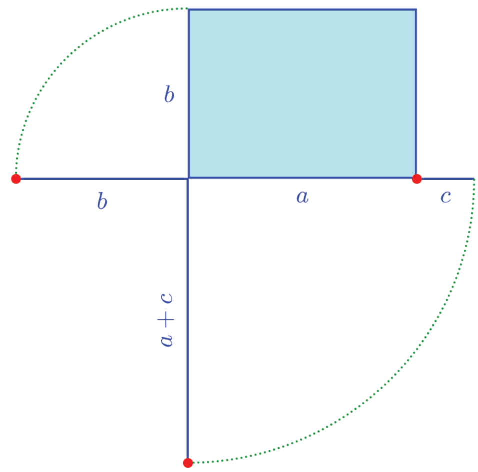
$(a+c)\,x = ab$ ஆகும் விதம் x ஐக் கண்டு பிடிக்கவும்.

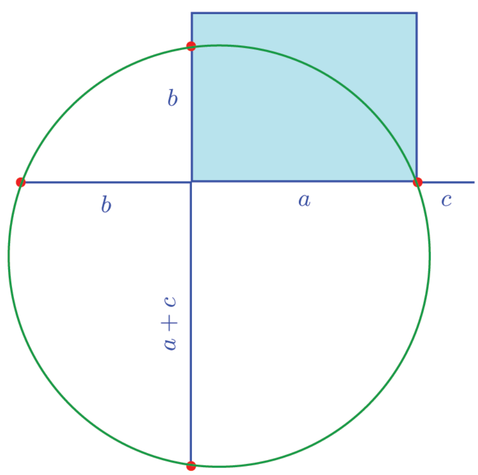
மேலே எழுதிய வடிவியல் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்?

இத்தகைய ஒரு படம் வரைந்தால் போதும்.



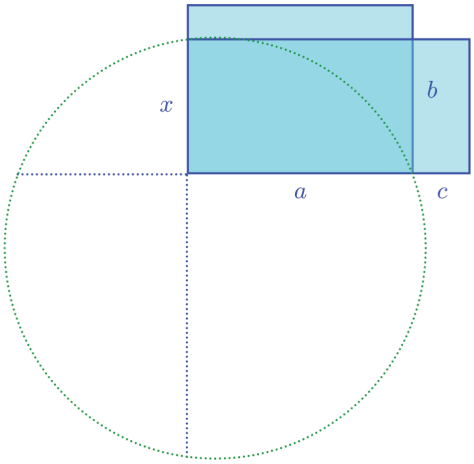
அப்போது முதலில், செவ்வகத்தின் கீழ்ப்பக்கம் b நீளத்தை இடப்பக்கமாகவும் இடப்பக்கம் $a+c$ நீளத்தைக் கீழ் நோக்கியும் நீட்டவும்.





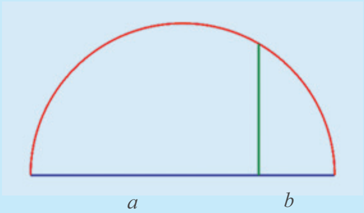
அடுத்ததாக, படத்தில் உள்ள மூன்று சிவப்பு புள்ளிகள் வழியே வட்டம் வரையவும். (முக் கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் வரைவதற்குத் தெரியும் அல்லவா)

இந்த வட்டம் செவ்வகத்தின் இடப்பக்கத்தை வெட்டிக் கிடைக்கின்ற பாகமே புதிய செவ்வகத்தின் அகலம்.



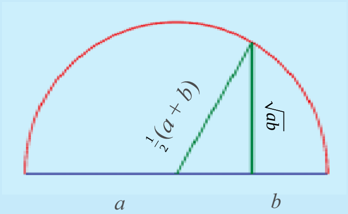
வடிவியல், இயற்கணிதம், எண்கள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் எவ்வளவு? அதை x என்று எடுத்தால் $ab = x^2$ என்றும் அவ்வாறு $x = \sqrt{ab}$ என்றும் காணலாம்.

இந்த அரைவட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு? விட்டம் $a + b$ என்பதால் ஆரம் $\frac{1}{2}(a+b)$



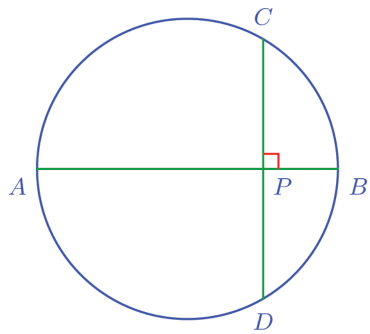
படத்தில், ஆரம் செங்குத்துக் கோட்டை விடப் பெரியது அல்லவா. இவை சமமாகின்ற சூழல்கள் உண்டா?

அப்போது என்ன கிடைத்தது?

வேறுபட்ட எந்த இரு எண்கள் a, b எடுத்தாலும்

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

நாண்களின் பாகங்களைக் குறித்துள்ள பொதுக்கோட்பாட்டின் ஒரு சிறப்புச் சூழலையும் கவனிக்க வேண்டும். கீழே உள்ள படத்தில், AB என்பது வட்டத்தின் விட்டமும், CD என்பது அதற்குச் செங்குத்தான நாணும் ஆகும்.



வட்டமையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடு நாணைச் சமப்பாகம் ஆக்குகிறது என்பதால், இங்கு $PC = PD$ ஆகும். அப்போது முன்னர் கண்ட தொடர்பு இவ்வாறாகும்.

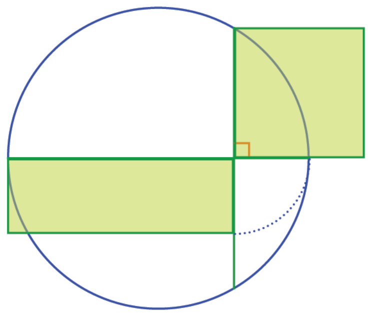
$$PA \times PB = PC^2$$

அதாவது,

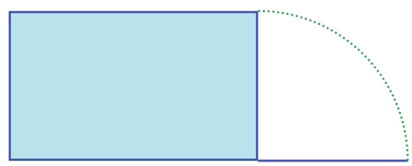
வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தை அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு நாண் வெட்டுகின்ற பாகங்களின் பெருக்கற் பலன், நாணின் பாதியின் வர்க்கம் ஆகும்.

வடிவியல் முறையில் கூறினால்?

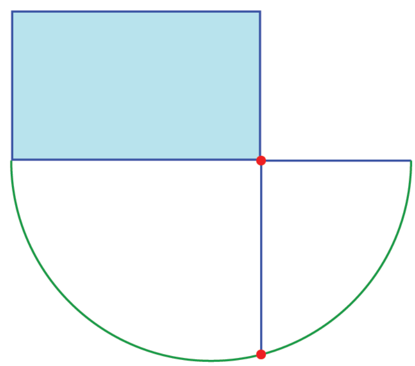
வட்டத்தில் ஒரு விட்டத்தை அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு நாண் வெட்டுகின்ற பாகங்களைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, நாணின் பாதியைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமம் ஆகும்.



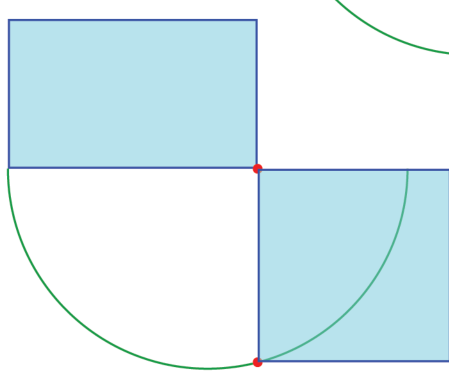
ஒரு செவ்வகத்தை அதே பரப்பளவு உள்ள சதுரமாக மாற்ற இந்தக் கோட்பாட்டைப் பயன் படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, இந்தச் செவ்வ கத்தைப் பார்க்கவும்.



இதே பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைவதற்கு, முத லில் செவ்வகத்தின் கீழே உள்ள பக்கத்தை, அகலம் சேர்த்து நீட்டவும்.



இனி, கீழே உள்ள கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு ஓர் அரைவட்டம் கீழே வரையவும். செவ்வகத்தின் வலப்பக்கத்தைக் கீழே நீட்டி, அரைவட்டத்தில் சந்திக்கின்ற புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.



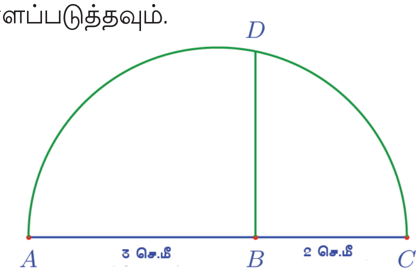
இந்தக் கோடே சதுரத்தின் பக்கம் ஆகும். (காரணம்?)

குறிப்பிட்ட பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைவதற்கும் இந்த வழிமுறையைப் பயன்படுத் தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 6 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவு உள்ள ஒரு சதுரம் வரைவது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

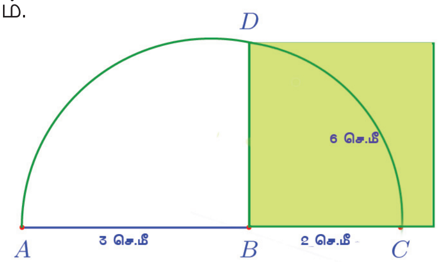
$6 = 3 \times 2$ என்பதால், பக்கங்களின் நீளங்கள் 3 சென்டிமீட்டர், 2 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைந்தால் போதும். அதற்கு இந்தச் செவ்வகம் வரைய வேண்டும் என்றில்லை. இந்த நீளத்தில் கோடுகள் வரைந்தால் போதும்.

இனி AC ஐ விட்டமாகக் கொண்டு அரைவட்டம் வரைந்து B இன் வழியே AC க்குச் செங்குத்தாக வரைகின்ற கோடு இந்த அரைவட்டத்துடன் சந்திக்கின்ற புள்ளி D அடையாளப்படுத்தவும்.



முன்னர் கண்ட கோட்பாட்டிற்கு ஏற்ப $BD^2 = AB \times BC = 6$ ஆனபடியால்,

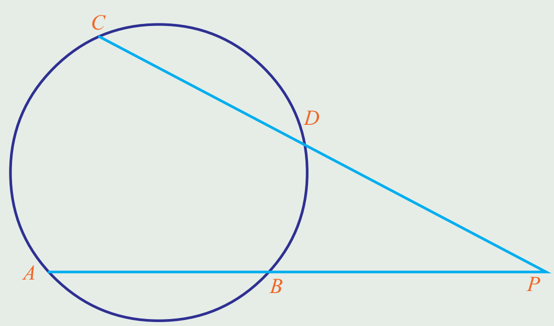
BD ஐ பக்கமாகக் கொண்டு வரைகின்ற சதுரத்தின் பரப்பளவு 6 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும்.



இங்கு BD இன் நீளம் $\sqrt{6}$ சென்டிமீட்டர் அல்லவா.

அப்போது விகிதமுறா எண் நீளமுள்ள சில கோடுகளை வரைய, இந்தக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

(1) படத்தில் வட்டத்தில் உள்ள AB, CD என்ற நாண்களை நீட்டி P என்ற புள்ளியில் சந்திக்குமாறு வரையப்பட்டுள்ளது.



i) AC, BD ஆகியவற்றை இணைத்துக் கிடைக்கின்ற APC, PBD என்ற கோணங்களின் கோணங்கள் சமம் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

ii) $PA \times PB = PC \times PD$ என நிறுவுக.

iii) $PB = PD$ எனில் நாற்கரம் $ABDC$ என்ற நாற்கரம் ஓர் இருசமபக்க சரிவகம் ஆகும் என நிறுவுக.

(2) 5 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 4 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள செவ்வகம் வரைக.

i) இதே பரப்பளவும், நீளம் 6 சென்டிமீட்டரும் ஆன செவ்வகம் வரைக.

ii) இதே பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைக.

(3) 15 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைக.

(4) 5 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவு உள்ள ஒரு சதுரத்தை மூன்று வேறுபட்ட முறைகளில் அமைக்கவும்.

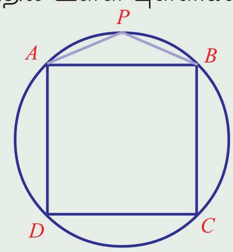
(பைதகோரஸ் கோட்பாடு நினைவில் உண்டு அல்லவா)

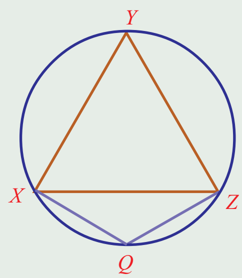
(5) பக்கங்களின் நீளம் 4, 5, 6 சென்டிமீட்டர் உள்ள முக்கோணம் வரைக. இதே பரப்பளவு உள்ள சதுரம் வரைக.

(6) 3 சென்டிமீட்டர் உயரம் உள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைக.

(7) கர்ணம் 4 சென்டிமீட்டர் உள்ள இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணம் வரைக.

(8) கீழே உள்ள படங்களில் உச்சிகள் அனைத்தும் வட்டத்தில் அமைந்த சதுரம் $ABCD$ ஆகும். இத்தகைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் XYZ ஆகும். வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகள் P, Q .





i) $\angle APB$ இன் கோண அளவு என்ன?

ii) $\angle XQZ$ இன் கோண அளவு என்ன?

ஆய்வு

- உச்சிகள் அனைத்தும் ஒரு வட்டத்திலும், பக்கங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண்களும் ஆன பலகோணத்தின் கோணங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
✶ வட்டத்தில் ஒரு வில் மையத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணத்துக்கும், வட்டத்தில் உள்ள வேறு புள்ளிகளில் உருவாக்குகின்ற கோணங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் புரிந்துகொள்ளுதல். ✶ ஒரு நாண் வட்டத்தை வெட்டும் போது ஏற்படும் இரு பாகங்களில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கோணங்கள் எல்லாம் சமம் என்றும், எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ள கோண ஜோடிகள் மிகைநிரப்பிகள் என்றும் புரிந்துகொள்ளுதல். ✶ சுற்றுவட்டம் உள்ள நாற்கரங்களைப் பகுத்தறிதல். ✶ வட்டத்தில் நாண்கள் வெட்டிச் செல்லும் போது, அந்தப் பாகங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைப் புரிந்துகொள்ளுதல். ✶ பரப்பளவு மாறாமல் ஒரு செவ்வகத்தை வேறொரு செவ்வகமாகவோ, சதுரமாகவோ மாற்ற இயலுதல்.			

3 வாய்ப்புகளின் கணிதம்

வாய்ப்புகளும் எண்களும்

ஒரு குடத்தில் பத்து முத்துக்கள் உள்ளன. ஒன்பது முத்துக்கள் கறுப்பும், ஒன்று மட்டும் வெள்ளையும். இவற்றிலிருந்து (பார்க்காமல்) ஒரு முத்தை எடுத்தால்.

பெரும்பாலும், கறுப்பாக இருக்கும் அல்லவா? வெள்ளை ஆகாது எனக் கூறவும் இயலாது.

மற்றொரு குடத்தில் எட்டு கறுப்பு முத்துக்களும் இரு வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து பார்க்காமல் ஒன்றை எடுத்தாலோ?

அப்போதும் எடுக்கப்படும் முத்து பெரும்பாலும் கறுப்பாக இருப்பதற்கே வாய்ப்பு உள்ளது. மூன்றாவதாக ஒரு குடத்தில் ஐந்து கறுப்பு முத்துக்களும் ஐந்து வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. இவற்றிலிருந்து ஒரு முத்தை எடுத்தால், அது கறுப்பாகவோ, வெள்ளையாகவோ இருக்கலாம் என்பதற்கு அப்பால் வேறொன்றும் கூறுவதற்கு இல்லை.

இவற்றை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். முதல் குடத்திலிருந்தும் இரண்டாவது குடத்திலிருந்தும் கறுப்பு கிடைப்பதற்கே வாய்ப்பு அதிகம். மூன்றாவது குடத்திலி ருந்து கறுப்பாவதற்கும் வெள்ளையாவதற்கும் ஒரே வாய்ப்பு உள்ளது.

குடத்தையும் முத்தையும் பயன்படுத்தி ஒரு விளையாட்டு விளையாடுவோம். ஒரு குடத்தில் ஐந்து கறுப்பு முத்துக்களும் ஐந்து வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. மற்றொன்றில் ஆறு கறுப்பு முத்துக்களும் நான்கு வெள்ளை முத்துக்களும் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு குடத்திலிருந்து ஒரு முத்தை எடுக்க வேண்டும். கறுப்பு எனில் வெற்றி பெறுவோம். எந்தக் குடத்திலிருந்து எடுப்பது நல்லது?

இரண்டாவது குடத்தில் கறுப்பு முத்துக்கள் அதிகம் உள்ளன. அப்போது அதிலிருந்து கறுப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு அதிகம் அல்லவா?

இரண்டாவது குடத்திலிருந்து கறுப்பு முத்தை எடுத்து ஒன்றாவது குடத்தில் போட்டால்? குடங்களின் உள்ளே உள்ளவை இவ்வாறு ஆகும்.

முதல் குடம்	:	6 கறுப்பு 5 வெள்ளை
இரண்டாவது குடம்	:	5 கறுப்பு 4 வெள்ளை

மேலும் விளையாட்டில் வெற்றிபெற எந்தக் குடத்திலிருந்து எடுப்பது நல்லது?

இப்போது முதல் குடத்தில் கறுப்பு முத்துக்கள் அதிகம், கறுப்பு கிடைப்பதற்கு உரிய அதிக வாய்ப்பும் இதில் அல்லவா?

நன்றாகச் சிந்தித்துப் பார்ப்போம். முதல் குடத்தில் மொத்தம் 11 முத்துக்கள், அதில் 6 கறுப்பு. அதாவது, மொத்த முத்துக்களில் $\frac{6}{11}$ பாகம் கறுப்பு

இரண்டாவது குடத்தில்? மொத்த முத்துக்களின் $\frac{5}{9}$ பாகம் கறுப்பு.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ இவற்றில் எது பெரியது?

$\frac{5}{9}$ அல்லவா?

அதாவது, இரண்டாவது குடத்தில் அதிகம் கறுப்பு ஆகும். அப்படியானால் இப்போதும் இரண்டாவது குடத்திலிருந்து எடுப்பது தானே நல்லது?

வேறொரு முறையில் கூறினால், இரண்டாவது குடத்திலிருந்து கறுப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு அதிகம். மேலும் ஆழ்ந்து சிந்தித்தால், முதலாவது குடத்திலிருந்து கறுப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரியவாய்ப்பு $\frac{6}{11}$, இரண்டாவது குடத்திலிருந்து கறுப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{5}{9}$ எனக் கூறலாம்.

வெள்ளை முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்போ? முதல் குடத்திலிருந்து $\frac{5}{11}$, இரண்டாவது குடத்திலிருந்து $\frac{4}{9}$; இவற்றில் எது பெரியது? அப்போது வெள்ளை முத்துக்கள் கிடைத்தால், வெற்றி எனில், எந்தக் குடத்திலிருந்து எடுப்பது நல்லது? இந்தக் கணக்கில் அனைத்து வாய்ப்புகளையும் இவ்வாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

		முதல் குடம்		இரண்டாவது குடம்	
		கறுப்பு	வெள்ளை	கறுப்பு	வெள்ளை
முன்னர்	எண்ணிக்கை	5	5	6	4
	வாய்ப்பு	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
பின்னர்	எண்ணிக்கை	6	5	5	4
	வாய்ப்பு	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ஒரு வினா எழுப்பலாம். தொடக்கத்திலும் முத்துக்கள் மாற்றிப் போட்ட பின்னரும் இரண்டாவது குடத்தில்தான் கறுப்பு முத்துக்கள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்புகள் அதிகம் எனக் கண்டோம்.

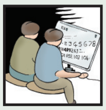
இந்த வாய்ப்பு முன்னரா, பின்னரா கூடுதல்?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

1 முதல் 25 வரையுள்ள எண்களில் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டில் எழுதப்பட்டு, ஒரு பெட்டியில் போடப்பட்டது. இதிலிருந்து ஒரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால், காகிதத்துண்டில் உள்ள எண் இரட்டை எண்ணாகக் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

மொத்தம் உள்ள 25 எண்களில் 13 எண்கள் ஒற்றையும், 12 எண்கள் இரட்டையும் அல்லவா? அப்போது இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{12}{25}$

ஒற்றை எண் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு? இந்தப் பெட்டியிலிருந்து மூன்றின் மடங்குகள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? ஆறின் மடங்கோ?



(1) ஒரு பெட்டியில் 6 கறுப்புப் பந்துகளும், 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. இதிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது கறுப்புப் பந்தாகக் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? வெள்ளை கிடைப்பதற்கு?

(2) ஒரு பையில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 7 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. வேறொரு பையில் 8 சிவப்புப் பந்துகளும், 7 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன.

i) முதல் பையிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது சிவப்பு ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

ii) இரண்டாவது பையிலிருந்து எடுத்தால்?

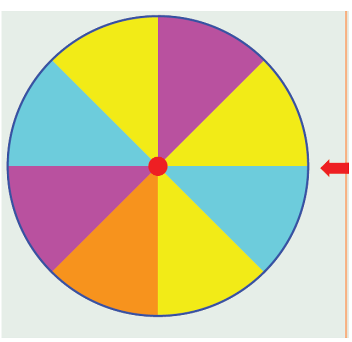
iii) இரு பைகளில் உள்ள பந்துகளையும் ஒரு பையில் போடவும். அவற்றிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுத்தால், அது சிவப்பு ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(3) ஒருவரிடம் ஓர் இரண்டிலக்க எண்ணைச் சொல்லுமாறு கேட்கப்படுகிறது. சொல்லும் எண் முழுவர்க்கம் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(4) ஒன்று முதல் ஐம்பது வரையுள்ள எண்ணல் எண்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டில் எழுதப்பட்டு, ஒரு பெட்டியில் போடப்பட்டது. இவற்றிலிருந்து ஒரு காகிதத்துண்டை எடுக்க வேண்டும். அதன் முன்னர் கிடைக்கப்போகும் எண் பகா எண்ணாக, ஐந்தின் மடங்காகக் கிடைப் பதற்கு உரிய வாய்ப்பை ஓர் ஊகத்தில் சொல்ல வேண்டும். ஊகமாக எதைச் சொல்வது நல்லது? எதனால்?

(5) ஒரு பையில் 3 சிவப்பு முத்துக்களும், 7 பச்சை முத்துக்களும் உள்ளன. வேறொரு பையில் சிவப்பு முத்துக்களும் பச்சைமுத்துக்களும் ஒன்று வீதம் அதிகமாக உள்ளன. சிவப்பு முத்து கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு எந்தப் பையிலிருந்து எடுக்கும் போது அதிகமாக உள்ளது?

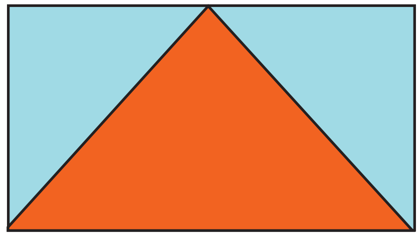
வடிவியல் வாய்ப்பு



ஒரு பலகையில் பல நிறங்கள் உள்ள ஒரு வட்டம் சுழல்வதற்கு ஏற்றவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

வட்டம் சுழன்று நிற்கும் போது, பலகையின் அம்புக்குறிக்கு நேராக மஞ்சள் நிறம் வருவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? வட்டம் சுழன்று நிற்கும் போது அம்புக்குறிக்கு நேராக வட்டத்தின் எட்டுப் பாகங்களில் எதுவும் வரலாம். அதன் எண்ணிக்கையில் மூன்று மஞ்சள் ஆகும். அப்போது மஞ்சள் வருவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{3}{8}$.

இதைப்போன்று பிற நிறங்கள் ஒவ்வொன்றும் வருவதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.



வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம். கட்டிக் காகிதத்தில் ஒரு செவ்வகத்தை வெட்டி எடுத்து, அதன் ஒரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் எதிர்ப்பக்கத்தின் முனைப்புள்ளிகளையும் சேர்த்து முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.

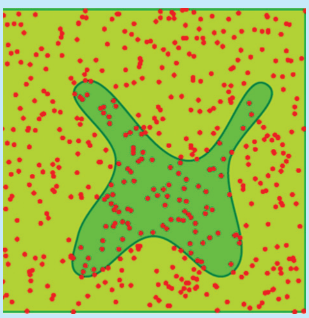
இந்தச் செவ்வகத்தில் கண்களை மூடிக்கொண்டு ஒரு புள்ளியை வைத்தால், அது சிவப்பு முக்கோணத்தினுள் அமைவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

முக்கோணத்திற்கும் செவ்வகத்திற்கும் ஒரே அடிப்பக்கமும் ஒரே உயரமும் அல்லவா? அப்போது முக்கோணம் செவ்வகத்தின் பாதி ஆகும்.

அதாவது, முக்கோணத்தின் பரப்பளவு செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{2}$ பாகம் ஆகும். புள்ளி முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

பரப்பளவும் வாய்ப்பும்

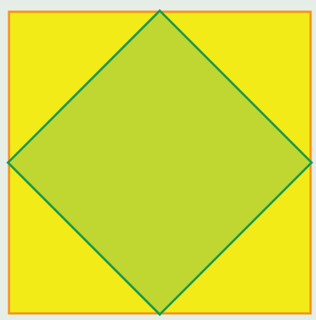
சிக்கலான வடிவங்களின் பரப்பளவைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்க வாய்ப்புகளின் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட சதுரத்தினுள் இந்த வடிவத்தை வரையவும். பின்னர் திட்டமிட்ட வரிசையோ முறையோ இல்லாமல் படத்தில் புள்ளிகள் போடவும்.



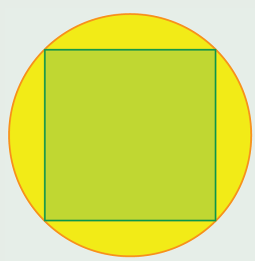
நமக்குத் தேவையான வடிவத்தின் உள்ளே வீழ்ந்த புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை, மொத்தப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கும் எண், இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவைச் சதுரத்தின் பரப்பளவைக் கொண்டு வகுத்துக் கிடைக்கின்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமாக இருக்கும். புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரித்தால் இது மேலும் துல்லியமாக அமையும். இந்த வடிவியல் செயலையும் எண்களின் செயலையும் கணினியைப் பயன்படுத்தி விரைவாகச் செய்யலாம். இதற்கு கார்லோ (Monte Carlo method) முறை எனப் பெயர் உள்ளது.

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் பச்சை நிறப்பாகத்தின் விளக்கம் கூறப்பட்டுள்ளது. படத்தில் கண்ணை மூடிக்கொண்டு ஒரு புள்ளி வைத்தால், அது பச்சைநிறத்தினுள் அமைவதற்கான வாய்ப்பைக் கணக்கிடுக.

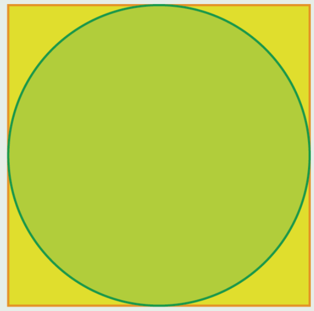
(1) ஒரு சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் இணைத்துள்ள சதுரம்.



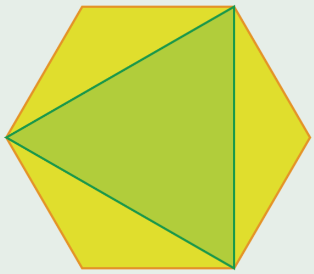
(2) எல்லா உச்சிகளும் ஒரு வட்டத்தில் வருமாறு வரைந்த சதுரம்.



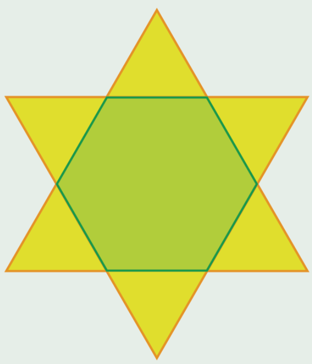
(3) ஒரு சதுரத்தின் உள்ளே சரியாகப் பொருந்தும் வட்டம்.



(4) ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் ஒன்றிடைவிட்டு உச்சிகளைச் சேர்த்து வரைந்த முக்கோணம்.

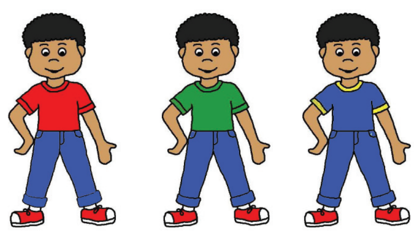


(5) இரு சமபக்க முக்கோணங்களின் இடையே உருவாகும் ஒழுங்கு அறுகோணம்.

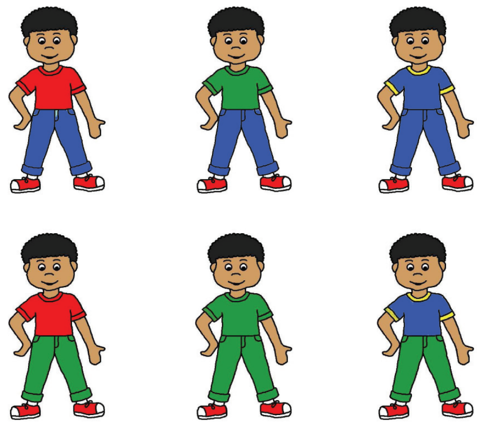


ஜோடிகள்

துவைத்து இஸ்திரி போட்டவற்றைப் பார்த்தபோது, ஜோணிக்கு ஒரு நீலநிறக் கால்சட்டையும், சிவப்பு, பச்சை, நீலம் என மூன்று நிறங்களில் மூன்று சட்டைகளும் கிடைத்தன. எவ்வாறு ஆடை அணியலாம் என்று ஜோணி சிந்தித்தான்.



மீண்டும் ஒரு முறை தேடியபோது ஒரு பச்சை நிறக் கால்சட்டையும் கிடைத்தது. ஆகவே, இதை ஒவ்வொரு சட்டையுடன், மூன்று முறைகளில் அணியலாம் அல்லவா என்று ஜோணி கணக்கிட்டான்.



இதுபோன்று ஆறு வேறுபட்ட முறைகளில் ஜோணிக்கு அணியலாம். இவற்றில் கால்சட்டைகளும் சட்டைகளும் ஒரே நிறத்தில் எத்தனை முறை அமையும்?

அப்போது ஜோணி, ஒரே நிறத்தில் சட்டையும், கால்சட்டையும் அணிவதற்கு உரிய வாய்ப்புகள் எத்தனை?

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ அல்லவா?}$$

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம். ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என இவ்வாறு எண்கள் எழுதிய நான்கு காகிதத்துண்டுகளும், வேறொரு பெட்டியில் 1, 2 என்று எண்கள் எழுதிய இரு காகிதத் துண்டுகளும் உள்ளன. இரண்டிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத் துண்டை எடுத்தால் கிடைக்கக் கூடிய எண் ஜோடிகள் எவை?

முதல் பெட்டியிலிருந்து 1 என எடுத்தால், இரண்டாவது பெட்டியில் 1, 2 என ஒவ்வொன்றையும் எடுத்துச் சேர்த்து இரண்டு ஜோடிகள், இவற்றை (1, 1), (1, 2) என எழுதலாம்.

இதைப்போன்று முதல் பெட்டியிலிருந்து ஒவ்வொரு எண்ணையும் எடுத்தால், கிடைக்கக் கூடிய எண் ஜோடிகள் அனைத்தையும் எழுதினால்?

(1, 1) , (1, 2)

(2, 1) , (2, 2)

(3, 1) , (3, 2)

(4, 1) , (4, 2)

மொத்தம் 8 ஜோடிகள்

ஒரு பிரச்சினை

புகழ்பெற்ற அறிவியல் அறிஞர் கலிலியோ, சூதாட்டம் விளையாடும் நண்பர்கள் எழுப்பிய பிரச்சினையைக் குறித்துக் கூறுகிறார். மூன்று பகடைகளை ஒன்றாக உருட்டும் போது தொகையாக 9 கிடைப்பதும், 10 கிடைப்பதும் ஆறு விதங்களில் ஆகும் என்று அவர் கணக்கிட்டார்.

	9	10
1.	1 + 2 + 6	1 + 3 + 6
2.	1 + 3 + 5	1 + 4 + 5
3.	1 + 4 + 4	2 + 2 + 6
4.	2 + 2 + 5	2 + 3 + 5
5.	2 + 3 + 4	2 + 4 + 4
6.	3 + 3 + 3	3 + 3 + 4

ஆனால் நடைமுறையில் 10 என்பது 9 ஐவிடக் கூடுதலாக வருகிறது. இது எதனால் என்பதே வினா.

இதில் 1, 2, 6 என எடுத்திருப்பது, ஏதோ ஒரு பகடையில் 1, மற்றொன்றில் 2, மூன்றாவதில் 6 என்று அல்லவா. இதற்குப் பதிலாக முதல் பகடையில் 1, இரண்டாவது பகடையில் 2, மூன்றாவது பகடையில் 6 என்பதை மட்டும் (1, 2, 6) என்ற மும்மை பயன்படுத்திக் குறிப்பிடுக.முதல் பகடையில் 1, இரண்டாவது பகடையில் 6, மூன்றாவது பகடையில் 2 என்பது(1,6,2) என்ற மும்மை பயன்படுத்திக் குறிப்பிடுக. முதல் பகடையில் 1, இரண்டாவது பகடையில் 6, மூன்றாவது பகடையில் 2 என்பதை (1, 6, 2) என்ற மும்மை பயன்படுத்தி குறிப்பிடுக. (1,2,6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) என்ற ஆறு வித்தியாசமான மும்மைகள் 9 தொகையாகக் கிடைக்கின்ற முறையில் எடுக்கவேண்டும் என்பதே கலிலியோவின் விடை. மற்றுள்ள மும்மைகளையும் விவரித்து எழுதினால் 9 கிடைப்பது 25 முறைகளிலும், 10 கிடைப்பது 25 முறைகளிலும் ஆகும் என்று கலிலியோ தெளிவுபடுத்தினார். (செய்து பார்க்கவும்.)

இதில் இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆகும் எண்ணிக்கை என்ன?

(1, 1), (3, 1) என்ற இரு ஜோடிகளில் மட்டும் அல்லவா? அப்போது இந்த இரு பெட்டிகளிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டை எடுத்தால், இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

இதைப்போன்று இரண்டும் இரட்டை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிடலாமா? ஏதேனும் ஓர் எண் ஒற்றையும், மற்ற எண் இரட்டையும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்போ? இரண்டும் ஒரே எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்போ?

(1) ரஜனிக்குப் பச்சை, நீலம், சிவப்பு நிறங்களில் கல் மாலைகளும், கம்மல்களும் உள்ளன. எத்தனை முறைகளில் ரஜனிக்கு மாலையும், கம்மலும் அணியலாம்? ஒரு நாளில் ரஜனி ஒரே நிறமுள்ள மாலையும், கம்மலும் அணிவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? வித்தியாசமான நிறம் உள்ளவையோ?

(2) ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என எண்கள் எழுதிய நான்கு காகிதத் துண்டுகளும், வேறொரு பெட்டியில் 1, 2 என எழுதிய இரு காகிதத் துண்டுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத் துண்டை எடுத்தால், கிடைக்கும் எண்களின் தொகை ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? தொகை இரட்டை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு?

(3) ஒரு பெட்டியில் 1, 2, 3, 4 என எண்கள் எழுதிய நான்கு காகிதத் துண்டுகளும், வேறொரு பெட்டியில் 1, 2, 3 என எழுதிய மூன்று காகிதத் துண்டுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒரு காகிதத் துண்டை எடுத்தால், கிடைக்கும் எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன? பெருக்கற்பலன் இரட்டை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(4) இலக்கங்கள் இரண்டும் 1, 2, 3 என இவற்றில் ஏதேனும் வருகின்ற இரண்டிலக்க எண்களில் ஒன்றை எடுத்தால்,

i) இலக்கங்கள் இரண்டும் சமம் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

ii) இலக்கங்களின் தொகை 4 ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(5) இரண்டு நபர்களின் இடையே நடைபெறும் ஒரு விளையாட்டு, ஒவ்வொருவரும் ஒற்றை எண் வேண்டுமா, இரட்டை எண் வேண்டுமா என முடிவு செய்ய வேண்டும். இருவரும் ஒரு கையில் ஒரு சில விரல்களை ஒன்றாக உயர்த்துகின்றனர். மொத்த விரல்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண் எனில், அதை முதலில் எடுத்த நபர் வெற்றி பெறுவர். இரட்டை எண் எனில், அதை முதலில் எடுத்த நபரும். இந்த விளையாட்டில் முதலில் ஒற்றை எண் எடுப்பதா, இரட்டை எண் எடுப்பதா நல்லது?

கூடுதல் ஜோடிகள்

மீண்டும் இரு பெட்டிகள். ஒன்றில் 1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்ணல் எண்கள் எழுதிய பத்துக் காகிதத்துண்டுகள், இரண்டாவதில் 1 முதல் 5 வரையுள்ள எண்கள் எழுதிய ஐந்து காகிதத்துண்டுகள், வழக்கம்போல் இரண்டிலிருந்தும் ஒவ்வொரு காகிதத்துண்டு எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டும் ஒற்றை எண் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

விடை கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய வழிமுறை எளிதானது. மொத்தம் எத்தனை எண்ஜோடிகள் கிடைப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு உள்ளன என்று கணக்கிடுக. அவற்றில் நமக்குத் தேவையான முறையில் இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆகின்றவை எத்தனை எனப் பார்க்கவும். இரண்டாவதாகக் கிடைத்த எண்ணை முதலில் கிடைத்த எண்ணால் வகுத்தால் போதும்.

வாய்ப்பும் நிகழ்வெண்ணும்

சாதாரணமாக ஒரு நாணயத்தை பலமுறை போடும் போது, தலையோ பூவோ விழுவதன் எண்ணிக்கை ஏறத்தாழ சமமாக இருக்கும், ஆனால் நாணயத்தை உருவாக்கிய குறைபாடு கொண்டோ வேறு ஏதேனும் காரணங்களினாலோ சில நேரங்களில் தலை பக்கம் விழுவதற்கு உரிய வாய்ப்புகள் அதிகம் எனவும் வரலாம், இதை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பீர்கள்!

நாணயத்தை மீண்டும் மீண்டும் போடும் போது ஒவ்வொரு பக்கமும் வீழ்வதன் எண்ணிக்கை, பாதியிலிருந்து மிக அதிக அளவில் வேறுபட்டுக் காணப்பட்டாலே இத்தகைய ஓர் ஐயம் ஏற்பட வேண்டும். அப்போது அதிக முறை போட்டு ஒவ்வொரு பக்கமும் வீழ்வதன் தொகையை வெவ்வேறாக அட்டவணைப்படுத்துவதே முறையாக உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக இந்த அட்டவணையைப் பார்க்கவும்.

போடுதல்	தலை	பூ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

இதிலிருந்து தலையின் வாய்ப்பு 0.6 என்றும் பூவின் வாய்ப்பு 0.4 என்றும் எடுப்பதே. இரண்டையும் 0.5 எடுப்பதை விடச் சரி என்பதைக் காணலாம் அல்லவா? இத்தகைய கணக்குக் கூட்டல்கள் மிகத் துல்லியமாக ஆவதற்கு உரிய கணிதமுறைகளை நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு (Probability theory) என்ற கணிதப் பிரிவின் தொடர்ந்துள்ள கற்றலில் காணலாம்.

சொல்வதைப் போன்று செய்வது எளிதானதா? எல்லா எண் ஜோடிகளையும் எழுதி எண்ணுவது அவ்வளவு ஆர்வம் மிக்கப் பணி அல்ல.

சிந்தித்துப் பார்ப்போம். முதல் எண் பத்து வரையிலான ஏதேனும் ஒன்றாகும். இரண்டாவது எண் ஐந்து வரையிலான ஏதேனும் ஒன்றும். அப்போது முதல் எண் 1 ஆகின்ற எத்தனை ஜோடிகள் உள்ளன? முதல் எண் 2 ஆகின்ற ஜோடிகளோ?

சுருங்கக்கூறின், முதல் எண்ணை உறுதிப்படுத்திவிட்டால், இரண்டாவது எண்ணை மாற்றி 5 ஜோடிகள் உருவாக்கலாம். முதல் எண் 10 முறைகளில் ஆகலாம். அப்போது மொத்த எண்ஜோடிகளை இவ்வாறு நினைத்துக் கொள்ளலாம்.

◄ . . . . 5 எண்ணிக்கை . . ►

10 எண்ணிக்கை				
	(1, 1)	(1, 2)	...	(1, 5)
	(2, 1)	(2, 2)	...	(2, 5)
	...	...	...	...
	...	...	...	...
	(10, 1)	(10, 2)	...	(10, 5)

இந்த 50 ஜோடிகளில் இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் ஆகின்றவை எத்தனை? அதற்கு முதல் எண் 1, 3, 5, 7, 9 என 5 எண்களில் ஒன்றாகும். இரண்டாவது எண் 1, 3, 5 என்ற மூன்று எண்களில் ஒன்றும், முதல் 5 எண்கள் ஒவ்வொன்றினோடும் இரண்டாவது 3 எண்கள் ஒவ்வொன்றைச் சேர்த்து மொத்தம் எத்தனை ஜோடிகள் உண்டாக்கலாம்?

5×3 அல்லவா? (வேண்டுமெனில் நிரையும் நிரலுமாகக் கற்பனை செய்க) அப்போது இந்தப் பெட்டிகளிலிருந்து இரண்டிலும் ஒற்றை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$. இதைப்போன்று இரண்டிலும் இரட்டை எண்கள் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பையும், ஒன்று ஒற்றையும் மற்றது இரட்டையும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பையும் கண்டுபிடிக்கலாமா?

மேலும் ஒரு கணக்கு. ஒரு கூடையில் 50 மாங்காய்கள் உள்ளன. அந்த எண்ணிக்கையில் 20 பழுக்கவில்லை. வேறொரு கூடையில் 40 மாங்காய்கள் உள்ளன. அந்த எண்ணிக்கையில் 15 பழுக்கவில்லை. ஒவ்வொரு கூடையிலிருந்தும் ஒரு மாங்காய் எடுத்தால் இரண்டிலும் பழுத்தவை ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

ஒவ்வொரு கூடையிலிருந்தும் ஒரு மாங்காய் வீதம் எத்தனை வேறுபட்ட முறைகளில் எடுக்கலாம்? (வேண்டுமானால் ஒவ்வொரு கூடையிலும் உள்ள மாங்காய்கள் வரிசைகளிலாக அடுக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கற்பனை செய்வோம். இவை அனைத்திலும் ஒவ்வொரு எண் எழுதப் பட்டிருப்பதாகவும் கற்பனை செய்வோம்)

அப்போது மொத்தம் இரண்டு மாங்காய்கள் எடுப்பது $50 \times 40 = 2000$ முறைகளில் ஆகும். இவற்றில் இரண்டும் பழுத்துள்ளன. எத்தனை ஜோடிகள்? முதல் கூடையில், $50 - 20 = 30$ பழுத்த மாம்பழங்கள் உள்ளன. இரண்டாவது கூடையில் $40 - 15 = 25$ பழுத்துள்ளன.

முதல் கூடையில் உள்ள ஒவ்வொரு பழுத்த மாம்பழத்தையும் இரண்டாவது கூடையில் உள்ள ஒவ்வொரு பழுத்த மாம்பழத்துடன் ஜோடி ஆக்கினால் மொத்தம் $30 \times 25 = 750$ ஜோடி. அப்போது இரண்டிலும் பழுத்தவைக்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$. இதைப்போன்று இரண்டிலும் பழுக்காதவைக்கு உரிய வாய்ப்பைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்.

ஒன்றாவது பழுப்பதற்கு உரிய வாய்ப்பு எத்தனை?

ஒன்றாவது பழுக்க வேண்டுமெனில் ஒரு பழுத்ததும், ஒரு பழுக்காததும். மேலும் இரண்டும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்புகளும் உள்ளன. இவற்றில் ஒன்று பழுத்தது என்பது இரு முறைகளில் கிடைக்கும்;

முதலில் உள்ளது பழுத்தது, இரண்டாவதில் உள்ளது பழுக்காதது. அல்லது,

முதலில் உள்ளது பழுக்காதது, இரண்டாவதில் உள்ளது பழுத்தது.

அதாவது, ஒன்று மட்டும் பழுத்த ஜோடிகள் மொத்தம்

$$(30 \times 15) + (20 \times 25) = 450 + 500$$
$$= 950$$

இரண்டிலும் பழுத்தவை 750 ஜோடிகள் என்று கண்டுபிடித்துள்ளோம்.

நிலையற்றதன் அளவு

நாட்காட்டியில் ஒவ்வொரு நாளும் சூரியன் உதிக்கும் நேரமும், மறையும் நேரமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதைக் கவனித்திருக்கிறீர்களா? மிகச்சரியான சில கணித விதிகளுக்கு ஏற்ப பூமியும், சூரியனும் எல்லாம் வலம் வருவதாலேயே இதைக் கணக்கிட முடிகிறது.

இதைப் போன்று மழைக்காலமும், வெயில் காலமும் எந்த மாநிலங்களில் வருகின்றன என்று கணக்கிடலாம். ஆனால் வெயில் காலத்தில் திடீரென்று மழை வருவதை முன்னரே கணக்கிட இயலாமலும் போகலாம். மழைக்கு உரிய காரணிகளின் பெருக்கமும் அவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்புகளின் சிக்கலுமே இத்தகைய தொலை நோக்குக் கூற்றைத் தவறாக்குகின்றது.

சூழல்களின் கணிதம் சார்ந்த பகுப்பாய்வு மூலம் வாய்ப்புகளைக் கணக்கீடு செய்யலாம்.

அதனாலேயே அன்றாட வளிமண்டலத்தின் தன்மையைக் குறித்துள்ள தொலை நோக்குக் கூற்றுக்கள் சுட்டும் வாய்ப்புகள் எதிர்பாராத சூழல்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களால் சில வேளைகளில் தொலைநோக்கு கூற்றுக்களை தவறாக்குகின்றன.

எந்த ஓர் அறிவியல் சார் அடிப்படையும் இல்லாமல் சரியானவை அறிவிக்கப்படும் தொலைநோக்குக் கூற்றுகளைவிட இத்தகைய வாய்ப்புக் கூற்றுகளுக்கு நம்பிக்கை கூடுவதாக உள்ளது என்பதைச் சரியாகக் கவனித்தால் அறியவும் முடிகிறது.

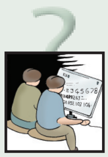
இரண்டையும் எடுத்தால் ஒன்றேனும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு

$$950 + 750 = 1700$$

$\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ என்று கணக்கிடலாம் .

இதையே, இங்கேயும் சிந்திக்கலாம். ஒன்றேனும் பழுத்ததாக இருக்குமெனில் இரண்டும் பழுக்காமல் இருக்க முடியாது. மொத்த வாய்ப்பு 2000 ஜோடிகளில் இரண்டும் பழுக்காமல் உள்ளவை $20 \times 15 = 300$ அல்லவா.

மீதம் உள்ளவை $2000 - 300 = 1700$ ஜோடிகளில் ஒன்றேனும் பழுத்ததாக இருக்க வேண்டும். அதாவது ஒன்றேனும் பழுத்தது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$.



(1) 10 A வகுப்பில் 30 மாணவர்களும், 20 மாணவிகளும் உள்ளனர். 10 B வகுப்பில் 15 மாணவர்களும், 25 மாணவிகளும் உள்ளனர். ஒவ்வொரு வகுப்பிலிருந்தும் ஒரு மாணவரையோ ஒரு மாணவியையோ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

- i) இரண்டிலும் மாணவியர் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?
- ii) இரண்டிலும் மாணவர் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?
- iii) ஒரு மாணவரும், ஒரு மாணவியும் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?
- iv) ஒரு மாணவர் ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

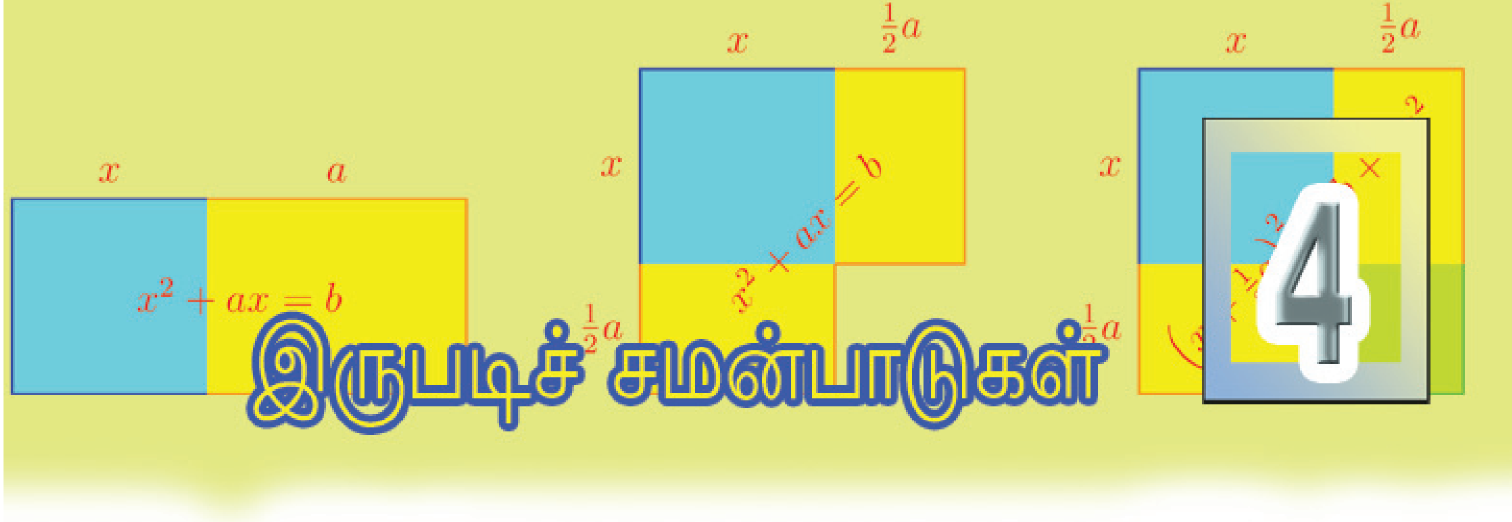
(2) ஒருவரிடம் ஓர் இரண்டிலக்க எண் கூறும்படிச் சொல்லவும்.

- i) இதில் இரண்டு இலக்கங்களும் சமம் ஆக வாய்ப்பு எவ்வளவு?
- ii) முதல் இலக்கம், இரண்டாவது இலக்கத்தைவிடப் பெரியது ஆவதற்கான வாய்ப்புகள் என்ன?
- iii) முதல் இலக்கம், இரண்டாவது இலக்கத்தைவிடச் சிறியது ஆவதற்கு உரிய வாய்ப்பு என்ன?

(3) 1 முதல் 6 வரையுள்ள எண்கள் எழுதிய இரு பகடைகள் ஒன்றாக உருட்டப்படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கும் எண்களின் தொகை எந்த எண்கள் ஆகும்? மிக அதிகமாக வாய்ப்புள்ள தொகை என்ன?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ வாய்ப்பை எண்களாக விளக்குதல். ⌘ வெவ்வேறு சூழல்களில் வாய்ப்பைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறைகளை விளக்குதல். ⌘ நடைமுறைச் சூழல்களில் வாய்ப்பை எண் சார்ந்து பகுப்பாய்வு செய்வதன் அவசியத்தை நிறுவுதல்.			



4 இருபடிச் சமன்பாடுகள்

வர்க்க பிரச்சினைகள்

ஒரு கணக்கிலிருந்து தொடங்கலாம்:

> ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் 1 மீட்டர் கூட்டி, பெரியது ஆக்கிய போது சுற்றளவு 36 மீட்டர் ஆயிற்று. முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் எத்தனையாக இருந்தது?

சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $36 \div 4 = 9$ மீட்டர். அப்போது பழைய சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $9 - 1 = 8$ மீட்டர் என்று எளிதாகக் காணலாம்.

வினா இப்படியானால்?

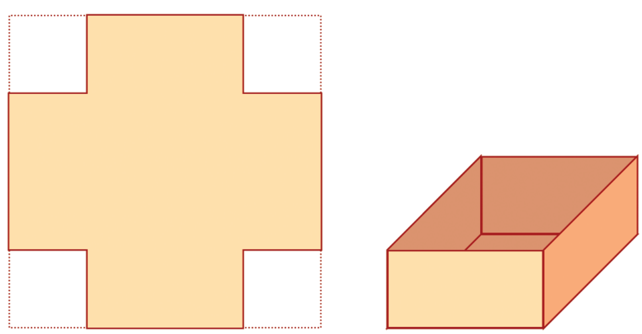
> ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களிலும் 1 மீட்டர் அதிகரித்த போது, பரப்பளவு 36 சதுர மீட்டர் ஆயிற்று. முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் எவ்வளவு?

புதிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

$\sqrt{36} = 6$ மீட்டர் அல்லவா?

அப்போது முதல் சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் $6 - 1 = 5$ மீட்டர்

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்ப்போம்

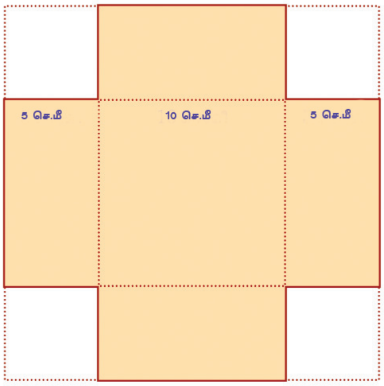


சதுர வடிவில் உள்ள கட்டிக் காகிதத்தின் நான்கு மூலைகளிலிருந்தும் ஒவ்வொரு சிறிய சதுரங்களை வெட்டி எடுத்து, மீதி உள்ள பாகத்தை மேல்நோக்கி மடித்து ஒரு பெட்டியை உருவாக்க வேண்டும்.

பெட்டியின் உயரம் 5 சென்டி மீட்டரும், கொள்ளளவு $\frac{1}{2}$ லிட்டரும் ஆக இருக்க வேண்டும். முதலில் எடுக்க வேண்டிய சதுரத்தின் பக்க நீளம் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும் ?

பெட்டியின் கொள்ளளவு என்பது அடிப்பக்கப் பரப்பளவிற்கும் அதன் உயரத்திற்கும் உள்ள பெருக்கற் பலன் அல்லவா. இந்தக் கணக்கில் கொள்ளளவு $\frac{1}{2}$லிட்டர் ஆகும். அதாவது, 500 கன சென்டிமீட்டர், உயரம் 5 சென்டிமீட்டர்.

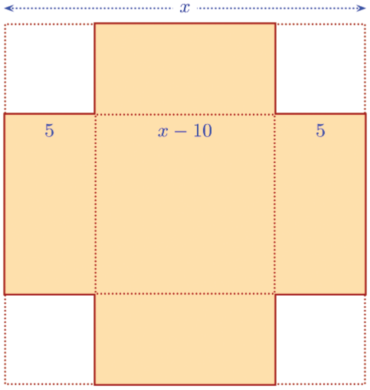
அப்போது பெட்டியின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு $500 \div 5 = 100$ சதுர சென்டிமீட்டர் அடிப்பக்கம் ஒரு சதுரம் ஆனதால் (காரணம்) அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 சென்டிமீட்டர்.



முதல் சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலிருந்தும் $2 \times 5 = 10$ சென்டிமீட்டர். குறைத்தே இந்தச் சதுரம் கிடைத்தது.

அப்போது முதல் சதுரத்தின் பக்கம் $10 + 10 = 20$ சென்டிமீட்டர்

இவ்வாறு பின்னோக்கிச் சிந்திப்பதற்குப் பதிலாக நேராகச் சிந்தித்து பிரச்சினையை இயற்கணித வடிவில் ஆக்கலாம். முதல் சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் x சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால் பெட்டியின் அடிப்பக்கம் $(x - 10)$ சென்டிமீட்டர் பக்கம் உள்ள சதுரம் ஆகும்.



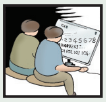
பெட்டியின் உயரம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், கொள்ளளவு $5\,(x - 10)^2$ கன சென்டிமீட்டர்.

அப்போது கணக்கின் இயற்கணித வடிவம் இவ்வாறாகும்.

$5\,(x - 10)^2 = 500$ ஆக வேண்டுமெனில், x என்ற எண் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

தொடர்ச்சியாக இப்படிப் பின்னோக்கிச் சிந்திக்கலாம்:

- $5(x-10)^2 = 500$ ஆக வேண்டுமெனில், $(x-10)^2 = 500 \div 5 = 100$ ஆக வேண்டும்.
- $(x-10)^2 = 100$ ஆக வேண்டுமெனில், $x - 10 = \sqrt{100} = 10$ ஆக வேண்டும்.
- $x - 10 = 10$ ஆக வேண்டுமெனில், $x = 10 + 10 = 20$ ஆக வேண்டும்.



இந்தக் கணக்குகளை இயற்கணிதத்தில் ஆக்கியோ அல்லாமலோ செய்யவும்.

(1) ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களையும் 2 மீட்டர் குறைத்துச் சிறியது ஆக்கிய போது பரப்பளவு 49 சதுர மீட்டர் ஆனது. முதலில் உள்ள சதுரத்தின், பக்கங்களின் நீளம் எத்தனை மீட்டராக இருந்தது?

(2) சதுர வடிவில் அமைந்துள்ள ஒரு மைதானத்தைச் சுற்றிலும் 2 மீட்டர் அகலத்தில் ஒரு பாதை உண்டு. மைதானமும் பாதையும் சேர்ந்த சதுரப் பரப்பளவு 1225 சதுர மீட்டர் ஆகும். மைதானத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) 2, 5, 8, ... எனத் தொடர்கின்ற கூட்டுத்தொடரின் எத்தனையாவது உறுப்பின் வர்க்கம் 2500?

(4) ஆண்டிற்கு ஒரு முறை கூட்டுவட்டி கணக்கிடும் ஒரு திட்டத்தில் 2000 ரூபாயை முதலீடு செய்தால் இரு ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் 2205 ஆகுமெனில் வட்டிச் சதவீதம் எவ்வளவு?

வர்க்க முழுமை

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:

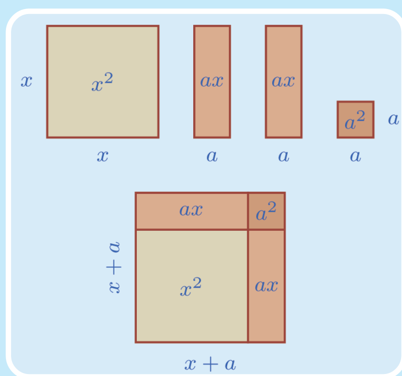
பச்சை நிறத்தில் ஒரு சதுரமும், அதே உயரம் உள்ள இரு சிவப்புச் செவ்வகங்களும், மஞ்சள் நிறத்தில் உள்ள ஒரு சிறு சதுரமும் சேர்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு சிவப்புச் சதுரங்களின் அகலமும், மஞ்சள் சதுரத்தின் பக்கங்களின் அகலமும் 1 மீட்டர் ஆகும். படத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 100 சதுர சென்டிமீட்டரும்.

வடிவியல் வர்க்கம்

x, a எந்த எண்களாயினும்,

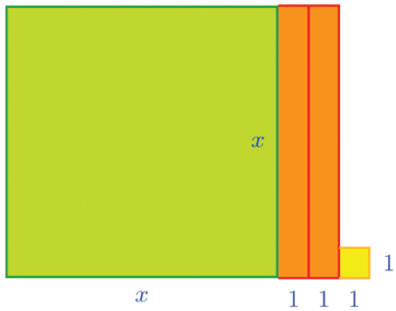
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

என்று கண்டோம் அல்லவா. x, a என்பன மிகை எண்கள் எனில் இதற்கு ஒரு வடிவியல் வடிவம் கொடுக்கலாம்:



பச்சை நிறச் சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

நேரடியாகச் சிந்தித்துக் கணக்கிடுவது கடினம் அல்லவா?



இயற்கணிதச் சோதனை செய்யலாம். பச்சை நிறச் சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை x மீட்டர் என எடுப்போம்:

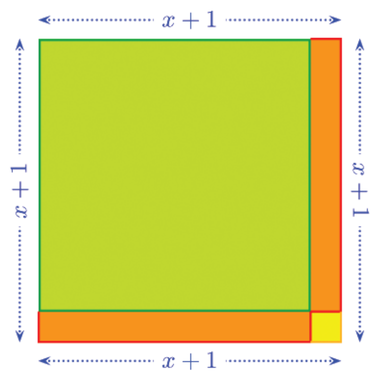
மொத்தப் பரப்பளவை இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

மொத்தப் பரப்பளவு 100 சதுர மீட்டர் என்று தரப்பட்டுள்ளது. அப்போது பிரச்சினையை எவ்வாறு இயற்கணிதத்தில் ஆக்கலாம்.

$x^2 + 2x + 1 = 100$ என்றால் x இன் மதிப்பு என்ன?

$x^2 + 2x + 1$ என்ற வடிவம் பற்றி அறிமுகம் உள்ளதா?



எட்டாம் வகுப்பில் சமன்பாடுகள் என்ற பாடத்தில்

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

என்று பார்த்தோம் அல்லவா?

படத்தில் உள்ள சதுரங்களையும், செவ்வகங்களையும் மாற்றி அடுக்கியும் இதைக் காணலாம்.

அப்போது இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$(x + 1)^2 = 100$ என்றால் x ?

இதிலிருந்து, $x + 1 = 10$ என்றும், $x = 9$ என்றும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

அதாவது பச்சை நிறச் சதுரங்களின் பக்க அளவு 9 மீட்டர் ஆகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஒரு செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கத்திற்கு, சிறிய பக்கத்தைவிட 2 மீட்டர் நீளம் கூடுதல் ஆகும். அதன் பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டர். பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

முதலில் பிரச்சினையை இயற்கணிதத்தில் ஆக்குவோம். சிறிய பக்கத்தின் நீளத்தை x மீட்டர் என்று எடுத்தால் பெரிய பக்கத்தின் நீளம் $x + 2$ மீட்டர்;

பரப்பளவு $x(x + 2) = x^2 + 2x$ சதுர மீட்டர்.

இந்தச் செவ்வகப் பிரச்சினையை, இயற்கணிதப் பிரச்சினை ஆக்கலாம்:

$x^2 + 2x = 224$ எனில் x என்ன?

இனி என்ன செய்யலாம்?

முதல் பிரச்சினையை மீண்டும் ஒருமுறை பார்க்கவும். அதில் $x^2 + 2x + 1$ ஐ $(x + 1)^2$ என்று மாற்றி எழுதியே முன்னோக்கிச் சென்றோம். இதில் $x^2 + 2x$ மட்டுமே உள்ளது.

1 ஐக் கூட்டினால் போதும் அல்லவா?

அப்போது இப்படித் தொடரலாம்:

- $x^2 + 2x = 224$ எனில் $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$
- அதாவது $(x + 1)^2 = 225$
- $(x + 1)^2 = 225$ எனில் $x + 1 = \sqrt{225} = 15$
- $x + 1 = 15$ எனில் $x = 14$

இவ்வாறு செவ்வகத்தின் சிறிய பக்கம் 14 மீட்டர் எனக் கிடைத்தது. அப்போது பெரிய பக்கம் 14 + 2 = 16 மீட்டர் இந்த வினாவையே சிறிது மாற்றி இப்படி ஆக்கினால்?

> ஒரு செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கத்திற்கு, சிறிய பக்கத்தை விட 20 மீட்டர் நீளம் கூடுதல் ஆகும். அதன் பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டர். பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

இயற்கணித வடிவம் இவ்வாறு மாறுகிறது:

$$x^2 + 20x = 224 \text{ எனில் } x \text{ என்ன?}$$

இங்கேயும் 1 ஐக் கூட்டினால், சமன்பாட்டின் வலப்பக்க எண் $225 = 15^2$ ஆகும்; ஆனால், இடப்பக்கம் $x^2 + 20x + 1$ என ஆகிறது. இதை $(x + a)^2$ என்ற வடிவில் ஆக்குவதற்கு இயலுமா? $x^2 + 20x$ ஐ வர்க்க வடிவில் ஆக்குவது எப்படி?

a ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும்

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

நமது பிரச்சினையில் பொதுவான சமன்பாட்டின் $2ax$ இன் இடத்தில் $20x$ உள்ளது.

அப்போது, a என்ற எண்ணை 10 என எடுத்துப் பார்த்தாலோ?

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

இங்கு $x^2 + 20x = 224$ ஆகும். இத்துடன் 100 ஐக் கூட்டித் தொடரலாம்.

$$x^2 + 20x = 224$$
$$x^2 + 20x + 100 = 324$$

வேறுபட்ட வழிமுறை

$x(x + 20) = 224$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண வேறொரு வழிமுறை உண்டு. $x + 20$ ஐ $(x+10)+10$ என்றும் , x ஐ $(x+10)-10$ என்றும் எழுதலாம். அப்போது,

$$x(x+20) = \left((x+10)-10\right)\left((x+10)+10\right)$$
$$= (x+10)^2 - 10^2$$

தொடங்கிய சமன்பாடு

$$(x+10)^2 - 100 = 224$$

என்பதாகும். இதிலிருந்து

$$(x+10)^2 = 324$$

என எழுதி முன்னர் செய்ததைப் போன்று x ஐ கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா.

இந்த முறையில் $x^2 + 10x = 3000$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண இயலுமா என்று பார்க்கவும்.

$$(x+10)^2 = 324$$

$$x+10 = \sqrt{324} = 18$$

$$x = 8$$

இவ்வாறு இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் 8 மீட்டரும், 28 மீட்டரும் ஆகும் எனக் கணக்கிடலாம்.

வேறொரு செவ்வகக் கணக்கு:

மீண்டும் சதுரம்!

20 செ.மீ சுற்றளவு உள்ள பல செவ்வகங்களில் பக்க நீளம் 5 செ.மீ ஆன சதுரத்திற்குத் தான் மிகக் கூடுதல் பரப்பளவு என்று தெரியும் அல்லவா.

இதை வேறொரு முறையிலும் காணலாம். இவ்வகையான சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தை x என்று எடுத்தால் பரப்பளவு

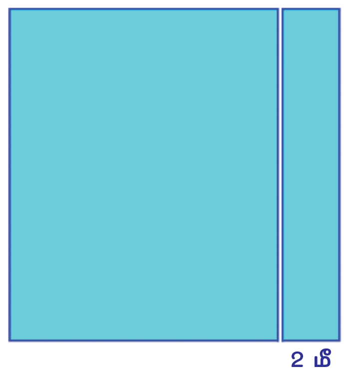
$$p(x) = x(10-x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

இவ்வகையான செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகளை இந்த பல்லுறுப்பில் இருந்து கண்டுபிடிக்க இயலும் அல்லவா. வர்க்கத்தை முழுமைப்படுத்தி

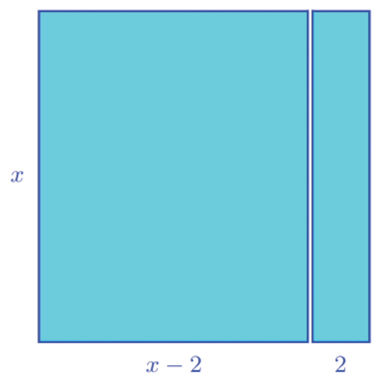
$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

என்று எழுதலாம். இதில் x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் $(x-5)^2$ என்பது குறை எண் ஆகாது. ஆகவே $p(x)$ என்ற எண் 25 ஐ விடக் கூடுதல் ஆகாது. $x = 5$ என்று எடுத்தால் $p(x) = 25$ என்று கிடைக்கும்.

ஒரு சதுரத்திலிருந்து 2 மீட்டர் அகலம் உள்ள ஒரு துண்டு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது;



மீதி உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு 99 சதுர மீட்டர். சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?



சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் x மீட்டர். என எடுத்தால் மீதியுள்ள செவ்வகங்களின் நீளம் x மீட்டர், $(x-2)$ மீட்டர் என்பன ஆகும்:

அப்போது மீதியுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

$$x(x-2) = x^2 - 2x \text{ சதுர மீட்டர்.}$$

பிரச்சினை இவ்வாறாகிறது.:

$x^2 - 2x = 99$ எனில் x என்ன?

$x^2 + 2x$ ஐப் போன்று $x^2 - 2x$ னையும் வர்க்க வடிவில் மாற்ற இயலுமா?

எட்டாம் வகுப்பிலுள்ள வேறொரு சமன்பாட்டை நினைவு கூர்க:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

இனி பிரச்சினையின் x ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம்:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= 99 \\
x^2 - 2x + 1 &= 100 \\
(x - 1)^2 &= 100 \\
x - 1 &= 10 \\
x &= 11
\end{aligned}
$$

சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 11 மீட்டர்.

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

> சுற்றளவு 100 மீட்டரும் பரப்பளவு 525 சதுர மீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்க வேண்டும். அதன் பக்கங்களின் நீளங்கள் என்னவாக இருக்க வேண்டும்.?

செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் தொகை 50 மீட்டர் அல்லவா. அப்போது ஒரு பக்க நீளத்தை எடுத்தால் அடுத்தப் பக்க நீளம் $(50 - x)$ மீட்டர்; பரப்பளவு

$x\,(50 - x) = 50\,x - x^2$ சதுர மீட்டர். எனவே கணக்கை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$50x - x^2 = 525$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்ன?

இடப்பக்கம் $x^2 - 50x$ என இருந்திருந்தால், முன்னர் செய்ததைப்போன்று தொடர்ந்து செய்திருக்கலாம். ஆகவே சமன்பாட்டைச் சற்று மாற்றி எழுதலாம். $50x$ என்ற எண்ணிலிருந்து x^2 ஐக் கழித்தால் 525 கிடைக்க வேண்டுமெனில், அதைத் திருப்பி வைத்து கழித்தால் அதன் குறையான -525 கிடைக்கும் அல்லவா. அப்போது பிரச்சினையை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$x^2 - 50x = -525$ ஆகவேண்டுமெனில் x எதுவாக வேண்டும்?

இனி $x^2 - 50\,x$ உடன் ஓர் எண்ணைக் கூட்டி அதை வர்க்க வடிவில் ஆக்க வேண்டும். கூட்ட வேண்டிய எண் எது?

$$(x - 25)^2 = x^2 - 50\,x + 625$$

கூட்டியும் கழித்தும்

சுற்றளவு 100 மீட்டரும், பரப்பளவு 525 சதுர மீட்டரும் உள்ள செவ்வகத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேறொரு வழிமுறையும் உண்டு. இந்தச் செவ்வகத்தின் நீளத்தின் அகலத்தின் தொகை 50 மீட்டர். எனவே நீளம் $(25 + x)$ என்றும் அகலம் $(25 - x)$ என்றும் எடுக்கலாம். அப்போது பரப்பளவு $(25 - x)\,(25 + x) = 625 - x^2$ சதுர மீட்டர். இனி x ஐ இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$$
\begin{aligned}
625 - x^2 &= 525 \\
x^2 &= 100 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

செவ்வகத்தின் பக்கங்கள்

$25 - 10 = 15$ மீட்டர்,

$25 + 10 = 35$ மீட்டர்

இனி நமது பிரச்சினைக்கு இவ்வாறு தீர்வு காணலாம்:

$$x^2 - 50x = -525$$

$$x^2 - 50x + 625 = -525 + 625 = 100$$

$$(x - 25)^2 = 100$$

$$x - 25 = 10$$

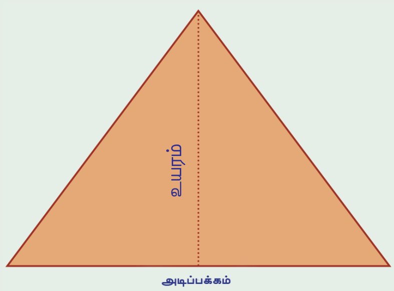
$$x = 35$$

அதாவது செவ்வகத்தின் நீளம் 35 மீட்டரும், அகலம் 15 மீட்டரும்.

(1) அடுத்தடுத்துள்ள இரு இரட்டை எண்களின் பெருக்கற்பலனுடன் 1 ஐக் கூட்டினால் 289 கிடைக்கும் எண்கள் எவை?

(2) 6 இன் அடுத்தடுத்துள்ள இரு மடங்குகளின் பெருக்கற்பலனுடன் 9 ஐக் கூட்டினால் 729 கிடைக்கும். எண்கள் எவை?

(3) கீழே காட்டப்பட்டுள்ளதைப் போன்று ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்கவும்:



அடிப்பக்கத்தைவிட 2 மீட்டர் குறைவாக உயரம் இருக்க வேண்டும். பரப்புளவு 12 சதுர மீட்டரும் ஆக வேண்டும். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

(4) 2.6 மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கம்பு சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பின் அடிப்பகுதி, சுவரிலிருந்து 1 மீட்டர் தூரத்தில் ஆகும். கம்பின் கீழ்முனையைச் சுவரிலிருந்து சிறிது நகர்த்திய போது மேல்முனை அதே அளவில் கீழே நகர்ந்தது. எவ்வளவு தூரம் முன்னோக்கி நகர்த்தப்பட்டது?

(5) 9, 11, 13, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் முதலில் உள்ள சில எண் உறுப்புகளின் தொகையையும் 16 னையும் கூட்டிய போது 256 கிடைத்தது எனில் எத்தனை உறுப்புகள் கூட்டப்பட்டன?

(6) 5, 7, 9, ... என்ற கூட்டுத்தொடரில் முதலில் உள்ள எத்தனை எண்களைக் கூட்டினால் 140 கிடைக்கும்?

(7) ஒரு கணித அறிவியலார் முன்னூறு கிலோமீட்டர் தூரம் பயணம் செய்து ஒரு மாநாட்டில் கலந்து கொண்டார். அந்த மாநாட்டில் பேசும்போது அவர் பின்வருமாறு கூறினார்:

"என்னுடைய பயணத்தின் சராசரி வேகத்தை ஒருமணி நேரத்தில் பத்து கிலோமீட்டர் எனக் கூட்டியிருந்தேன் எனில் நான் ஒரு மணிநேரம் முன்னரே மாநாட்டை அடைந்திருப்பேன்."

சராசரி வேகம் எவ்வளவாக இருந்தது?

(8) சில குழந்தைகளுக்கு 30 மிட்டாய்கள் சமமாகப் பங்கிட்டு அளிக்கப்பட்டன. இனிப்பைச் சுவைத்துக் கொண்டு ஒரு குழந்தை கணக்குக்காரன் பின்வருமாறு கூறினான்.

"எங்களில் ஒருவர் குறைவாக இருந்திருந்தால் எல்லோருக்கும் ஒரு மிட்டாய் அதிகமாகக் கிடைத் திருக்கும்."

கூட்டத்தில் எத்தனை குழந்தைகள் உள்ளனர்?

இரு விடைகள்

வேகத்திற்கும் தூரத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் குறித்துள்ள சில காரியங்களைப் பற்றிக் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரே வேகத்தில் பயணம் செய்கின்ற ஒரு பொருள் எவ்வளவு தூரம் பயணம் செய்தது என்பதைக் கணக்கிட, வேகத்தை நேரத்தால் பெருக்கினால் போதும். இதை இயற்கணிதச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

u மீட்டர்/வினாடி என்ற ஒரே வேகத்தில் பயணிக்கின்ற பொருள் t வினாடிகளில் பயணம் செய்கின்ற தூரத்தை s மீட்டர் என எடுத்தால்,

$$s = ut$$

இனி வேகம் மாறுகிறது எனிலோ? வேகம் இடைவிடாது கூடுகிறது எனில் ஒவ்வொரு வினாடியிலும் பயணம் செய்கின்ற தூரம் கூடும். வேகம் இடைவிடாது குறைகிறது எனில் ஒவ்வொரு வினாடியிலும் பயணம் செய்கின்ற தூரமும் குறையும். தூரம் மாறுவதற்கும் ஒரு கணக்கு உண்டு. u மீட்டர்/ வினாடி என்ற வேகத்தில் புறப்பட்டு ஒவ்வொரு வினாடியிலும் a மீட்டர்/ வினாடி என்ற அளவில் வேகம் கூடுகிறது எனக் கருதவும்; t வினாடி முடியும் போது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்துள்ள தூரத்தை s மீட்டர் என எடுத்தால்,

$$s = ut + \frac{1}{2}\ at^2$$

வேகம் ஒவ்வொரு வினாடியிலும் a மீட்டர்/ வினாடி என்ற அளவில் குறைகிறது எனில்,

$$s = ut - \frac{1}{2}\ at^2$$

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

40 மீட்டர்/ வினாடி என்ற வேகத்தில் புறப்பட்டு ஒரு நேர்கோட்டில் பயணம் செய்கின்ற ஒரு பொருளின் வேகம் வினாடிக்கு 8 மீட்டர்/ வினாடி என்ற அளவில் குறைகிறது. பயணம் செய்த நேரத்திற்கும், தொடங்கிய இடத்திலிருந்து உள்ள தூரத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

t வினாடியில் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து உள்ள தூரம் s மீட்டர் என எடுத்துக்கொண்டால், முதலில் கூறியதற்கு ஏற்ப,

$$s = 40t - \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 40t - 4t^2$$

இதைப் பயன்படுத்தி எந்த நேரத்திலும், புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் பொருள் உள்ளது எனக் கணக்கிடலாம்:

நேரம்	1	2	3	4	5	6
தூரம்	36	64	84	96	100	96

தூரம் கூடிய பின்னர் குறைவது எதனால்?

40 மீட்டர்/ வினாடி என்ற வேகத்தில் புறப்பட்டு ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 8 மீட்டர்/ வினாடி என்ற அளவில் குறைவதால், 5 வினாடி ஆகும்போது வேகம் 0 ஆகிறது. தொடர்ந்துள்ள நேரத்தில் எதிர்திசையில் பயணிக்கிறது. எதிர்திசையில் ஓர் ஆற்றல் செயல்படுவதனாலேயே வேகம் இடைவிடாது குறைகிறது.

மேலே உள்ள அட்டவணையை மேலும் சிறிது நீட்டினால் திரும்பி வரும் பயணம் தெளிவாகும்.

நேரம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
தூரம்	36	64	84	96	100	96	84	64	36	0	-44

அதாவது, 10 வினாடிகள் ஆகும் போது புறப்பட்ட இடத்திற்கே திரும்பி வரும்; 11 வினாடிகள் ஆகும்போது எதிர்திசையில் 44 மீட்டர் தூரத்தில் ஆகும். அட்டவணையில் உள்ள குறைஎண் இதையே சுட்டுகிறது.

இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு நேரத்தின் தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். மாறாக, ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தைச் சென்றடைய வேண்டியதன் நேரத்தைக் கணக்கிடுவது எப்படி?

எடுத்துக்காட்டாக,

எந்த நேரத்தில் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 99 மீட்டர் தூரத்தில் இருக்கும்?

அதற்கு $40t - 4t^2 = 99$ ஆக வேண்டும். முன்னர் செய்ததைப் போன்று இந்தச் சமன்பாட்டை மாற்றி எழுதலாம்:

$$4t^2 - 40t = -99$$

இதில் t^2 இன் குணகம் 4 அல்லவா. முதலில் அதை 1 ஆக்க வேண்டும். (இதுவரை செய்த கணக்குகளில் எல்லாம் அவ்வாறு அல்லவா இருந்தது). அதற்காக 4 ஆல் வகுக்க வேண்டும்:

$$t^2 - 10t = \frac{-99}{4}$$

இனி முன்னர் செய்ததைப் போன்று, $t^2 - 10t$ உடன் ஓர் எண்ணைக் கூட்டி வர்க்க வடிவில் ஆக்க வேண்டும். கூட்ட வேண்டிய எண் எது?

$$(t-5)^2 = t^2 - 10t + 25$$

இனி 25 ஐக் கூட்டி வர்க்க வடிவில் ஆக்கித் தொடரலாம்.

(இங்கு t இன் குணகம் ஆன -10 இன் பாதியின் வர்க்கம் அல்லவா 25)

$$t^2 - 10t + 25 = 25 - \frac{99}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(t-5)^2 = \frac{1}{4}$$

$$t - 5 = \frac{1}{2}$$

$$t = 5\frac{1}{2}$$

அப்போது $5\frac{1}{2}$ வினாடிகளில், புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 99 மீட்டர் தூரத்தை அடையும்.

ஆனால் அட்டவணையின் வரிசையைப் பார்த்தால் 5 வினாடிகளுக்கு ஒரே நேரத்தில் பின்னாலும் முன்னாலும் பொருள் ஒரே இடத்தில் தான் எனக் காணலாம். (முன்னால் போகும் பயணத்திலும் திரும்பும் பயணத்திலும்) எடுத்துக்காட்டாக, 4 வினாடிகளிலும் 6 வினாடிகளிலும் 96 மீட்டர் தூரத்தில் ஆகும். அதைப்போன்று 3 வினாடிகளிலும் 7 வினாடிகளிலும் 84 மீட்டர் தூரத்தில் ஆகும். அப்போது 5 வினாடிகளுக்கு $\frac{1}{2}$ வினாடிக்கு முன்னரும் பின்னரும் பொருள் ஒரே இடத்தில் ஆகும். அதாவது, $\frac{1}{2}$ வினாடிக்குப் பின்னர் $5\frac{1}{2}$ வினாடிகளில் பொருள் 99 மீட்டர் தூரத்தில் ஆகும் எனக் கிடைத்தது. இப்போது காண்பதற்கு ஏற்ப $4\frac{1}{2}$ வினாடிகளிலும் பொருள் 99 மீட்டர் தூரத்தில் அல்லவா இருக்க வேண்டும்?

நேரம்-தூரச் சமன்பாட்டில் $t = 4\frac{1}{2}$ என்று எடுத்தால்

$$40t - 4t^2 = \left(40 \times 4\frac{1}{2}\right) - 4 \times \left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(40 \times \frac{9}{2}\right) - \left(4 \times \frac{81}{4}\right) = 180 - 81 = 99$$

என்றே கிடைக்கிறது.

$40t - 4t^2 = 99$ ஆக t என்னவாக இருக்க வேண்டும் என்று கணக்கிட்ட போது $t = 4\frac{1}{2}$ என்ற இரண்டாவது விடை கிடைக்கவில்லை. எதனால்?

$t = 5\frac{1}{2}$ என்ற விடைக்குச் சென்று சேர்ந்த வழிமுறைகளை மீண்டும் பார்ப்போம். அதில் ஓர் இடத்தில் $(t-5)^2 = \frac{1}{4}$ ஆக வேண்டும். வர்க்கம் $t - 5 = \frac{1}{2}$ என எடுத்தோம் அல்லவா வர்க்கம் $\frac{1}{4}$ ஆகும் எண் $\frac{1}{2}$ மட்டுமா?

$-\frac{1}{2}$ இன் வர்க்கம் என்ன?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

அப்போது ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் $\frac{1}{4}$ எனக் கிடைத்தால், எண் $\frac{1}{2}$ அல்லது $-\frac{1}{2}$ என்றே கூற இயலும்.

ஆகவே நமது கணக்கில்,

$$(t-5)^2 = \frac{1}{4}$$

என்பதிலிருந்து,

$$t - 5 = \frac{1}{2} \text{ அல்லது } t - 5 = -\frac{1}{2}$$

என்றே கூற இயலும். இதில் $t - 5 = \frac{1}{2}$ என்று எடுத்தால், முதலில் கிடைத்ததைப் போன்று $t = 5\frac{1}{2}$ என்று கிடைக்கும். $t - 5 = -\frac{1}{2}$ என்று எடுத்தால், இரண்டாவது கிடைத்ததைப் போன்று $t = 4\frac{1}{2}$ என்று கிடைக்கும்.

அப்போது வேறொரு வினா: இது வரை செய்த கணக்குகளில் இத்தகைய குறை வர்க்க மூலமும் எடுத்திருந்தோம் எனில் வேறொரு விடை கிடைத்திருக்குமா?

எடுத்துக்காட்டாக, முன்னர் செய்த ஒரு செவ்வகக் கணக்கைப் பார்ப்போம். பெரிய பக்கம், சிறிய பக்கத்தை விட 2 மீட்டர் கூடுதல் நீளம் உள்ளதும் பரப்பளவு 224 சதுர மீட்டரும் ஆன செவ்வகம்.

இதன் பக்கங்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்குச் சிறிய பக்கத்தின் நீளத்தை x மீட்டர் என எடுத்தால், $(x + 1)^2 = 225$ எனக் கிடைக்கும் என்று கண்டோம். தொடர்ந்து $x + 1 = 15$ என எடுத்து சிறிய பக்கத்தின் நீளம் 14 மீட்டர் என்று கணக்கிட்டோம்.

இயற்கணிதத்தை மட்டும் பார்த்தால் $x + 1 = -15$ என்றும் ஆகலாம்;

அதாவது, $x = -16$

ஆனால் இந்தக் கணக்கில் x என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கம் ஆகும். அது ஒரு மிகை எண்ணாகவே இருக்கும். அப்போது $x = -16$ என்ற விடை செவ்வகக் கணக்கிற்குப் பொருந்தாது.

முன்னர் செய்த வேறு ஒரு செவ்வகக் கணக்கைப் பார்ப்போம். சுற்றளவு 100மீட்டரும் பரப்பளவு 525 சதுரமீட்டரும் உள்ள செவ்வகம்.

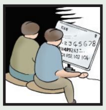
இதில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தை x மீட்டர் என எடுத்தால் $(x - 25)^2 = 100$ எனக் கண்டுள்ளோம். இதிலிருந்து, $x - 25 = 10$ என எடுத்து ஒரு பக்கம் 35 மீட்டர் அடுத்தப் பக்கம் $50 - 35 = 15$ மீட்டர் எனக் கணக்கிட்டோம்.

குறை வர்க்க மூலம் எடுத்தால்? $x - 25 = -10$ என்றும் இதிலிருந்து $x = 15$ என்றும் கிடைக்கும். அதாவது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 15 மீட்டர், அடுத்தப் பக்கத்தின் நீளம் $50 - 15 = 35$ மீட்டர் என்றும் கிடைக்கும்.

அப்போது இந்தக் கணக்கில் இரு வர்க்க மூலங்களில் எதை எடுத்தாலும் ஒரே செவ்வகம் தான் கிடைக்கிறது.

பொதுவாகக் கூறினால், ஒரு நடைமுறை பிரச்சினையை இயற்கணிதச் சமன்பாடாக மாற்றி, கணிதம் சார்ந்து மட்டும் சிந்திக்கும் போது, ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விடைகள் கிடைக்கலாம். இவற்றில் சில மட்டுமோ அனைத்துமோ இந்த நடைமுறை பிரச்சினைக்குப் பொருந்துவதில்லை என்றும் வரலாம்.

அப்போது சாதாரணமாக இயற்கணித முறையில் எல்லா விடைகளையும் கண்டுபிடிப்பதுடன் தொடர்ந்து இவற்றிலிருந்து சூழலுக்கு ஏற்ப பொருத்தமானதை மட்டும் எடுப்பதே வழக்கம்.



(1) ஓர் எண்ணையும் அத்துடன் 2 ஐக் கூட்டிய எண்ணையும் பெருக்கிய போது 168 கிடைத்தது எனில் அந்த எண்கள் எவை?

(2) தொகை 4 உம் பெருக்கற்பலன் 2 உம் ஆன இரு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(3) 99, 97, 95, ... எனத் தொடர்கின்ற கூட்டுத்தொடரில் முதலில் இருந்துள்ள எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 900 கிடைக்கும்?

(4) ஓர் எண், அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் தொகை $2\frac{1}{6}$ ஆகும். அப்படியானால் அந்த எண் எது?

(5) ஒரு தண்ணீர்த் தொட்டியில் தண்ணீரை நிறைக்க இரு குழாய்கள் உள்ளன. இரண்டையும் திறந்து வைத்தால், 12 நிமிடங்களில் அது நிறைந்து விடும். சிறிய குழாயை மட்டும் திறந்து வைத்தால், பெரிய குழாய் நிரப்பும் நேரத்தை விட 10 நிமிடங்கள் கூடுதல் ஆகிறது. எனவே சிறிய குழாய் மட்டும் திறந்து வைத்தால் எவ்வளவு நேரத்தில் அந்தத் தண்ணீர்த்தொட்டி நிறையும்?

சமன்பாடுகளும் பல்லுறுப்பும்

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ என்ற பல்லுறுப்பில், x ஆக பல எண்களை எடுத்தால் $p(x)$ ஆக பல எண்கள் கிடைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$p(1) = 4 + 24 + 11 = 39$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right) + 11 = 1 + 12 + 11 = 24$$

$$p(-1) = 4 - 24 + 11 = -9$$

மாறாக, $p(x)$ க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட எண் கிடைக்க x ஆக எந்த எண்ணை எடுக்க வேண்டும் என்று கேட்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ என்ற பல்லுறுப்பில், $p(x) = 0$ என்று கிடைக்க x ஆக எடுக்க வேண்டிய எண் எது ?

இந்த வினாவையே சிறிது எளிதாக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்:

$4x^2 + 24x = -11$ ஆக வேண்டுமெனில் x இன் விலை என்னவாக அமைய வேண்டும்?

இத்தகைய ஏராளமான கணக்குகளைச் செய்திருக்கிறோம் அல்லவா.

x ஐக் கண்டுபிடிப்பதன் வழிமுறைகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

x^2 இன் குணகத்தை 1 ஆக்கவும்: $x^2 + 6x = -\frac{11}{4}$

x இன் குணகத்தின் பாதியின் வர்க்கத்தைக் கூட்டவும்.

$$: \quad x^2 + 6x + 9 = -\frac{11}{4} + 9$$

இதை வர்க்கமாக எழுதவும் : $(x+3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

வர்க்க மூலம் எடுக்கவும் : $x + 3 = \frac{5}{2}$

அல்லது

$x + 3 = -\frac{5}{2}$

x ஐக் கணக்கிடுக : $x = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

அல்லது

$x = -\frac{5}{2} - 3 = -5\frac{1}{2}$

அதாவது, $p(x) = 0$ என்று கிடைக்க $x = -\frac{1}{2}$ என்றோ $x = -5\frac{1}{2}$ என்றோ எடுக்க வேண்டும்.

இனி $p(x) = 1$ ஆகின்ற x ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமெனில்? $p(x) = 1$ என்பதை $p(x) - 1 = 0$ என்று எழுதலாம் அல்லவா,

சிறு வரலாறு

இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு வர்க்கத்தை முழுமையாக்குகின்ற முறை பழமையானது. சுமார் 1500 இல் பாபிலோனியர் செவ்வகத்தின் பரப்பளவுடன் தொடர்புள்ள கணக்குகளில் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தியிருப்பதைக் காணலாம்.

ஆனால் இன்றைய முறை போன்று பிரச்சினைகளை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக ஆக்குகின்ற முறை அன்று இல்லை. (இந்த முறைக்கு 500 ஆண்டுகள் வரையிலான பழமையே உள்ளது) பிரச்சினைகளும் அவற்றின் தீர்வு வழி முறைகளும் எல்லாம் சாதாரண மொழியிலேயே கூறப்பட்டிருந்தன. அதாவது வடிவியல் பிரச்சினைகள் எனில் அதன் தீர்வு வழிமுறைகளும் வடிவியல் மொழியிலேயே அமைந்திருந்தன.

அதாவது இயற்கணித முறைகளின் வடிவியல் வடிவங்களாக நாம் இன்று வெளியிடுகின்ற பலவற்றை வரலாறு சார்ந்து பார்த்தோமானால் இவை இயற்கணித முறைகளின் ஆதி வடிவம் ஆகும்.

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$4x^2 + 24x + 10$ என்ற பல்லுறுப்பை $q(x)$ என எழுதினால், இந்தப் பிரச்சினை இவ்வாறாகும்.

$q(x) = 4x^2 + 24x + 10$ என்ற பல்லுறுப்பில், $q(x) = 0$ எனக் கிடைப்பதற்கு x ஆக எந்த எண் எடுக்க வேண்டும்?

முதல் கணக்கைப் போன்று செய்யலாம்:

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$
$$4x^2 + 24x = -10$$
$$x^2 + 6x = -\frac{5}{2}$$
$$x^2 + 6x + 9 = 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$
$$(x+3)^2 = \frac{13}{2}$$
$$x + 3 = \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ அல்லது } -\sqrt{\frac{13}{2}}$$
$$x = -3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ அல்லது } -3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$-3+\sqrt{\frac{13}{2}}$ அல்லது $-3-\sqrt{\frac{13}{2}}$ என்பதைச் சுருக்கி $-3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ என்றே எழுதுகிறோம். அதாவது $p(x) = 1$ எனக் கிடைப்பதற்கு $x = -3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ என்பதில் ஏதேனும் ஓர் எண்ணை எடுக்க வேண்டும்.

இனி ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பிலிருந்து 0 கிடைப்பதற்கு உரிய எண்ணைக் கண்டுபிடிப்பதற்குப் பொதுவழிமுறையைக் காண்போம். எந்த இரண்டாம் படி பல்லுறுப்பையும்

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

என்று எழுதலாம் அல்லவா. இதில் $p(x) = 0$ ஆகின்ற x ஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய நிலைகளை முன்னர் செய்ததைப் போன்று இவ்வாறு எழுதலாம்:

மூலைவிட்டக் கணக்கு

இருபடிச் சன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பது மட்டுமல்ல, வர்க்க மூலங்களின் தோராய மதிப்புகள் காண்பதற்கும், வர்க்கம் முழுமையாக்குகின்ற முறையினைப் பழங்காலத்தில் பயன்படுத்தியிருந்ததாகக் காணலாம்.

எடுத்துகாட்டாக அகலம் குறைந்த உயரம் கூடிய ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் கண்டுபிடிக்கும்முறை பண்டைய பாபிலோனியாவில் ஒரு களிமண் பலகையில் கூறியிருப்பது இவ்வாறு ஆகும்.

அகலத்தின் வர்க்கத்தை உயரத்தால் வகுத்து அதன் பாதி உயரத்துடன் கூட்டவும்.

இது, இன்றைய முறையில் எழுதினால்

$$\sqrt{a^2+b^2} \approx a+\frac{b^2}{2a}$$

என ஆகும்.

இதன் உத்தியையும் இன்றைய முறையில் கண்டுபிடிக்கலாமா.

- $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதை மாற்றி எழுதலாம்.

$$ax^2 + bx = -c$$

- x^2 இன் குணகம் 1 ஆக்கவும்

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- x இன் குணகம் ஆன $\frac{b}{a}$ இன் பாதியின் வர்க்கத்தைக் கூட்டவும்.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

- இதை வர்க்கமாக எழுதுக

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

- வர்க்க மூலம் எடுக்கவும்.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- x வர்க்க மூலம் எடுக்கவும்

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ அதாவது,

$p(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற பல்லுறுப்பில், $p(x) = 0$ எனக் கிடைப்பதற்கு

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

என்று எடுக்கவேண்டும்.

இதைச் சிறிது சுருக்கி எழுதலாம்:

$ax^2 + bx + c = 0$ ஆகவேண்டுமெனில்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ஆக வேண்டும்.

முன்னர் செய்த பல கணக்குகளிலும் விடை கண்டுபிடிப்பதற்கு உரிய பல நிலைகளை ஒன்றாக எடுத்து ஒரு வரிசையிலேயே விடை எழுத இதைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, இரு விடைகள் என்ற பகுதியில் உள்ள முதல் கணக்கில் புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 99 மீட்டர் தூரத்தில் இருக்கின்ற நேரத்தைக் கணக்கிட, $40t - 4t^2 = 99$ ஆவதற்கு t என்பது என்ன எண்ணாக இருக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிட்டோம் அல்லவா. இந்தக் கணக்கை இவ்வாறு எழுதலாம்.

$4t^2 - 40t + 99 = 0$ ஆக வேண்டுமெனில் t இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

இதைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு மேலே உள்ள பொதுக்கோட்பாட்டில் a, b, c ஆக $4, -40, 99$ என்ற எண்களை எடுத்தால் போதும்:

$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \times 4 \times 99}}{2 \times 4}$$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 16 \times 99}}{8} = \frac{40 \pm \sqrt{16}}{8}$$

அப்போது,

$$t = \frac{40 \pm 4}{8} = \frac{44}{8} \text{ அல்லது } \frac{36}{8}$$

இதிலிருந்து, முன்னர் கண்டதைப் போன்று $t = 5\frac{1}{2}$ அல்லது $4\frac{1}{2}$ என கிடைக்கும்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

30 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் ஒரு கல் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. t வினாடிகளில் தரையிலிருந்துள்ள உயரத்தை s மீட்டர் என எடுத்தால், s, t என்பனவற்றின் இடையில் உள்ள தொடர்பு

$$s = 30t - 4.9t^2$$

எந்த நேரத்தில் கல் தரையிலிருந்து 20 மீட்டர் உயரத்தில் சென்று சேர்கிறது?

இங்கு $30t - 4.9t^2 = 20$ என்பதில் t ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். வேறு முறையில் கூறினால், கணக்கு இது:

$4.9t^2 - 30t + 20 = 0$ ஆக வேண்டுமெனில் t என்ன?

முன்னர் செய்ததைப் போன்று ஒரு வரியில்

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \times 4.9 \times 20}}{9.8}$$

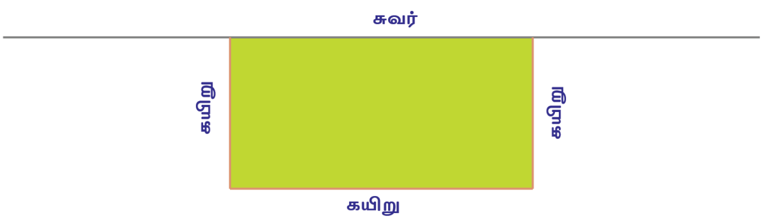
என்று எழுதலாம். இதைக் கணக்கிட கணிப்பானையோ கணினியையோ பயன் படுத்துவதே வசதியாகும். அவ்வாறு இரு தசம இடங்களுக்குச் சரியாக

$t \approx 5.36$ அல்லது 0.76

என்று கணக்கிடலாம்.

இதில் 0.76 வினாடி என்பது, மேல் நோக்கியுள்ள பயணத்தில் 20 மீட்டர் உயரத்தை அடைகின்ற நேரமும், 5.36 வினாடிகள் என்பது கீழ் நோக்கியுள்ள பயணத்தில் 20 மீட்டர் உயரத்தை அடைகின்ற நேரமும் ஆகும்.

20 மீட்டர் நீளம் உள்ள கயிறைப் பயன்படுத்தி ஒரு செவ்வகத்தை உருவாக்க வேண்டும். செவ்வகத்தில் ஒரு பக்கம் ஒரு சுவரும்.



செவ்வகத்திற்கு 50 சதுரமீட்டர் பரப்பளவு தேவை. செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு ஆக வேண்டும்?

செவ்வகத்தின் இடப்பக்கமும் வலப்பக்கமும் உள்ள பக்கங்களின் நீளத்தை x மீட்டர் என எடுத்தால், கீழ்ப்பகுதியில் உள்ள பக்கத்தின் நீளம் $20 - 2x$ மீட்டர், பரப்பளவு $x(20 - 2x) = 2x(10 - x)$ சதுர மீட்டராகும்.

அப்போது கணக்கின் இயற்கணித வடிவம் இது ஆகும்.:

$2x(10 - x) = 50$ ஆக வேண்டுமெனில் x என்ன?

முதல் சமன்பாட்டை எளிதாக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

அதாவது,

$$(x-5)^2 = 0$$

வர்க்கம் பூஜ்யம் எனில், எண்ணும் பூஜ்யமே. அதாவது $x-5=0$, அல்லது $x=5$ அப்போது செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் 5 மீட்டரும், $20-10=10$ மீட்டரும் ஆகும்.

பக்கங்களை மாற்றி பரப்பளவைச் சற்று அதிகரிக்க இயலுமா? 1 சதுர மீட்டராவது?

$$\begin{aligned} 2x(10-x) &= 51 \\ 2x^2-20x+51 &= 0 \end{aligned}$$

இதை முழுவர்க்கமாக மாற்றித் தொடர்வது அவ்வளவு எளிது அல்ல. எனவே சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-408}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

இதன் பொருள் என்ன? குறை எண்களுக்கு வர்க்கமூலம் இல்லை அல்லவா (மிகைஎண்ணாயினும் குறைஎண்ணாயினும் வர்க்கம் மிகைஎண் அல்லவா?)

இந்தச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு இல்லை என்பதே இதன் பொருள். வேறொரு முறையில் கூறினால், x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் $x^2-20x+51$ என்ற எண் 0 ஆகாது.

சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாக, முழு வர்க்கம் ஆக்கும் முறையில் தொடர்ந்திருந்தால் இவ்வாறு ஆகியிருக்கும்:

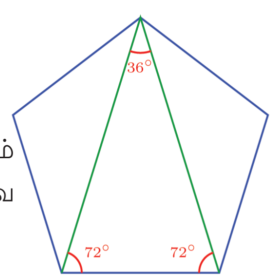
$$\begin{aligned} x^2+10x+25\frac{1}{2} &= 0 \\ x^2+10x+25 &= -\frac{1}{2} \\ (x-5)^2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

எந்த எண்ணின், வர்க்கமும் குறை அல்லாத படியால், இந்தச் சமன்பாடு சரியாகின்ற. எண் ஒன்றும் இல்லை என இந்த நிலையில் பகுத்தறியலாம்.

செவ்வகக் கணக்கை மீண்டும் பார்ப்போம். பரப்பளவை 51 சதுர மீட்டர் ஆக்குவதற்கு இயலாது என்பதே இது வரை கூறியதன் சுருக்கம். இதைப் போன்று சிந்தித்தால் பரப்பளவை 50 சதுர மீட்டரிலிருந்து மேலும் சிறிது அதிகரிக்க இயலாது எனப் பார்க்கலாம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

> ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் மூலைவிட்டங்கள் பக்கங்களின் எத்தனை மடங்காகும்?

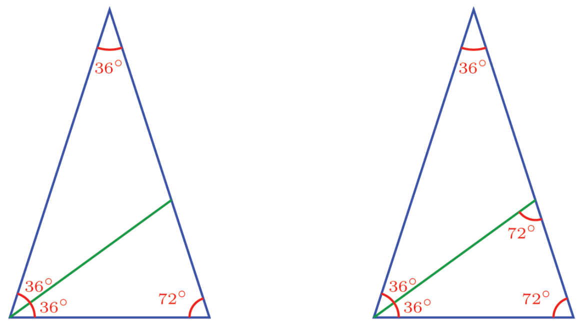


ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கமும் இரு மூலைவிட்டங்களும் சேர்த்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தில் கோணங்கள் 36°, 72°, 72° என்பவை அல்லவா? (எட்டாம் வகுப்பில் **பலகோணங்கள்** என்ற பாடம்).

அப்படியானால் வினா இவ்வாறு ஆகும்:

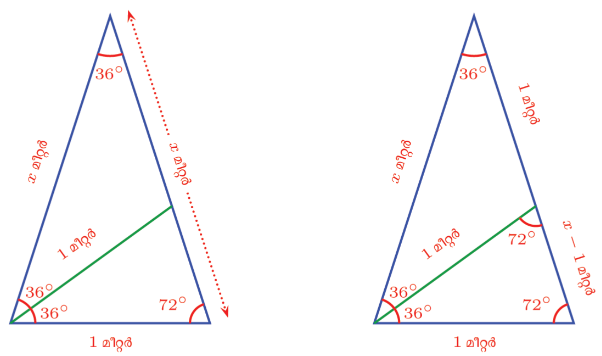
> கோணங்கள் 36°, 72°, 72° என ஆகும். இருசமப்பக்க முக்கோணத்தின் சமப்பக்கங்கள் அடிப்பக்கத்தின் எத்தனை மடங்கு?

இத்தகைய முக்கோணத்திற்கு ஒரு சிறப்புத் தன்மை உண்டு. அதைக் காண ஓர் அடிப்பக்கக் கோணத்தின் இருசம வெட்டி வரைந்து எதிர்ப் பக்கத்தைச் சந்திக்கச் செய்யவும். தொடர்ந்து அவ்வாறு கிடைக்கும் முக்கோணங்களின் கோணங்களையும் கணக்கீடு செய்யலாம்.



அப்போது தொடங்கிய பெரிய முக்கோணத்திற்கும், அதன் உள்ளே கீழே கிடைக்கும் முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள்; அதாவது அவை வடிவொத்தவை ஆகும். (இனி இப்போது வரைந்த முக்கோணத்தின் வலது அடிப்பக்கக் கோணத்தின் இருசம வெட்டி வரைந்து, முதல் இருசம வெட்டியைச் சந்திக்கச் செய்தால்? மீண்டும் அவ்வாறு வலப்பக்கம் கிடைக்கும் சிறிய முக்கோணத்தின் ஒரு 72° கோணத்தின் இருசம வெட்டி ஆகும்...... அது இருக்கட்டும்.)

நமது கணக்கிற்கு வரலாம். அடிப்பக்கம் 1 மீட்டர் என்றும் சமப்பக்கங்களின் நீளம் x மீட்டர் என்றும் எடுக்கலாம். கோணத்தின் இருசமவெட்டி வெட்டிக் கிடைக்கும் முக்கோணங்கள் இரண்டும் இருசமப்பக்க முக்கோணங்கள் ஆனபடியால்,



பெரிய முக்கோணத்திலும் கீழே உள்ள முக்கோணத்திலும் ஒரே கோணங்கள் எனவே பக்கங்களின் நீளம் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்தில் இருக்க வேண்டும். (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமை** என்ற பாடம்)

சிறிய முக்கோணத்தில் சமபக்கங்கள் 1 மீட்டரும் பெரிய முக்கோணத்தில் சமபக்கங்கள் x மீட்டரும் ஆகும்.

சிறிய முக்கோணத்தில் மூன்றாவது பக்கம் $x-1$ மீட்டரும் பெரிய முக்கோணத் தில் மூன்றாவது பக்கம் 1 மீட்டரும் ஆகும். இந்த மாற்றங்கள் ஒரே அளவு வீதம் என்பதன் சமன்பாடு.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

குறுக்குப் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தி (ஒன்பதாம் வகுப்பில் **பின்னஎண்கள்** என்ற பாடம்) இதை மாற்றி எழுதலாம்.

$$x\,(x-1) = 1$$

பல்லுறுப்பு சமன்பாடாக இவ்வாறு ஆக்கலாம்.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

இனி சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி x ஐக் கணக்கீடு செய்யலாம்

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

இந்தக் கணக்கில் x மிகை எண் ஆனபடியால், $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ என்ற விடை சரியாகாது.

அப்போது முக்கோணங்களின் சமபக்கங்களின் நீளம் $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ மீட்டர்.

அதாவது ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் மூலைவிட்டம் பக்கத்தின் $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ மடங்கு ஆகும்.

(1) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 42 மீட்டர், அதன் மூலைவிட்டம் 15 மீட்டர் என்றால் அதன் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(2) 1 முதல் தொடங்கும் தொடர்ச்சியான எண்ணல் எண்களை எதுவரை கூட்டினால் தொகை 3000 எனக் கிடைக்கும்?

(3) ஒரு மிகை எண்ணிலிருந்து அதன் தலைகீழியைக் கழித்த போது $1\frac{1}{2}$ எனக் கிடைத்தது. அந்த எண் எது?

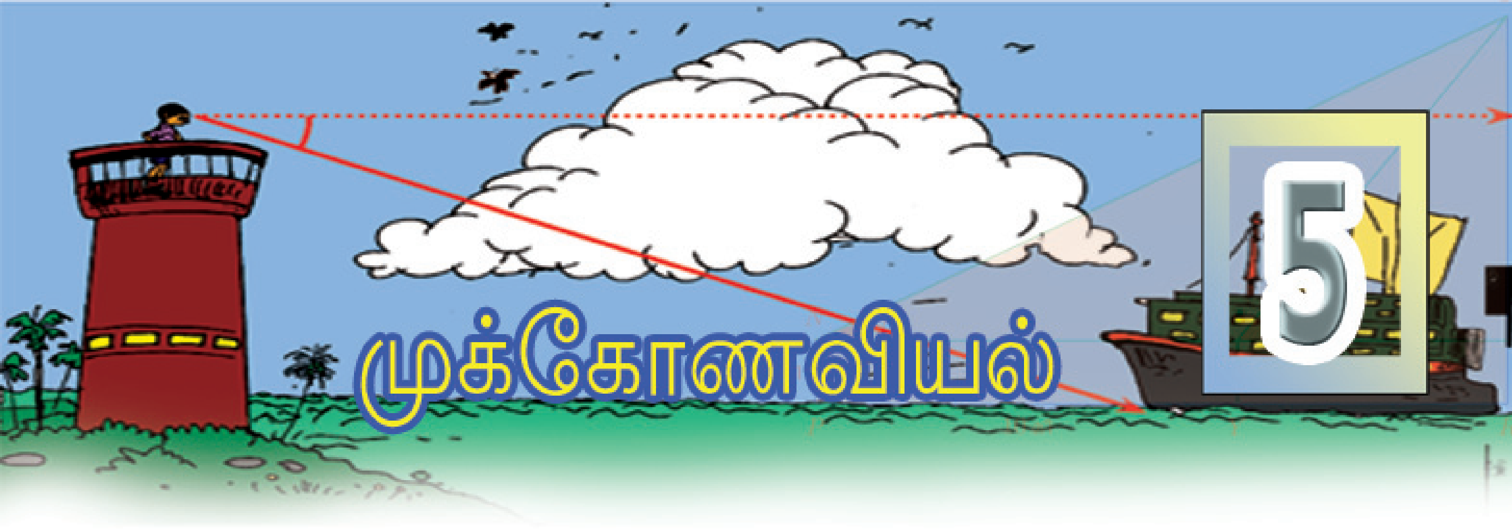
(4) ஓர் எண்ணின் தலைகீழியின் தொகை $1\frac{1}{2}$ ஆகுமா? எதனால்?

(5) குறிப்பிட்ட சுற்றளவும் பரப்பளவும் உள்ள செவ்வகம் உருவாக்குகின்ற பிரச்சினையைச் சமன்பாடாக்கிய போது சுற்றளவு 42 என்பதற்குப் பதிலாக 24 என்று தவறாக எழுதப்பட்டது. செவ்வகத்தின் ஒரு பக்க நீளம் 10 என்றும் கிடைத்தது. பிரச்சினையில் பரப்பளவு எவ்வளவு? சரியான கணக்கில் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

(6) ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை மறுபடியும் எழுதியபோது x இல்லாத எண் -24 என்பதற்குப் பதிலாக 24 என்று தவறாக எழுதப்பட்டது. விடையாக 4, 6 என்று கிடைத்தன. சரியான பிரச்சினையில் விடை என்ன?

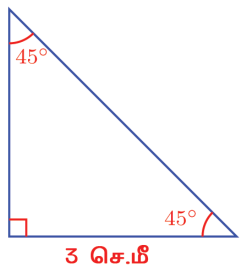
மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ நடைமுறைப் பிரச்சினைகளை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக ஆக்குதல். ⌘ வர்க்கத்தை முழுமையாக்கி இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு உள்ள தீர்வுகளைக் காண்கின்ற வழிமுறையை விளக்குதல். ⌘ சில நடைமுறைப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகளும் அவற்றைக் காண்பதற்கு உரிய வழிமுறைகளையும் தெளிவுபடுத்துதல். ⌘ சமன்பாடுகளின் தீர்வு இயற்பியல் பிரச்சினைத் தீர்வாக ஆவதும், அல்லாததுமான சூழல்களைப் பகுத்தறிதல்.			



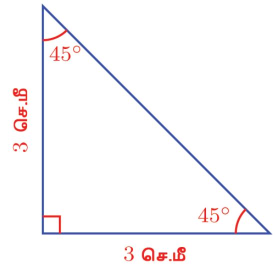
கோணங்களும் பக்கங்களும்

இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



இதன் பிற பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

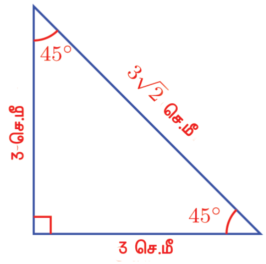
சமமான கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களும் சமம் என அறியலாம். அப்படியானால், வலப்பக்கத்தில் உள்ள 45° கோணத்தின் எதிரே உள்ள செங்குத்துப் பக்கத்தின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.



இனி கர்ணமோ?

பைதகோரஸ் தேற்றத்தின் படி, கர்ணத்தின் வர்க்கம் $3^2 + 3^2 = 18$

அப்போது, கர்ணம், $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர்.



(9-ஆம் வகுப்பில் **புதிய எண்கள்** என்ற பாடம்)

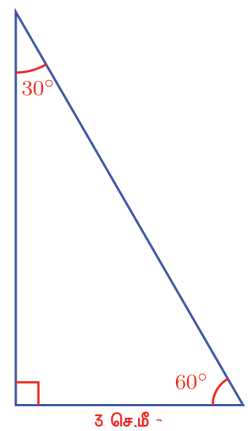
இனி அடிப்பக்கத்தை மேலும் கூட்டி 5 சென்டிமீட்டராக்கி இத்தகைய ஒரு முக்கோணம் வரைந்தாலோ? பக்கங்களின் நீளம் என்ன?

பொதுவாகக் கூறினால் இத்தகைய ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு செங்குத்துப் பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவாக இருந்தாலும், அதே அளவே பிற செங்குத்து பக்கத்தின் நீளமும் ஆகும். கர்ணத்தின் நீளம் இதே நீளத்தின் $\sqrt{2}$ மடங்காகும்.

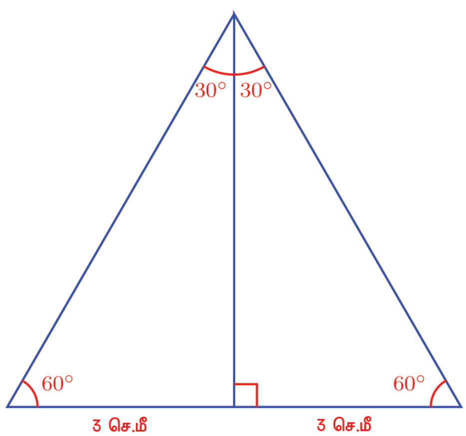
இதனை விகித மொழியில் சுருக்கி எழுதலாம்:

கோணங்கள் $45°$, $45°$, $90°$ உள்ள எந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களும் $1:1:\sqrt{2}$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும்.

மேலும் இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



இதனை ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் பாதியாகப் பார்க்க முடிகிறதா?



இந்தச் சமப்பக்க முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் 6 சென்டிமீட்டர் எனில் மற்ற இரு பக்கங்களும் அதே அளவே ஆகும். அப்போது நமது செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளமும் ஆயிற்று:

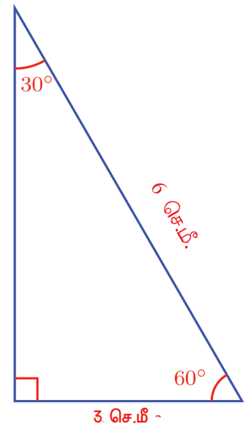
பூமியும் வானமும்

முக்கோணங்களின் கோணங்களின் அளவுகளுக்கும் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைப் பற்றிய கற்றலே முக்கோணவியல் (trigonometry).

சரிவின், விரிவின், திரிவின் அளவாகக் கோண அளவுகளைப் பயன்படுத்துவதைக் கண்டோம்.

வரலாற்றில் சரிவின் அளவுகள் பூமியில் பல்வேறு கட்டுமானப் பணிகளில் முதலில் பயன்படுத்தப்பட்டன. திரிவின் அளவுகள் விண்கோள்களைப் பற்றிய ஆராய்ச்சியில் பயன்படுத்தப்பட்டன.

பூமியின் தேவைகளுக்கு ஏற்ப பண்டைய வானவியல் ஆராய்ச்சிகள் நடந்துள்ளன. உணவு உற்பத்தி, அதாவது வேளாண்மை, காலநிலையைச் சார்ந்தது. காலநிலையைக் கட்டுப்படுத்தும் ஒரு காரணி சூரியனைச் சுற்றிவரும் பூமியின் சுழற்சியாகும். இதைச் சரியாகத் தெரிந்துகொள்வதற்கு ஏனைய கோள்கள், விண்மீன்கள் இவற்றின் இடத்தை உறுதிப்படுத்தித் தெரிய வேண்டும். இதனாலேயே பண்டைய வேளாண் கலாச்சாரங்கள் அனைத்திலும் வானவியல் ஒரு முக்கியமாக கற்றல் பொருளாக அமைந்தது. அதற்குக் கணிதம் குறிப்பாக வடிவியல் மிக அவசியமானதும் ஆகும்.



மூன்றாவது பக்கமோ?

$$\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{(6+3)(6-3)} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ செ.மீ.}$$

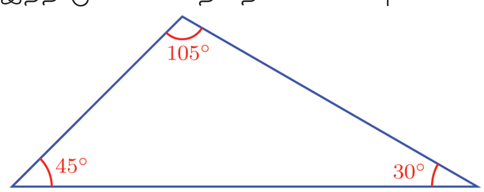
அடிப்பக்கத்தை 2 சென்டிமீட்டராகக் குறைத்து, இத்தகைய ஒரு முக்கோணம் வரைந்தால்?

கர்ணம் 4 சென்டிமீட்டராகும். மூன்றாவது பக்கம் $2\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டராகும்.

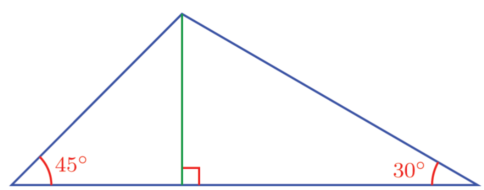
அப்போது இதைப் போன்ற முக்கோணங்கள் அனைத்திலும் மிகச் சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கே மிகப் பெரிய பக்கம்; இடைப்பட்ட பக்கம் $\sqrt{3}$ மடங்கும்.

> கோணங்கள் 30°, 60°, 90° உள்ள எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும்.

இத்தகைய இரு வகை முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தி, செங்கோணம் அல்லாத சில முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் இடையே உள்ள விகிதத்தைக் கணக்கிடலாம். எடுத்துக் காட்டாக, இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:

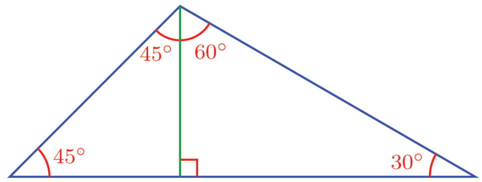


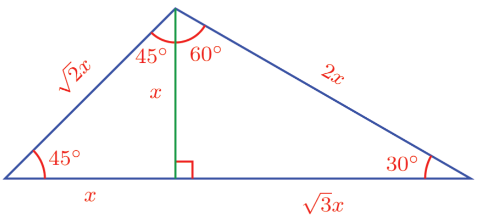
மேலே உள்ள உச்சியிலிருந்து கீழ்ப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் இதனை இரு செங்கோண முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம் அல்லவா:



ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் எனில் அதன் கோணங்கள் 30^0, 60^0, 90^o ஆகுமா? ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்திச் சோதித்துப் பார்க்கவும். முதலில் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்திலுள்ள முக்கோணங்கள் வரைவோம். இதற்காக Min = 0 வரக்கூடிய விதத்தில் ஒரு சிலைடர் a உருவாக்கவும், Segment with Given Length பயன்படுத்தி ஒரு புள்ளியில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோட்டின் நீளம் a* sqrt (3) எனக் கொடுக்கவும். (a $\sqrt{3}$ என்பதே இதன் பொருள்) இந்தக் கோட்டின் ஒரு முனையை மையமாகக் கொண்டு ஆரம் a ஆக ஒரு வட்டமும். மறு முனையை மையமாகக் கொண்டு ஆரம் 2a ஆக வேறொரு வட்டமும் வரையவும். இந்த வட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியும் கோட்டின் முனைப்புள்ளிகளும் உச்சிகள் ஆகும்படி ஒரு முக்கோணம் வரையவும். முக்கோணத்தின் கோணங்களை அடையாளப் படுத்திப் பார்க்கவும். இதே முறையில், பக்கங்கள் $2 : \sqrt{5} + 1 : \sqrt{5} + 2$ என்ற விகிதத்தில் அமையுமாறு முக்கோணங்கள் வரைந்து கோணங்களை அளந்து பார்க்கவும்.

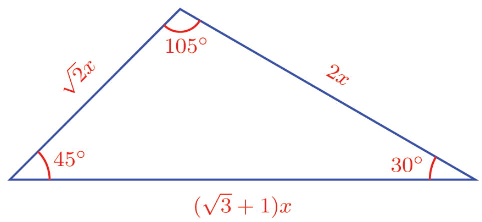
இந்தச் செங்கோண முக்கோணங்களின் மேல் உச்சியில் உள்ள கோணங்கள் என்ன?





பக்கங்களின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு இரு செங்கோண முக்கோணங்களின் பொதுப் பக்கத்தின் நீளத்தை x என எடுத்தால், முன்னர் கண்ட விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி மற்ற பக்கங்களின் நீளங்களை x இன் மடங்குகளாக எழுதலாம்:

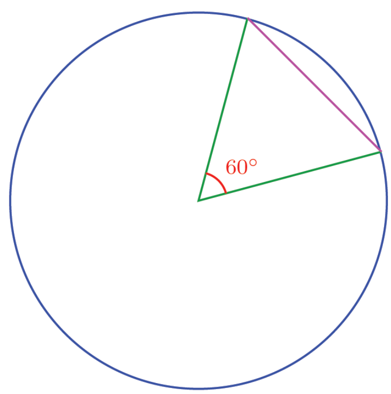
அப்போது முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் இவ்வாறாகும்:

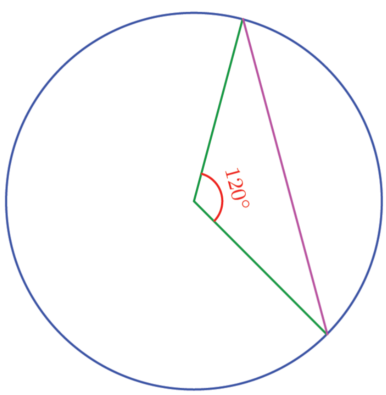


அதாவது,

முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3} + 1$

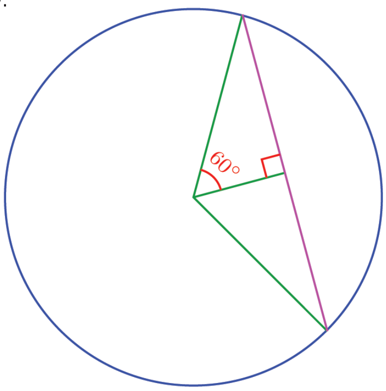
வேறு சில அளவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கும் முக்கோண விகிதங்கள் பயன்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வட்டத்தின் மையக்கோணம் 60° உள்ள நாணின் நீளம், ஆரத்திற்குச் சமம் என எளிதாகக் காணலாம்:



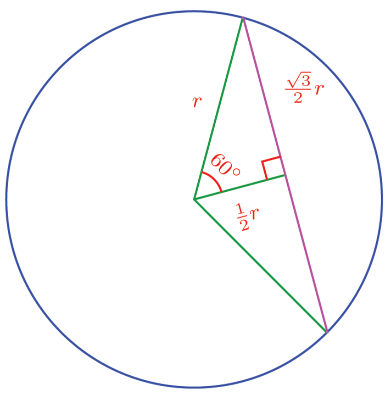


மையக்கோணம் 120° உள்ள நாணின் நீளமோ?

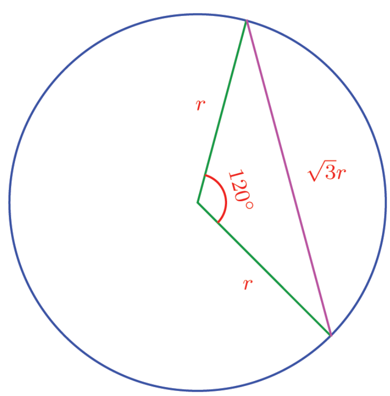
இதைக் கணக்கிடுவதற்கு மையத்திலிருந்து நாணிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையவேண்டும். அது நாணையும் மையக் கோணத்தையும் சமப்பாகம் செய்யும் அல்லவா (காரணம்?):



ஆரமும் அரைநாணும் செங்குத்துக்கோடும் சேர்ந்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 30°, 60°, 90°. அப்போது ஆரத்தின் நீளத்தை r என எடுத்தால், செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $\frac{1}{2}r$ எனவும், அரைநாணின் நீளம் $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ எனவும் காணலாம்:



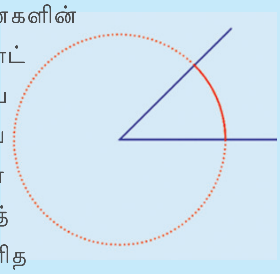
அப்போது மையக்கோணம் 120° உள்ள நாணின் நீளம், ஆரத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்கு ஆகும்:

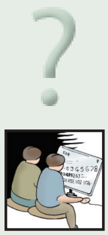


மையக்கோணம் இரு மடங்காகும் போது வில் இரு மடங்கு ஆகும் எனக் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. ஆனால் நாண் இரு மடங்கு ஆகவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

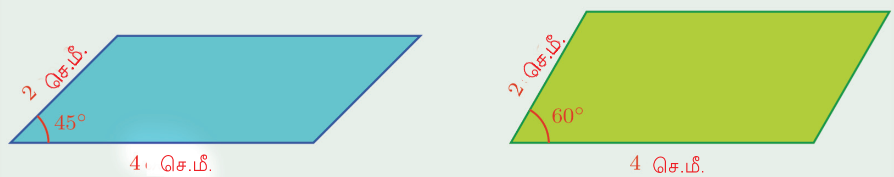
நேர் வழி?

கோணத்தின் அளவைக் குறிப்பிடுவதற்காகப் பயன்படுத்துவது ஒரு வில்லின் நீளம் அல்லவா. அதற்குப் பதிலாக நாணின் நீளத்தைப் பயன்படுத்திய கணக்கீடுகளையே கி.மு இரண்டாம் நூற்றாண்டில் கிரேக்க ஹிப்பார்க்கஸ் என்ற கணித மேதை பயன்படுத்தினார் வேறுபட்ட மையக்கோணங்களைக் கொண்ட நாண்களின் நீளங்களைக் காட்டும் ஒரு பெரிய அட்டவணையை இவர் எழுதினார் என்று பிற்காலத்தில் பல கணித மேதைகளும் கூறினர். எனினும் அது கிடைக்கப்பெறவில்லை, கி.பி. இரண்டாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த எகிப்தின் கிளோடியஸ் டோலமி (Claudius Ptolemy) இத்தகைய ஓர் அட்டவணையை உருவாக்கினார். அது கிடைத்துள்ளது. இதில் ஆரம் 60 ஆன ஒரு வட்டத்தில் $\frac{1}{2}^{\circ}$ இடைவிட்டு 180° வரையுள்ள மையக் கோணம் உருவாக்கும் நாண்களின் நீளங்களை மிகத் துல்லியமாக அவர் கணக்கிட்டுள்ளார்.

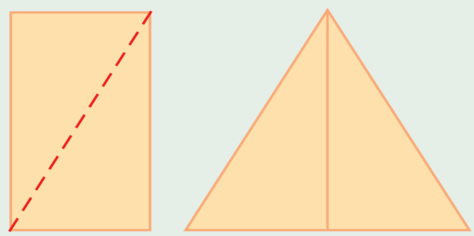




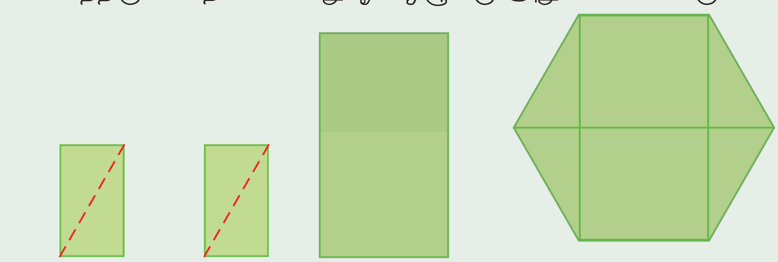
(1) கீழே தரப்பட்டிருக்கும் இணைகரங்களின் பரப்பளவைக் காண்க.



(2) ஒரு செவ்வகப்பலகையை மூலைவிட்டத்தின் வழியாக வெட்டி, படத்தில் காண்பித்திருப்பதைப் போன்று மாற்றி அடுக்கி, ஓர் இருசமப்பக்க முக்கோணம் உருவாக்கவும். முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 50 சென்டிமீட்டராக இருக்க வேண்டும். செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு?

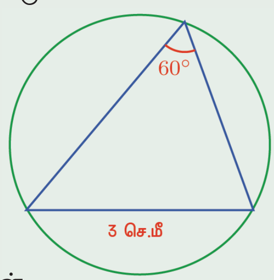


(3) இரு செவ்வகங்களை மூலைவிட்டத்தின் வாயிலாக வெட்டி முக்கோணங்கள் ஆக்குக. வேறொரு செவ்வகத்துடன் சேர்த்து வைத்து கீழ்க் காண்பித்திருப்பதைப் போன்று ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம் உருவாக்கவும்:

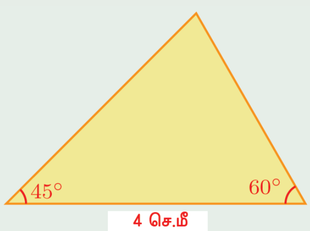


அறுகோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 30 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டுமெனில் செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவாக வேண்டும்?

(4) ஒரு முக்கோணமும் அதன் சுற்றுவட்டமும் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன:
வட்டத்தின் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ஆகும்?



(5)



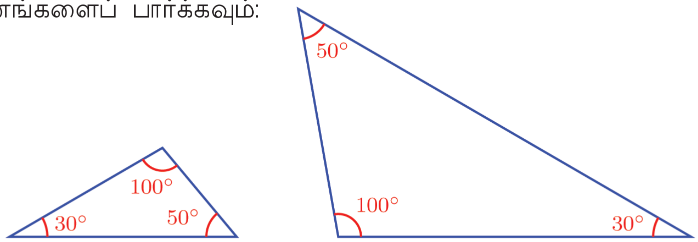
படத்தில் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக?

(6) பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆன சமப்பக்க முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர்?

புதிய கோண அளவுகள்

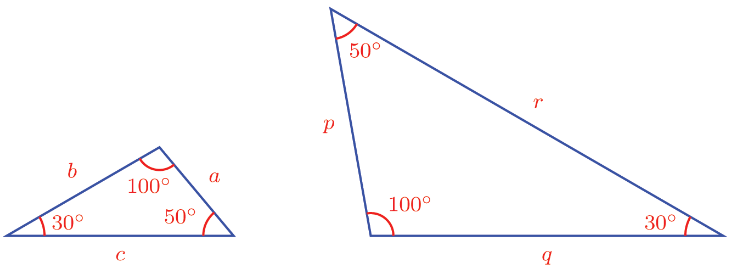
சில முக்கோணங்களின் கோணங்களிலிருந்து அவற்றின் பக்கங்களின் இடையே உள்ள விகிதத்தைக் கணக்கிட்டோம் அல்லவா. எந்த முக்கோணத்திலும் இதைப்போன்று கோணங்கள், பக்கங்களின் விகிதத்தை உறுதிப்படுத்துகின்றனவா?

ஓர் எடுத்துக்காட்டின் வாயிலாக வினாவைத் தெளிவுபடுத்தலாம். இந்த முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்:



இரு முக்கோணங்களிலும் ஒரே கோணங்கள் ஆகும். அப்படியானால், சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் தானா பெரிய முக்கோணத்திலும்?

சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் அளவின் அடிப்படையில் a, b, c எனவும் பெரிய முக்கோணத்தில் p, q, r எனவும் எழுதிப் பார்ப்போம்:



இரு முக்கோணங்களிலும் சமமான கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களின் ஜோடிகளின் நீளம் ஒரே அளவு வீதத்தில் மாறுகிறது என்பதனை ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டோம்.

அதாவது a, b, c என்ற எண்களின் ஒரே மடங்கே p, q, r என்ற எண்கள். இந்த மடங்கை k என எடுத்தால்,

$$p = ak \qquad q = bk \qquad r = ck$$

எனக் கூறலாம். விகித மொழியில்

$$a : b : c = p : q : r$$

எனவும் கூறலாம்.

அதாவது,

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களைப் பலஅளவுகளில் வரைந்தால், பக்கங்களின் நீளம் மாறும் எனினும் அவற்றின் இடையே உள்ள விகிதம் மாறுவதில்லை.

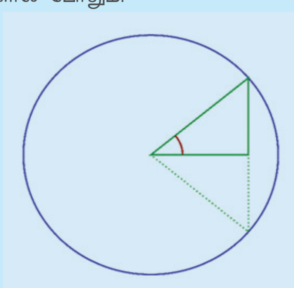
வேறொரு முறையில் கூறினால்,

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள், அவற்றின் பக்கங்களின் விகிதத்தை உறுதிப்படுத்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, முன்னர் கண்டதற்கு ஏற்ப 30°, 60°, 90° ஆன எந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும். வேறு சில கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களிலும் பக்கங்களின் விகிதத்தைக் கணக்காக்கினோம் அல்லவா.

பாதி நாண்

தாலமியின் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் ஒரு கோணத் திற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்தைக் கண்டுபிடிப்ப தற்குக் கோணத்தை இருமடங்கு ஆக்குவதோடு நாணைப் பாதி ஆக்கவும் வேண்டும். இதனைத் தவிர்க்க ஒவ்வொரு கோணத்தையும் அதன் இரு மடங்கு ஆன கோணத்தின் பாதி நாணை யும் தொடர்புப்படுத்தி அட்டவணையை உரு வாக்கினால் போதும்.

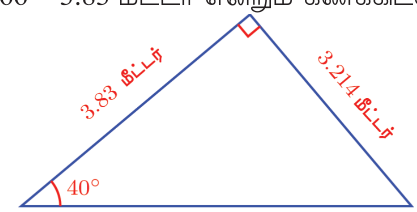


கி.பி ஐந்தாம் நூற்றாண்டில் பாரதத்தில் எழுதப்பட்ட 'சூரிய சித்தாந்தம்' என்ற வான வியல் நூலில் இத்தகைய ஓர் அட்டவணை யைக் காணலாம். இதே காலகட்டத்தில் பார தத்தின் புகழ் பெற்ற வானவியல் நிபுணர் ஆரியபட்டர் எழுதிய 'ஆரியப்பட்டயம்' என்ற நூலிலும் இத்தகைய அட்டவணை களைப் பயன்படுத்திச் செய்த செயல்களைக் காணலாம். இந்தக் கோணஅளவை அவர் 'அர்த்தஜ்யா' என அழைத்தார். (நாண் வட மொழியில் 'ஜ்யா' எனக் கூறப்படுகிறது.

பொதுவாகக் கோணங்களிலிருந்து பக்கங்களின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுவது எளிது அல்ல. ஆயினும் பல காலங்களுக்கு முன்னர் கணித மேதைகள் எல்லாச் செங்கோண முக்கோணங்களிலும் இந்த விகிதத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு உரிய வழிமுறைகளைக் கண்டுபிடித்ததுடன் அவ்வாறு கணக்கிட்ட எண்களைச் சிறப்பு முறையில் அட்டவணை யாக்கவும் செய்துள்ளனர்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கோணம் 40° ஆன செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் தோராயமாக 0.6428 பாகமாகும். இந்தக் கோணத்தின் எதிரே உள்ள பக்கம், 0.7660 பாகமாகும். ஏனைய செங்குத்துப் பக்கங்களையும் இந்த அட்டவணை யிலிருந்து காணலாம்.

அப்படியானால் கர்ணம் 5 மீட்டரும் ஒரு கோணம் 40° உம் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தில் இந்தக் கோணத்தின் எதிரே உள்ள பக்கத்தை மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாக எடுத்தால் $5 \times 0.6428 = 3.214$ மீட்டர் என்றும் மூன்றாவது பக்கம் $5 \times 0.766 = 3.83$ மீட்டர் என்றும் கணக்கிடலாம்:



இவ்வாறு கணக்கிடும் எண்களுக்குத் தனிப் பெயர்கள் உள்ளன. இப்போது கண்ட கணக்கில் 0.6428 என்ற எண் 40° கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கத்தைக் கர்ணத்தால் வகுத்தது ஆகும். இது 40° கோணத்தின் சைன் (sine of 40°) எனக் கூறப்படுகிறது; $\sin 40^\circ$ என எழுதலாம்.

இரண்டாவது எண் 0.766 என்பது 40° கோணத்தின் சிறிய பக்கத்தைக் (இது கோணத்தின் அடுத்துள்ள பக்கம் எனக் கூறப்படுகிறது) கர்ணத்தால் வகுத்துக் கிடைக்கும் எண்ணாகும். இதனை 40° இன் கொசைன் (cosine of 40°) எனக் கூறுவதுடன், $\cos 40^\circ$ எனச் சுருக்கி எழுதவும் செய்யப்படுகிறது.

அதாவது,

$$\sin 40^\circ \approx 0.6428$$

$$\cos 40^\circ \approx 0.7660$$

இவ்வாறு 1° இடைவிட்டுள்ள எல்லாக் கோணங்களின் சைனும் கொசைனும் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அதன் ஒரு சிறிய பகுதியே கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது:

கோணம்	sin	cos
35°	0.5736	0.8192
36°	0.5878	0.8090
37°	0.6018	0.7986
38°	0.6157	0.7880
39°	0.6293	0.7771
40°	0.6428	0.7660

(முழு அட்டவணை பாடப்பகுதியின் இறுதியில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது)

இந்த அட்டவணையிலிருந்து

$$\sin 35^\circ \approx 0.5736$$

$$\cos 35^\circ \approx 0.8192$$

எனக் காணலாம்.

இதே எண்களை வேறொரு விதத்தில் விளக்கிக் கூறலாம்:

35° அளவு உள்ள ஒரு கோணின் ஒரு பக்கத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடுத்தப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைகிறோம் எனக் கருதவும். கோணத்தின் மூலையிலிருந்து இந்த புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் 0.5736 பாகமாகும். செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்; இந்தத் தூரத்தின் 0.8192 பாகமாகும். செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளிக்கும் கோணத்தின் உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்:

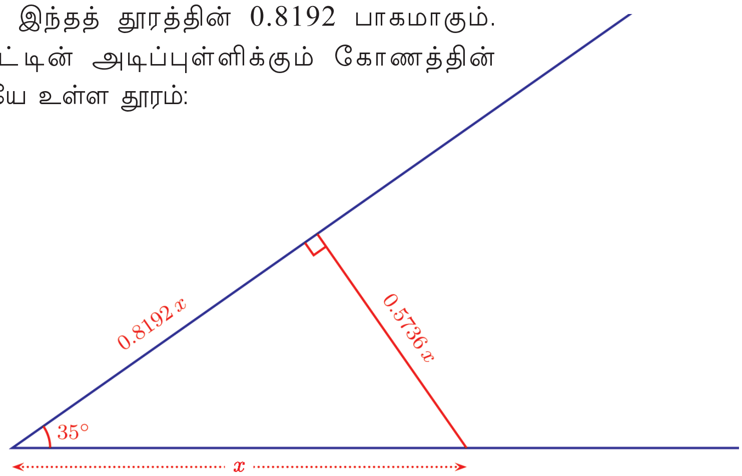
பெயர் வந்த வழி

ஆரியப்பட்டரால் கோணத்தின் 'அர்த்தஜியா' என்று அழைக்கப்பட்ட அளவே இன்று Sin என்ற பெயரில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இந்தப் பெயர் கிடைத்த கதை இவ்வாறாகும்.

ஆரியபட்டர் தனது பிற்காலத்தில் 'அர்த்த' என்ற அடைமொழியைத் தவிர்த்தார். ஜ்யா என்பதை மட்டுமே பயன்படுத்தினார். கி.பி.ஏழாம் நூற்றாண்டு முதல் அரபு நாட்டு மன்னர்கள் கிரேக்கத்திலும் பாரதத்திலும் உள்ள சிறந்த அறிவியல் படைப்புகளை அரபு மொழியில் மொழிபெயர்ப்பு செய்வதை ஊக்கப்படுத்தினார். ஆரியபட்டயத்தை மொழி பெயர்ப்பு செய்தவர்கள், ஜ்யா என்ற சொல்லை பெரிய மாற்றங்களுக்கு உட்படுத் தாமல் ஜ்ப் எனப் பயன்படுத்தினர். பண்டைய அரபுப் படைப்புகளில் உயிரெழுத்துக்கள் எழுதாத மையால் இதை ஜ்ப் எனக் குறிப்பிட்டனர்.

பிற்காலத்தில் கி.பி.பதிமூன்றாம் நூற்றாண்டில் இந்த அரபுப் படைப்புகள் அனைத்தும் ஐரோப்பாவில் கொண்டு செல்லப்பட்டு இலத்தீன் மொழியில் மொழிபெயர்ப்பு செய்யப்பட்டன. 'ஜ்ப்' என அரபியில் எழுதியிருந்தது. 'ஜைப்' என்ற சொல் எனத் தவறாகப் புரிந்து கொண்டனர். இந்தச் சொல்லிற்கு அரபியில் வளைவு, மடிப்பு எனப் பொருள்கொள்ளப்படுகிறது. இந்தப் பொருளில் அமைந்த இலத்தீன் சொல்லான sinus என மொழிபெயர்ப்பு செய்தனர். காலப்போக்கில், இது மாறுதலுக்கு உட்பட்டு sine என ஆயிற்று.

'கோடிஜ்யா' என்று ஆரியப்பட்டர் குறிப்பிட்ட அளவு cosine என்று ஆயிற்று.



40° கோணம் எனில் இந்த நீளங்கள், முன்னர் கண்டதைப் போன்று, 0.6428 பாகமும், 0.766 பாகமும் ஆகும்.

இப்படிப் பார்த்தால், சைனும் கொசைனும் கோணங்களின் அளவைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்களாகும் எனக் காணலாம்.

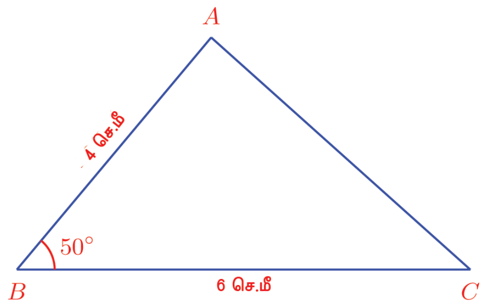
இருவகை செங்கோண முக்கோணங்களைக் குறித்து முன்னர் கண்டறிந்தவற்றை இனி சைனும் கொசைனும் ஆக எழுதலாம்.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

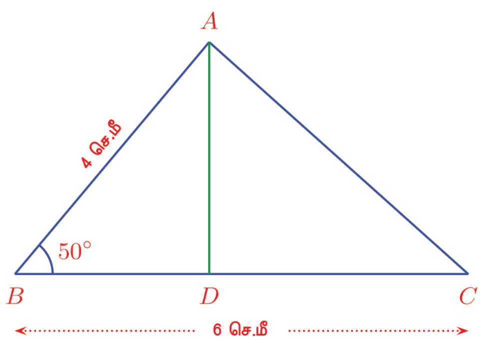
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

சைனும் கொசைனும் பயன்படுத்தி உள்ள சில கணக்குகளைப் பார்க்கலாம்:



இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட வேண்டும்



அதற்கு A இல் இருந்து BC க்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும்.

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

இதில் AD ஐ எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பீர்கள்?

படத்தில் ABD என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$AD = AB \times \sin 50^\circ = 4 \sin 50^\circ$$

சைன், கொசைன் அளவுகள்

ஜியோஜிப்ராவில், நீளம் 1 ஆன AB என்ற கோடு வரையவும். ஒரு Angle ஸ்லைடர் α உருவாக்குக. Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி B, A என்பவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவாக α எனக் கொடுக்கவும். புதிய ஒரு புள்ளி B' கிடைக்கும். இந்த புள்ளி வழியாக AB' க்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து அது AB' ஐ வெட்டுகின்ற புள்ளி C என அடையாளப்படுத்தவும். முக்கோணம் ABC வரைந்த பின்னர் AB ஐ மறைத்து வைக்க வேண்டும். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை அடையாளப்படுத்தவும். கோணஅளவு மாறுவதற்கு ஏற்ப பக்கங்களின் நீளங்கள் மாறுவதைக் காணலாம். இதில் BC இன் நீளம் கோண அளவின் sin அளவும் AC இன் நீளம் cos அளவும் (எதனால்?) இதைப் பயன்படுத்தி sine, cosine அளவுகளின் ஓர் அட்டவணை தயார் செய்க. sine, cosine எண்கள் இயன்றவரையில் கூடுதலாக எத்தனை வரை ஆகலாம்?

இந்த அட்டவணையிலிருந்து

$$\sin 50^\circ \approx 0.7660$$

எனக் கிடைக்கும். அப்போது

$$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

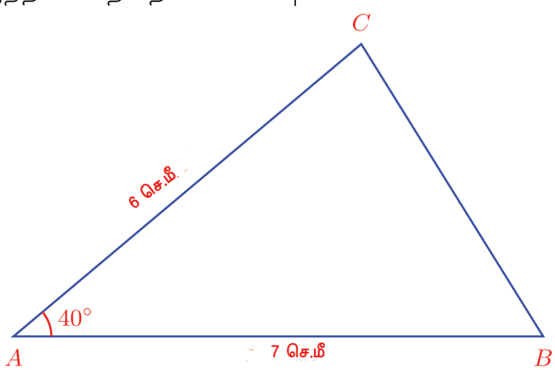
இனி பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா.

$$3 \times AD = 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

அதாவது, பரப்பளவு தோராயமாக, 9.19 சதுர சென்டிமீட்டர்.

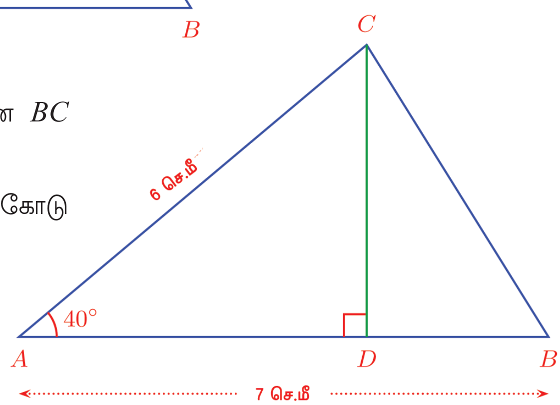
இந்தக் கணக்கில் B இன் கோணம் 50° க்குப் பதிலாக 130° எனில் பரப்பளவை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

மேலும் இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமான BC இன் நீளத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

C இல் இருந்து AB க்கு உள்ள செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும் என்பதே வாய்ப்பாடு:



இப்போது BCD என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

மேலும் BD உம் DC உம் கண்டுபிடிப்போம்.

ACD என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$DC = AC \sin 40^\circ \approx 6 \times 0.6428 \approx 3.86 \text{ செ.மீ.}$$

எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். மேலும் இதே முக்கோணத்திலிருந்து

$$AD = AC \cos 40^\circ \approx 6 \times 0.766 \approx 4.6 \text{ செ.மீ.}$$

என்றும் காணலாம். அப்போது

$$BD = AB - AD \approx 7 - 4.6 = 2.4 \text{ செ.மீ.}$$

இனி

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} \approx \sqrt{3.86^2 + 2.4^2} = 4.54 \text{ செ.மீ.}$$

எனக் காணலாம் அல்லவா. அதாவது BC இன் நீளம் தோராயமாக 4.5 செ.மீ ஆகும்.

இந்தக் கணக்கில் A இன் கோணம் 100° எனில் BC இன் நீளத்தை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

(1) படம் வரையலாம் அட்டவணையைப் பார்க்காமல்

$\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$

என்ற எண்களை அளவின் அடிப்படையில் எழுதவும்.

(2) ஒரு சமப்பக்க இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 5 செ.மீ ஆகும். அதன் ஒரு கோணம் 100° உம் ஆகும். அதன் பரப்பளவு கணக்கிடுக.

(3) ஓர் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டரும், 12 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். இவற்றின் இடையே உள்ள கோணம் 50° அதன் பரப்பளவு காண்க.

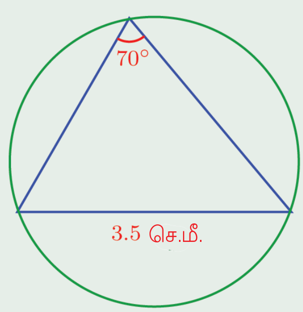
(4) ஓர் இணைகரத்தின் இரு பக்கங்கள் 6 சென்டிமீட்டரும், 14 சென்டிமீட்டரும் ஆகும். அவை சேரும் கோணம் 30° . இந்த இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

(5) ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டரும் ஒரு கோணம் 40° உம் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைக. 40° கோணத்தின் எதிரே உள்ள பக்கத்தின் நீளம் இயன்றவரையில் குறைவாக எத்தனை சென்டிமீட்டராக இருக்க வேண்டும்?

(6) ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் உச்சிகள் அனைத்தும் 15 சென்டிமீட்டர் ஆரம் ஆன வட்டத்தின் புள்ளிகள் ஆகும். அந்த ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் காண்க.

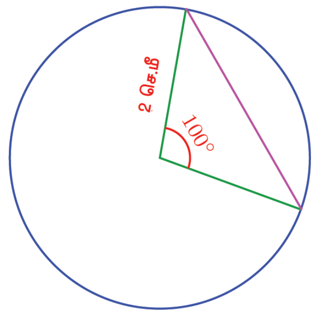
(7) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நீளம் 8 சென்டிமீட்டர், 10 சென்டிமீட்டர் ஆகும், அவற்றின் இடையே உள்ள கோணம் 40°. முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. இதே பக்கங்களும் அவற்றின் இடையே உள்ள கோணம் 140° உம் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

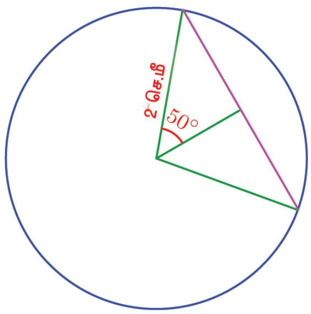
(8) படத்தில் ஒரு முக்கோணமும் அதன் சுற்றுவட்டமும் வரையப்பட்டுள்ளன. வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?



முக்கோணமும் வட்டமும்

படத்தில் நாணின் நீளத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்:





இதைப்போன்றுள்ள கணக்கில் முன்னர் செய்ததைப் போன்று வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து மையக்கோணமும் நாணும் பாதி ஆகுமாறு செய்யலாம்.

படத்தில் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் $\sin 50^\circ$ பாகம் அல்லவா எதிர்ப்பக்கம். அட்டவணையிலிருந்து

$$\sin 50^\circ \approx 0.7660$$

அப்போது நாணின் பாதி

$$2 \times 0.766 \approx 1.53 \text{ செ.மீ.}$$

எனவும் காணலாம். மொத்த நாணின் நீளம்

$$2 \times 1.53 = 3.06 \approx 3.1 \text{ செ.மீ.}$$

எந்த நாணின் நீளத்தையும் மையக்கோணத்திலிருந்து கண்டுபிடிப்பதற்கு இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம். நாணின் நீளத்தைக் கண்டுபிடிப்பதற்குச் செய்தவை யாவை?

மையக்கோணத்தின் பாதியின் சைனை ஆரத்தால் பெருக்கியபோது நாணின் பாதி கிடைத்தது. அதன் இரு மடங்கையும் எடுத்தபோது முழுநாணும் கிடைத்தது.

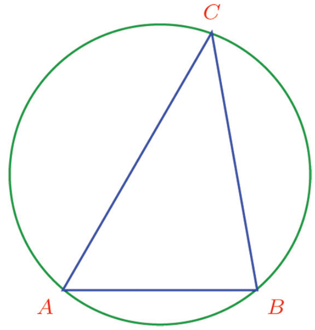
ஒரு வட்டத்தின் எந்த நாணின் நீளமும் மையக்கோணத்தின் பாதியின் சைனை ஆரத்தால் பெருக்கியதன் இரு மடங்காகும்.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திக் கூறினால்,

ஆரம் r உம் வட்டத்தின் மையக்கோணம் c° உம் எனில்,

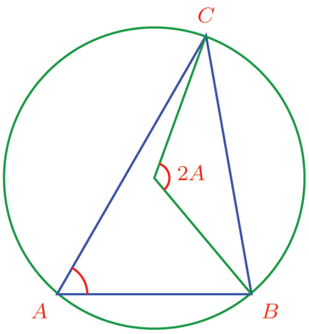
நாணின் நீளம் $2r \sin \left(\frac{c}{2}\right)^\circ$

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



ABC என்ற முக்கோணமும் அதன் சுற்றுவட்டமும், முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஆன AB, BC, CA என்பவை வட்டத்தின் நாண்கள் அல்லவா.

வட்டங்கள் என்ற பாடத்தில் கண்டதற்கு ஏற்ப BC என்ற நாணின் மையக்கோணம் முக்கோணத்தில் A இன் கோணத்தின் இரு மடங்கு ஆகும். முக்கோணத்தில் இந்தக் கோண அளவை A என எழுதினால் நாணின் மையக்கோணம் $2A$.



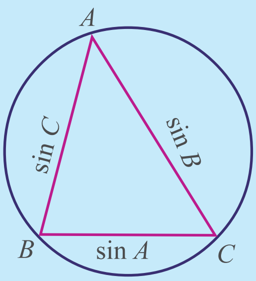
வட்டத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால், இப்போது கண்ட கோட்பாட்டின்படி, BC இன் நீளம் $2r \sin A$.

இதைப்போன்று, CA இன் நீளம் $2r \sin B$ என்றும், AB இன் நீளம் $2r \sin C$ என்றும் காணலாம்.

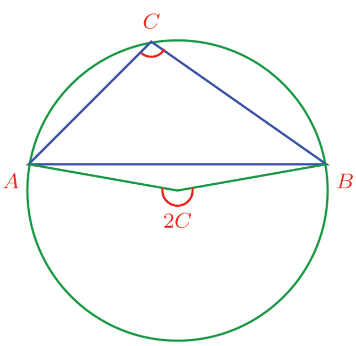
புதிய பொருள்கள்

ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட விட்டத்தை நீளத்தின் ஓர்அலகாக எடுத்தால் பக்கங்களின் நீளம் என்ன ஆகிறது?

$BC = d \sin A = \sin A$. இதைப் போன்று $CA = \sin B$, $AB = \sin C$. அதாவது ஒரு கோணத்தின் சைன் விட்டம் d ஆன வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியில் இந்தக் கோணம் உண்டாக்குகின்ற நாணின் நீளம் ஆகும்.



எல்லா முக்கோணங்களுக்கும் இது சரியாகுமோ? ஏதேனும் ஒரு கோணம் 90° ஐ விட அதிகமெனில்?



இதில் AB இன் மையக்கோணம் $360 - 2C$ ஆகும் அல்லவா, அப்போது AB இன் நீளம் $2r \sin (180 - C)$.

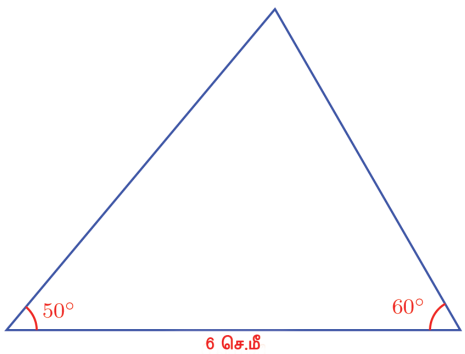
பொதுவாகக் கூறினால்,

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் அதன் கோணங்களின் சைன் அளவுகளைச் சுற்றுவட்ட விட்டத்தினால் பெருக்கியதாகும். ஏதேனும் ஒரு கோணம் செங்கோணத்தைவிட அதிகமானால், அதன் மிகை நிரப்புக்கோணத்தின் சைன் எடுக்க வேண்டும். ஒரு கோணம் செங் கோணம் எனில் அதன் எதிர்ப்பக்கம் சுற்றுவட்ட விட்டமே ஆகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் பக்கங்களின் விகிதத்தை உறுதிப்படுத்துவது எவ்வாறு என்பது இப்போது புரிந்தது அல்லவா.

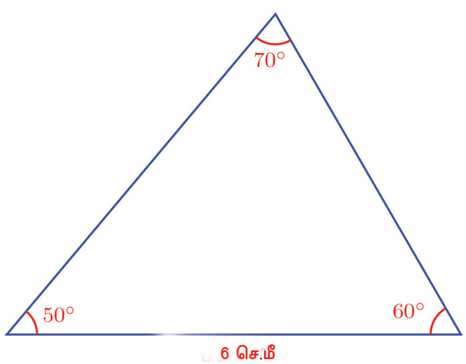
ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் எதிர் கோணங்களின் சைன் அளவுகளின் விகிதம் ஆகும். ஏதேனும் ஒரு கோணம் செங்கோணத்தை விட அதிகமெனில், அதன் மிகைநிரப்புக் கோணத்தின் சைன் எடுக்க வேண்டும். ஒரு கோணம் செங்கோணம் எனில் அதன் எதிர்ப்பக்கம் 1 ஆக எடுக்க வேண்டும்.

ஓர் எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.



படத்தில் முக்கோணத்தின் மற்ற இரு பக்கங்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

அடிப்பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் 70° ஆனால்,



சுற்றுவட்டத்தின் விட்டம் d என எடுத்தால், $d \sin 70^\circ = 6$

$$d = \frac{6}{\sin 70^\circ} \approx \frac{6}{0.94} = 6.38$$

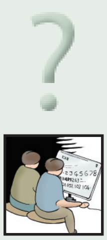
எனக் கிடைக்கும்.

மேலும் பிற இரு பக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$6.38 \times \sin 50^\circ \approx 6.38 \times 0.77 \approx 4.9$$

$$6.38 \times \sin 60^\circ \approx 6.38 \times 0.87 \approx 5.5$$

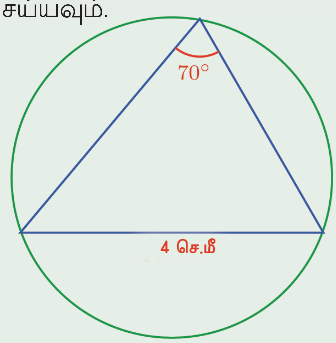
அதாவது, பிற இரு பக்கங்கள் தோராயமாக 4.9 சென்டிமீட்டரும் 5.5 சென்டிமீட்டரும் ஆகும்.



சைன், கொசைன் அட்டவணைகள் (வேண்டுமெனில் கணிப்பானும்) பயன்படுத்திக் கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளைச் செய்யவும்.

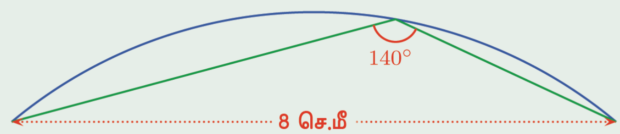
(1) படத்தில் ஒரு முக்கோணமும் அதன் சுற்றுவட்டமும் தரப்பட்டுள்ளன.

வட்டத்தின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக.



(2) 5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கோட்டின் முனைப்புள்ளிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் ஒரு வட்டம் வரைக. கோட்டின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள வட்டப் பாகத்தின் கோணம் 80° என இருக்க வேண்டும். வட்டத்தின் ஆரம் எத்தனையாக இருக்க வேண்டும்?

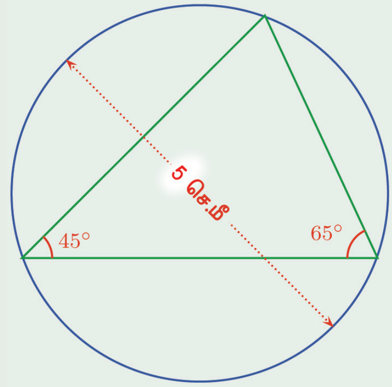
(3) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது ஒரு வட்டப்பாகம்.



முழு வட்டத்தின் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ஆகும்?

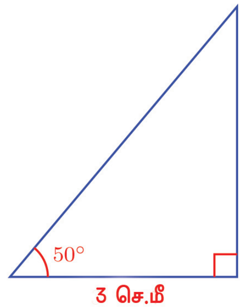
(4) தரப்பட்டுள்ள படத்தை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரையவும்.

வரைந்தது எவ்வாறு என விளக்குக.



(5) 5 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டின் ஒரு முனையில் 50° கோணமும், மறுமுனையில் 65° கோணமும் வரைந்து, ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கினால், அதன் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

வேறு ஓர் அளவு



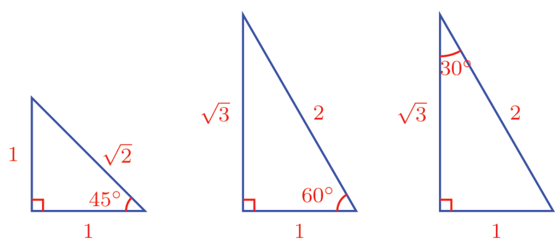
ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைய வேண்டும். சிறிய பக்கங்களில் ஒன்றின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர். அதன் மேல் உள்ள ஒரு கோணம் 50°.

அட்டவணையைப் பார்த்து $\cos 50^\circ$ ஐக் கண்டுபிடித்தால், கர்ணத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். தொடர்ந்து $\sin 50^\circ$ கொண்டு பெருக்கி மூன்றாவது பக்கமும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மேலும் எளிதாக இதைச் செய்வதற்கு மற்றொரு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம். செங்கோண முக்கோணங்களில், ஒரு கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கத்தை அடுத்துள்ள பக்கத்தினால் வகுத்துக் கிடைக்கும் எண்களின் அட்டவணை.

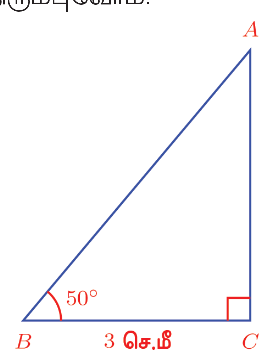
இந்த எண் கோணத்தின் டான்ஜென்ட் (tangent) எனக் கூறப்படுகிறது. சுருக்கமாக tan என எழுதப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, நாம் முதலில் கண்ட சில முக்கோணங்களைப் பார்ப்போம்.



$\tan 45^\circ = 1$ $\quad$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\quad$ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

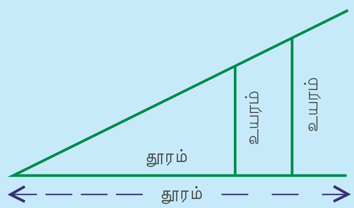
நமது பிரச்சினைக்குத் திரும்புவோம்:



சாய்வின் அளவு

வட்டத்தை 360 சமப் பாகங்கள் ஆக்கி கோணத்தை அளப்பது பண்டைய பாபிலோனியர்களின் முறையாகும். அதற்கு வானவியலுடன் தொடர்பு உண்டு. ஏறத்தாழ கி.மு.மூன்றாம் நூற்றாண்டு முதல் பாபிலோனியாவில் இந்த முறை பயன்படுத்தப்பட்டிருந்ததைக் காண முடிகிறது. இதுவே இன்றைய டிகிரி அளவு.

எனினும் பூமியில் கட்டுமானப் பணிகளில் சரிவை அளப்பதற்கு வேறொரு முறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இந்தப்படத்தைப் பார்க்கவும்.



படத்தில் காணபதைப் போன்று கோணத்தின் வித்தியாசமான இடங்களில் தூரமும் உயரமும் மாறினாலும் உயரத்தை தூரத்தினால் வகுத்தால், ஒரே எண் தானே கிடைக்கும், (காரணம்?) ஒவ்வொரு கோணத்தினுடையவும், அளவுக்கு ஏற்ப இந்த எண் மாற்றம் அடையும். இந்த எண் சாய்வின் அளவாக எடுக்கப்பட்டிருந்தது.

பண்டைய எகிப்தில் ஆஹ்மோஸ் பப்பைரஸில் இத்தகைய சில கணக்கீடுகளைக் காணலாம். சதுரக் கூம்புகளில் அடிப்பக்கத்திற்கும் ஒரு முகத்திற்கும் இடையில் உள்ள சாய்வு இவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

பண்டைய பாபிலோனியாவில் ஒரு களிமண் பலகையில் பல செங்கோண முக்கோணங்களில் கர்ணத்தை மற்றொரு பக்கம் கொண்டு வகுத்தால் கிடைக்கும் எண்கள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம்.

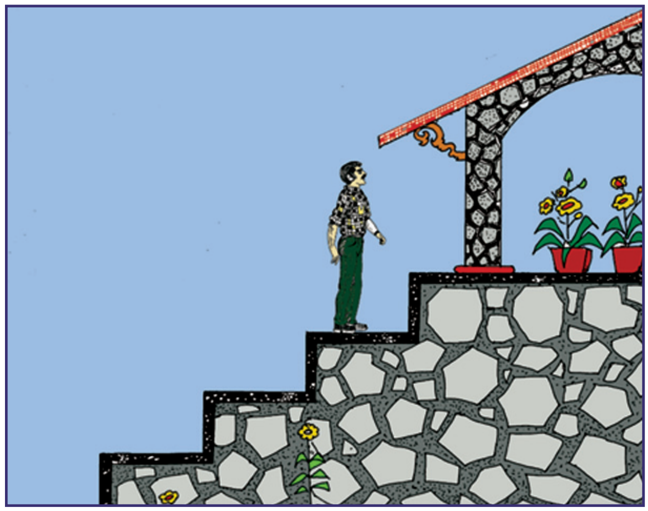
இப்போது கூறியதற்கு ஏற்ப,

$$\frac{AC}{BC} = \tan 50^\circ$$

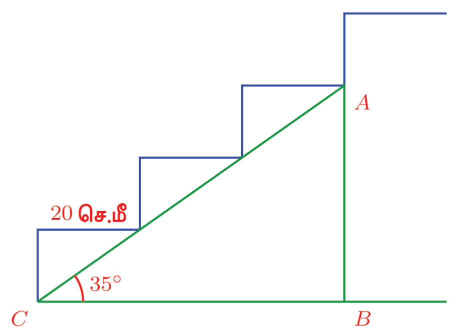
மேலும் படத்தையும் அட்டவணையையும் பயன்படுத்தி AC ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$AC = BC \times \tan 50^\circ \approx 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6 \text{ செ.மீ.}$$

கோணத்தின் tan அளவு பயன்படும் ஒரு சூழலைப் பார்க்கவும். படத்தில் ஒருவர் நிற்பது எந்த உயரத்தில் என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.



படிக்கட்டுகளின் அளவுகள் இவ்வாறாகும்.



கண்டுபிடிக்க வேண்டிய உயரம் AB அல்லவா.

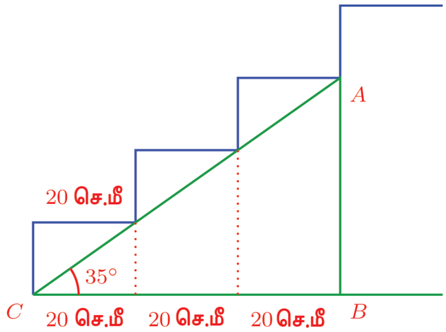
படத்திலிருந்து

$$AB = BC \times \tan 35^\circ$$

இதில்

$$\tan 35^\circ \approx 0.7002$$

என்ற அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கும். BC இன் நீளமோ?



இந்தப் படத்திலிருந்து BC இன் நீளம் 60 சென்டிமீட்டர் ஆகும் எனக் காணலாம். அப்போது

$$AB = BC \times \tan 35^\circ \approx 60 \times 0.7002 \approx 42.01$$

அதாவது உயரம் தோராயமாக 42 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

மற்ற அளவுகள்

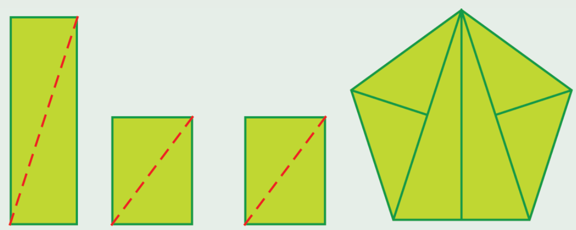
ஒரு கோணம் உட்படும் செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து அதன் பக்கங்களின் நீளங்களை பல முறைகளில் வகுத்து sin, cos, tan என்ற அளவுகள் உருவானதைக் கண்டோம். பக்கங்களின் இடையில் வேறு வகுத்தல்கள் உள்ளன அல்லவா. அவற்றிற்கும் முக்கோணவியலில் பெயர்கள் உள்ளன.

ஒரு முக்கோணத்தின் sin, cos என்பவற்றின் தலைகீழிகளுக்குக் கொசிகன்ட் (cosecant), சீகன்ட்(secant) எனப்பெயரிடப்பட்டுள்ளன. tan-இன் தலைகீழிக்குக் கொடான்ஜென்ட்(cotangent) எனவும். இவற்றைச் சுருக்கி cosec, sec, cot எனவும் எழுதப்படுகின்றன.

(1) ஒரு சமபக்க இணைகரத்தின் ஒரு கோணம் 50° ஆகும். ஒரு மூலை விட்டம் 5 சென்டிமீட்டரும்; அதன் பரப்பளவு எவ்வளவு?

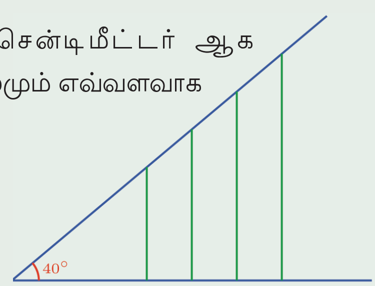
(2) சுவரின் மீது ஓர் ஏணி சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப் பக்கம் சுவரிலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது. ஏணிக்கும் தரைக்கும் இடையே உள்ள கோணம் 40° ஆகும். ஏணியின் மேல் முனை தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது?

(3) மூன்று செவ்வகங்களை மூலை விட்டங்களின் வழியாக வெட்டி முக்கோணங்களாக்கி, படத்தில் காண்பித்திருப்பதைப் போன்று சேர்த்து வைத்து, ஓர் ஒழுங்கு ஐங்கோணம் உருவாக்க வேண்டுமெனில் செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?



ஐங்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் 30 சென்டிமீட்டர் ஆக வேண்டுமெனில், செவ்வகங்களின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

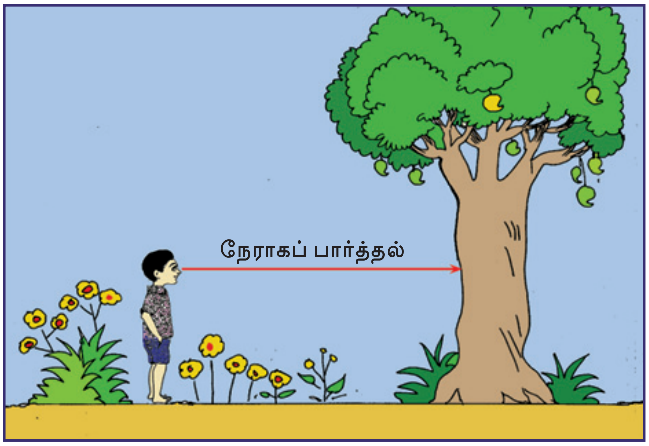
(4) படத்தில் நேர்கோடுகள் ஒரே தூரத்தில் இடைவிட்டு வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் உயரங்கள் கூட்டுத்தொடரில் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும். பொதுவித்தியாசம் எவ்வளவு?

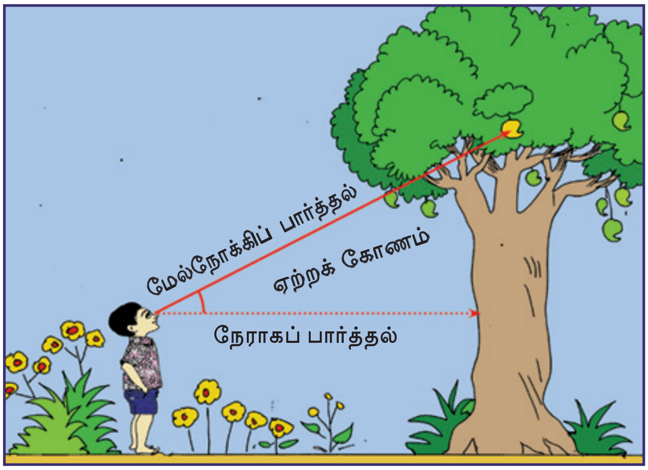


(5) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 6 சென்டிமீட்டரும் அதன் இரு முக்கோணங்கள் 40° உம் 65° உம் ஆகும். முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தூரங்களும் உயரங்களும்

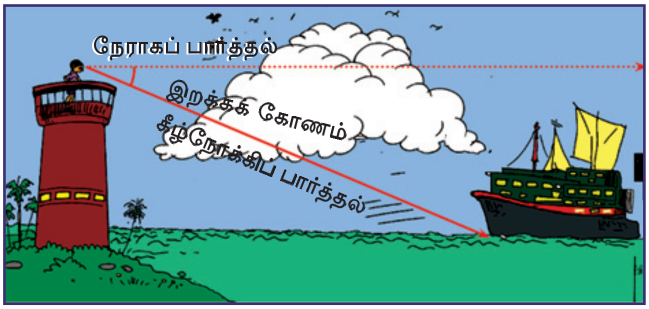
நம்மைவிட உயரத்தில் உள்ளவற்றைக் காண்பதற்கு, தலையை சிறிது உயர்த்த வேண்டும் அல்லவா. இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்





சாதாரணமாக, நமது பார்வையின் பாதை தரைக்கு இணையானது ஆகும். உயரத்தில் உள்ளவற்றைப் பார்க்கும் போது இது மேல்நோக்கி உயரும். இந்த இரு கோடுகளின் இடையே உள்ள கோணத்தை ஏற்றக்கோணம் (angle of elevation) எனக் கூறுகிறோம்.

இதைப்போன்று உயரத்தில் நிற்கும் போது கீழே உள்ளவற்றைக் காண்பதற்குப் பார்வையைக் கீழ்நோக்கிச் செலுத்த வேண்டும் அல்லவா.



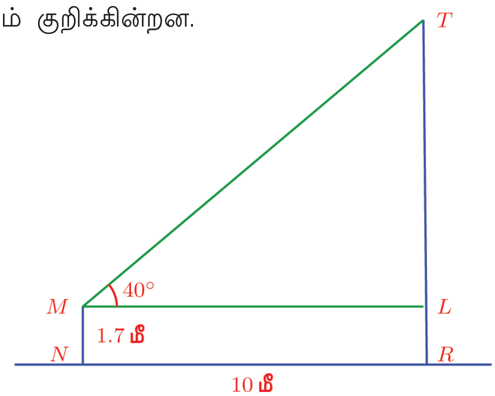
இவ்வாறு உருவாகும் கோணத்தை இறக்கக் கோணம் (angle of depression) என அழைக்கிறோம்.

இத்தகைய கோணங்களை அளப்பது கிளினோமீட்டர் (clinometer) என்ற கருவியைப் பயன்படுத்தியாகும். நேரடியாக அளக்க முடியாத தூரங்களும் உயரங்களும் எல்லாம் கிளினோ மீட்டரைப் பயன்படுத்திக் கோணம் அளந்தும் சைனும் கொசைனும் டானும் பயன்படுத்திக் கணக்கீடு செய்தும் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

> ஒரு மரத்தின் அடியிலிருந்து 10 மீட்டர் தூரத்தில் நிற்கும் ஒருவர் மரத்தின் மேல் உச்சியை 40° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்க்கிறார். அவரின் உயரம் 1.7 மீட்டராகும். மரத்தின் உயரம் காண்க?

படத்தில் MN என்ற கோடு, பார்க்கும் நபரையும், TR மரத்தையும் குறிக்கின்றன.



படத்திலிருந்து (அட்டவணையும் பயன்படுத்தி),

$$TL = ML \tan 40^\circ \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

எனக் காணலாம். அப்போது,

$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.391 + 1.7 = 10.091$$

அதாவது, மரத்தின் உயரம் தோராயமாக 10.09 மீட்டராகும்.

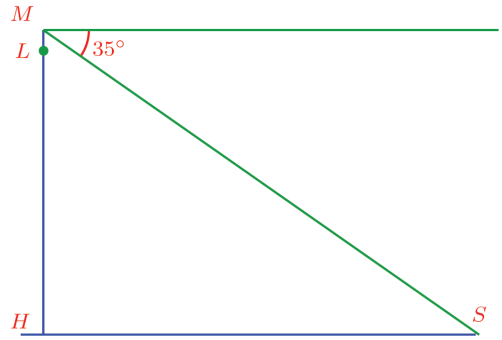
மற்றொரு கணக்கு:

> 1.8 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒருவர் 25 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் மேலிருந்து பார்த்தபோது, 35° இறக்கக் கோணத்தில் ஒரு கப்பலைக் காண்கிறார். அது கலங்கரை விளக்கத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும்?

டான் அளவுகள்

சைன், கொசைன் போன்று ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி, டான் காண்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம் நீளம் 1 என AB என்ற கோடும் B இன் வழியாக AB க்குச் செங்குத்துக்கோடும் வரையவும். ஒரு Angle Slider α உருவாக்குக. Angle with Given Size ஐப் பயன்படுத்தி B, A என்பவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோணஅளவாக α எனக் கொடுக்கவும். புதிய ஒரு புள்ளி B' கிடைக்கும். A, B' என்பவற்றின் வழியாகக் கடந்துசெல்லும் கோடு வரைந்து அது B இல் வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டை வெட்டும் புள்ளி C என அடையாளப்படுத்தவும். ABC என்ற முக்கோணம் வரைக. மேலும் தேவையற்ற கோடுகளையும் புள்ளிகளையும் மறைத்து வைப்போம். BC இன் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். இது $\angle A$ இன் டான் அளவாகும். (எதனால்?) டான் அளவு எதுவரை ஆகலாம்?

ஒரு படம் வரைவோம்:



இதில் LH கலங்கரை விளக்கம்; ML அதன் மேல் நிற்கும் நபர்; S கப்பல்.

கண்டுபிடிக்க வேண்டியது HS

கூறப்பட்டுள்ள விபரங்களுக்கு ஏற்ப,

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

மேலும் $\angle HMS = 55^\circ$

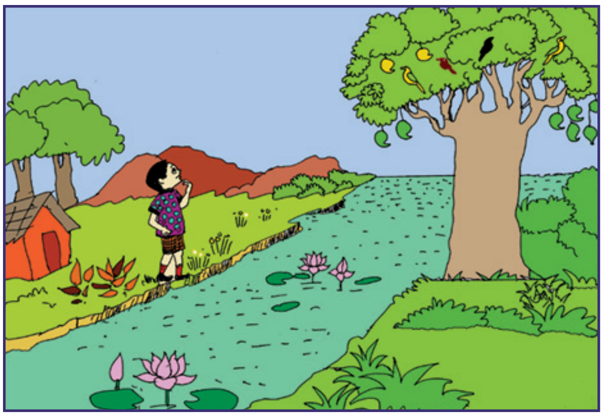
அப்போது MHS என்ற செங்கோணமுக்கோணத்திலிருந்து

$$HS = MH \tan 55^\circ \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

அதாவது, கலங்கரை விளக்கத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து தோராயமாக 38.27 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது கப்பல்.

மேலும் ஒரு கணக்கு: ஓர் ஆற்றங்கரையில் நிற்கும் சிறுவன் எதிர் கரையில் சேர்ந்து நிற்கும் ஒரு மரத்தின் மேல் உச்சியை 70° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்த்தான். 10 மீட்டர் பின்னோக்கி நடந்து பார்த்த போது, அதை 25° ஏற்றக்கோணத்தில் காண்கிறான். சிறுவனின் உயரம் 1.5 மீட்டர் ஆற்றின் அகலத்தையும் மரத்தின் உயரத்தையும் கணக்கிட வேண்டும்.

தரப்பட்டுள்ள படத்தில் TR மரம்; BY சிறுவன் முதலில் நின்ற



சாய்வும் விரிவும்

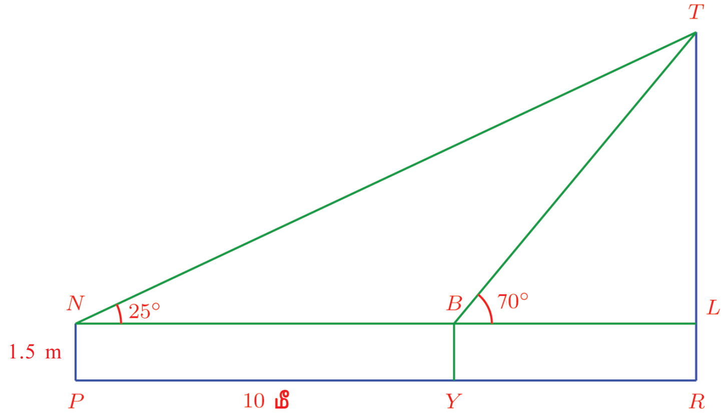
கோணங்களை விரிவின் அளவுகளாகக் காணவேண்டிய தேவைகளிலிருந்து sin, cos என்ற அளவுகள் உருவாயின என்று கண்டோம். சாய்வின் அளவாகக் கோணத்தைக் காணும் முறையை இதனுடன் தொடர்புப்படுத்தும் போது tan உருவானது. (உயரத்தை அகலம் கொண்டு வகுத்து சாய்வை அளக்கும் பழைய முறையே அதன் விளக்கம்)

கி.பி. ஒன்பதாம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த அஹமத் இபின் அப்துல்லா அல் மொர்வாஸி என்ற அரபுக் கணிதவியலாளர் இத்தகைய ஒரு தொடர்பை வெளியிட்டு tan இன் ஓர் அட்டவணையையும் உருவாக்கினார்.

இதற்கு tangent என்ற பெயர் வந்தது பதினாறாம் நூற்றாண்டில் ஆகும்.

இடம், NP சிறுவனின் புதிய இடம்.

கண்டுபிடிக்க வேண்டியது, YR உம், TR உம் .படத்திலிருந்து



$$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$$

ஆனபடியால், BL உம், TL உம் கண்டுபிடித்தால் போதும்.

$$BL = x \qquad TL = y$$

என எடுத்தால், BTL என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$y = x \tan 70^{\circ} \approx 2.7475x$$

என்றும், NTL என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$y = (x + 10) \tan 25^{\circ} \approx 0.4663\,(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

என்றும் கிடைக்கும். அப்போது

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

என ஆகும் அல்லவா. இதிலிருந்து

$$x \approx \frac{4.663}{2.2818} \approx 2.044$$

என்று (கணிப்பான் பயன்படுத்தி) கண்டுபிடிக்கலாம். இதைப் பயன்படுத்தி,

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

எனவும் காணலாம். அதாவது, ஆற்றின் அகலம், தோராயமாக 2.04 மீட்டரும், மரத்தின் உயரம் தோராயமாக $5.62 + 1.75 = 7.12$ மீட்டரும் ஆகும்.

(1) சூரியன் 40° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்படும் போது ஒரு மரத்தின் நிழலின் நீளம் 18 மீட்டர் எனில் மரத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

(2) ஒரு கோபுரத்தின் அடிப்பக்கத்தில் நிற்கும் 1.75 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு நபர், 40 மீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்தில் காண்கிறார். கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கின்ற போது, அது 50° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்படுகிறது. குன்றின் உயரமும் கோபுரத்தின் உயரமும் காண்க.

(3) கட்டிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு கட்டிடத்தின் மேல் பகுதியை, 1.5 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு சிறுவன் 30° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்க்கிறான். மேலும் 10 மீட்டர் உயரம் கட்டிய பின்னர், அவன் அதே இடத்திலிருந்து 60° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்த்தபோதே உச்சியைக் காண முடிந்தது எனில் கட்டிடத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

(4) 1.8 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒருவர் ஒரு தொலைபேசிக் கோபுரத்தின் உச்சியில் நின்று கொண்டு பார்க்கின்ற போது, 10 மீட்டர் உயரம் உள்ள ஒரு கட்டிடத்தின் உச்சியை 40° இறக்கக் கோணத்திலும் அதன் அடிப்பாகத்தை 60° இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார். கோபுரத்தின் உயரம் எவ்வளவு? அது கட்டிடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

(5) மின்கம்பத்தின் மேல் உச்சியிலிருந்து, இரு இரும்புக்கம்பிகள் இரு திசைகளை நோக்கியவாறு தரையில் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளன. கம்பியின் அடிப்பகுதிகள் தரையுடன் உருவாக்கும் கோணங்கள் 55° உம் 40° உம் ஆகும். மேலும் கம்பிகளின் கீழ் முனைகளின் இடையே உள்ள தூரம் 25 மீட்டரும். மின்கம்பத்தின் உயரம் எவ்வளவு?

(6) சூரியன் 35° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்படும் போது ஒரு மரத்தின் நிழலின் நீளம் 10 மீட்டராகும். சூரியன் 25° ஏற்றக்கோணத்தில் காணப்படும் போது அதே மரத்தின் நிழலின் நீளம் எவ்வளவு?

ஆய்வு

- ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவிற்கும் பரப்பளவிற்கும் சுற்றுவட்ட ஆரத்தோடு உள்ள தொடர்பைக் கணக்கிடுக.
- sin பயன்படுத்தி π உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற ஒரு தொடரைக் கண்டுபிடிக்கவும்

முக்கோணவியலின் அளவுகள்

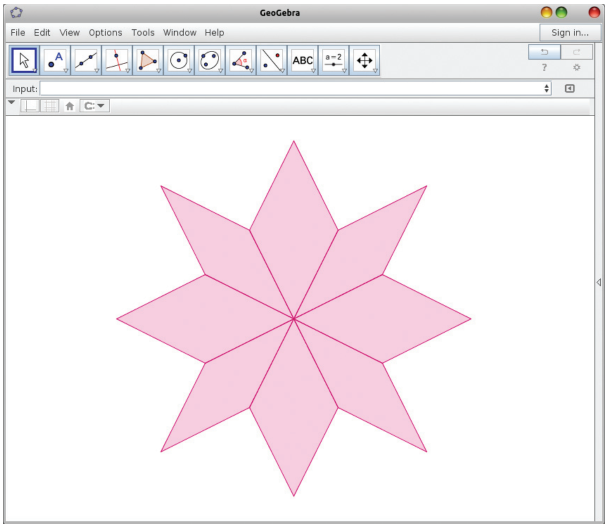
கோணம்	sin	cos	tan	கோணம்	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	46°	0.7193	0.6947	1.0355
1°	0.0175	0.9998	0.0175	47°	0.7314	0.6820	1.0724
2°	0.0349	0.9994	0.0349	48°	0.7431	0.6891	1.1106
3°	0.0523	0.9986	0.0524	49°	0.7547	0.6561	1.1504
4°	0.0698	0.9976	0.0699	50°	0.7660	0.6428	1.1918
5°	0.0872	0.9962	0.0875	51°	0.7771	0.6293	1.2349
6°	0.1045	0.9945	0.1051	52°	0.7880	0.6157	1.2799
7°	0.1219	0.9925	0.1228	53°	0.7986	0.6018	1.3270
8°	0.1392	0.9903	0.1405	54°	0.8090	0.5878	1.3764
9°	0.1564	0.9877	0.1584	55°	0.8192	0.5736	1.4281
10°	0.1736	0.9848	0.1763	56°	0.8290	0.5592	1.4826
11°	0.1908	0.9816	0.1944	57°	0.8387	0.5446	1.5399
12°	0.2079	0.9781	0.2126	58°	0.8480	0.5299	1.6003
13°	0.2250	0.9744	0.2309	59°	0.8572	0.5150	1.6643
14°	0.2419	0.9703	0.2493	60°	0.8660	0.5000	1.7321
15°	0.2588	0.9659	0.2679	61°	0.8746	0.4848	1.8040
16°	0.2756	0.9613	0.2867	62°	0.8829	0.4695	1.8807
17°	0.2924	0.9563	0.3057	63°	0.8910	0.4540	1.9626
18°	0.3090	0.9511	0.3249	64°	0.8988	0.4384	2.0503
19°	0.3256	0.9455	0.3443	65°	0.9063	0.4226	2.1445
20°	0.3420	0.9397	0.3640	66°	0.9135	0.4067	2.2460
21°	0.3584	0.9336	0.3839	67°	0.9205	0.3907	2.3559
22°	0.3746	0.9272	0.4040	68°	0.9272	0.3746	2.4751
23°	0.3907	0.9205	0.4245	69°	0.9336	0.3584	2.6051
24°	0.4067	0.9135	0.4452	70°	0.9397	0.3420	2.7475
25°	0.4226	0.9063	0.4663	71°	0.9455	0.3256	2.9042
26°	0.4384	0.8988	0.4877	72°	0.9511	0.3090	3.0777
27°	0.4540	0.8910	0.5095	73°	0.9563	0.2924	3.2709
28°	0.4695	0.8829	0.5317	74°	0.9613	0.2756	3.4874
29°	0.4848	0.8746	0.5543	75°	0.9659	0.2588	3.7321
30°	0.5000	0.8660	0.5774	76°	0.9703	0.2419	4.0108
31°	0.5150	0.8572	0.6009	77°	0.9744	0.2250	4.3315
32°	0.5299	0.8480	0.6249	78°	0.9781	0.2079	4.7046
33°	0.5446	0.8387	0.6494	79°	0.9816	0.1908	5.1446
34°	0.5592	0.8290	0.6745	80°	0.9848	0.1736	5.6713
35°	0.5736	0.8192	0.7002	81°	0.9877	0.1564	6.3138
36°	0.5878	0.8090	0.7265	82°	0.9903	0.1392	7.1154
37°	0.6018	0.7986	0.7536	83°	0.9925	0.1219	8.1443
38°	0.6157	0.7880	0.7813	84°	0.9945	0.1045	9.5144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	85°	0.9962	0.0872	11.4301
40°	0.6428	0.7660	0.8391	86°	0.9976	0.0698	14.3007
41°	0.6561	0.7547	0.8693	87°	0.9986	0.0523	19.0811
42°	0.6691	0.7431	0.9004	88°	0.9994	0.0349	28.6363
43°	0.6820	0.7314	0.9325	89°	0.9998	0.0175	57.2900
44°	0.6947	0.7193	0.9657	90°	1.0000	0.0000	....
45°	0.7071	0.7071	1.0000				

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
⌘ கோடுகளைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களின் அளவை அளப்பதற்கு உரிய வழிமுறைகளாக சைன், கொசைன், டான் என்பவற்றை விளக்குதல். ⌘ வட்டத்தின் நாணின் நீளத்திற்கும் மையக் கோணத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைச் சைன் பயன்படுத்திக் கூறலாம் என நிறுவுதல். ⌘ முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கோணங்களின் சைன் அளவுகளுக்கு விகிதசமமாக அமையும் என்று பகுத்தறிதல். ⌘ முக்கோணத்தின் சில அளவுகளிலிருந்து பிற சில அளவுகளைக் கணக்கிடுவதற்கு முக்கோணவியல் அளவுகளைப் பயன்படுத்துதல். ⌘ நேரடியாக அளக்க முடியாத உயரங்களையும் நீளங்களையும் முக்கோணவியல் பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் முறையை விளக்குதல்.			

6 குறிகாட்டி எண்கள்

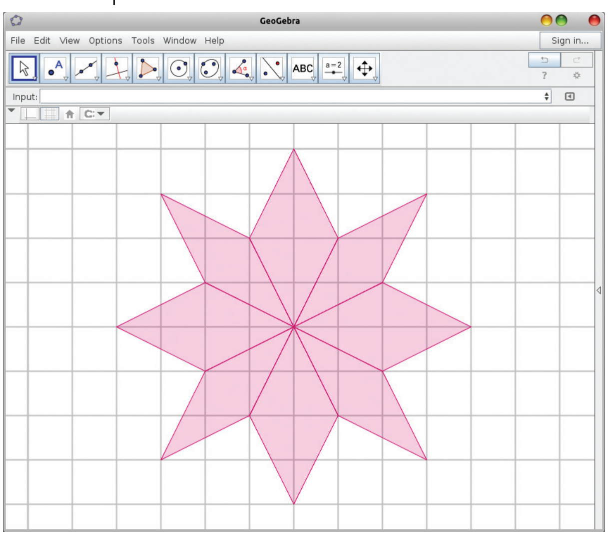
ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த படத்தைப் பார்க்கவும்.



இதை வரைந்தது எவ்வாறு?

வரைவதற்குப் பயன்படுத்தியவற்றுள் பல, வரைந்த பின்னர் மறைத்து வைக்கப்பட்டுள்ளன.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



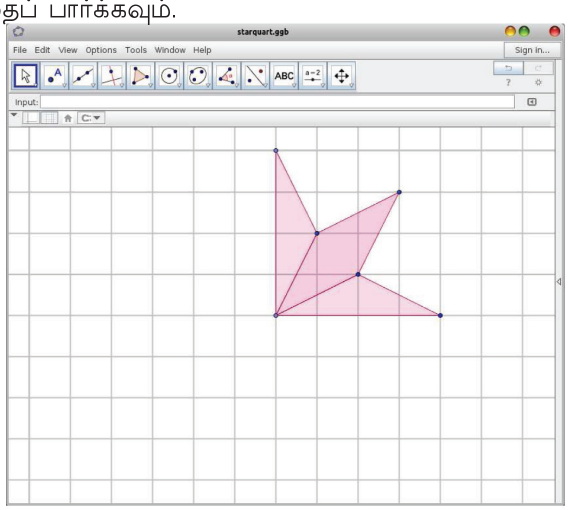
முதலில் சதுரங்கள் வரைந்து அவற்றில் சிலவற்றின் உச்சிகளை அடையாளப் படுத்தியே இந்தப் படம் வரையப்பட்டுள்ளது.

இவ்வாறு சிறு சதுரங்களாகப் பகுத்துக் காண்பதற்கு ஜியோஜிப்ராவில் Grid பயன்படுத்த வேண்டும்.

மேலும் இந்தப் படத்தைப் பெரியதாக ஆக்கிக் காகிதத்தில் வரைய வேண்டுமெனிலோ?

முதலில் இதைப்போன்று நெடுக்காவும் குறுக்காகவும் கோடுகள் வரைந்து சிறிய சதுரங்களை உருவாக்கி, தேவையான உச்சிகளை இணைத்தால் போதும். தேவையான எல்லா உச்சிகளையும் ஒவ்வொன்றாக அடையாளப்படுத்தாமலே இந்தப்படம் வரைய ஓர் உத்தி உள்ளது.

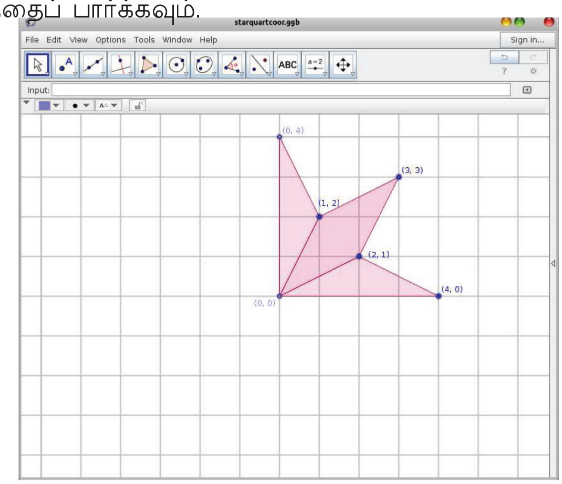
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



இந்தப் படத்தை இடதும், வலதும் திருப்பியும், மாற்றியும் வைத்தால், முதல் நட்சத்திரம் ஆகாதா?

இந்தப் படத்தைத் திருப்பியும், மாற்றியும் வரைவதற்கு GeoGebra இல் Reflect பயன்படுத்தலாம்.

சதுரக்கட்டங்களின் உச்சிகளைச் சரியாக அடையாளப்படுத்தவும் வழிமுறை உள்ளது. இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

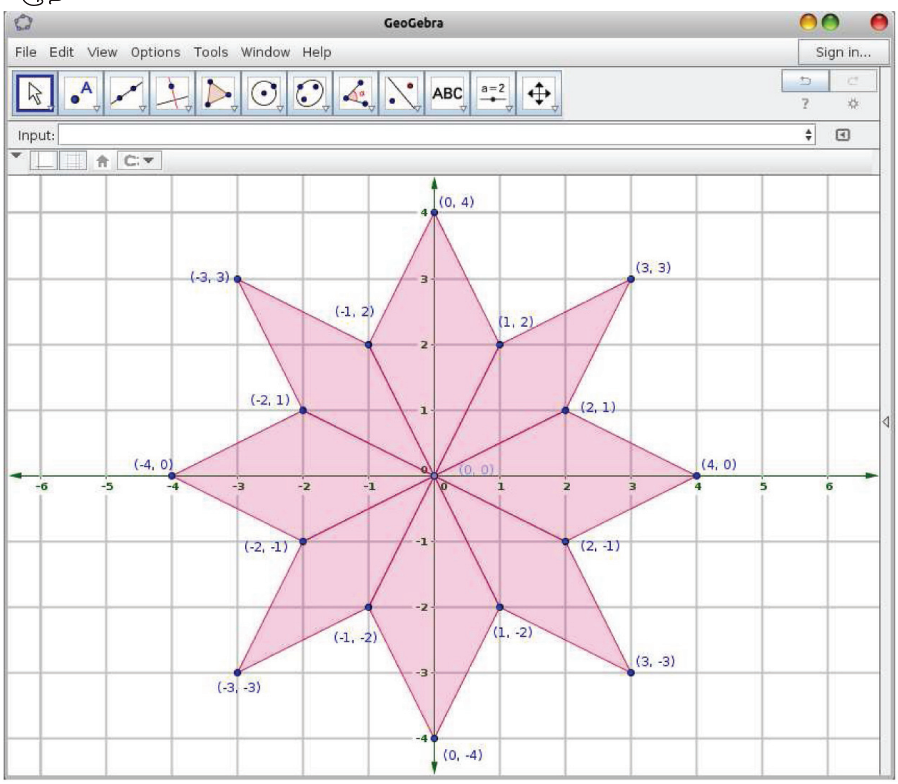


படத்தின் உச்சிகள் அனைத்திலும் ஒரு ஜோடி எண்கள் கண்டோம் அல்லவா? இவற்றின் பொருள் என்ன?

எடுத்துக்காட்டாக, (2, 1) என அடையாளப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் உச்சியைப் பார்க்கவும், நட்சத்திரத்தின் நடுப்பகுதியிலிருந்து 2 கட்டங்கள் வலது பக்கமாகவும், 1 கட்டம் மேல்நோக்கியும் நகர்ந்ததே இந்த உச்சி.

ஜியோஜிப்ராவில் Point எடுத்து எங்கு வேண்டுமெனிலும் கிளிக் செய்து புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தலாம். குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்துவதற்கு Input Bar இல் மேலே குறிப்பிட்டதைப் போன்று அதன் எண்ஜோடியை எழுதுவது ஒரு நல்லமுறையாகும்.

நட்சத்திரத்தின் எல்லா உச்சிகளுக்கும் இதைப்போன்று எண்ஜோடிகளை எழுதலாம்.:



படத்தின் இடதுமேல்பக்கம் பார்க்கவும். இங்குள்ள எண்ஜோடிகளில் எல்லாம் முதல் எண் குறை எண் எனக் கண்டீர்களா?

நடுவிலிருந்து இடப்பக்கத்திலுள்ள தூரங்களைக் குறை எண்களாக எடுப்பது வழக்கம் ஆகும். இடதும் வலதும் உள்ள எண்களை எண்சார்ந்து வேறுபடுத்துவதற்கு உரிய ஒரு வழி முறையே ஆகும். (ஒன்பதாம் வகுப்பில் எண்கோடு நினைவு கூர்க).

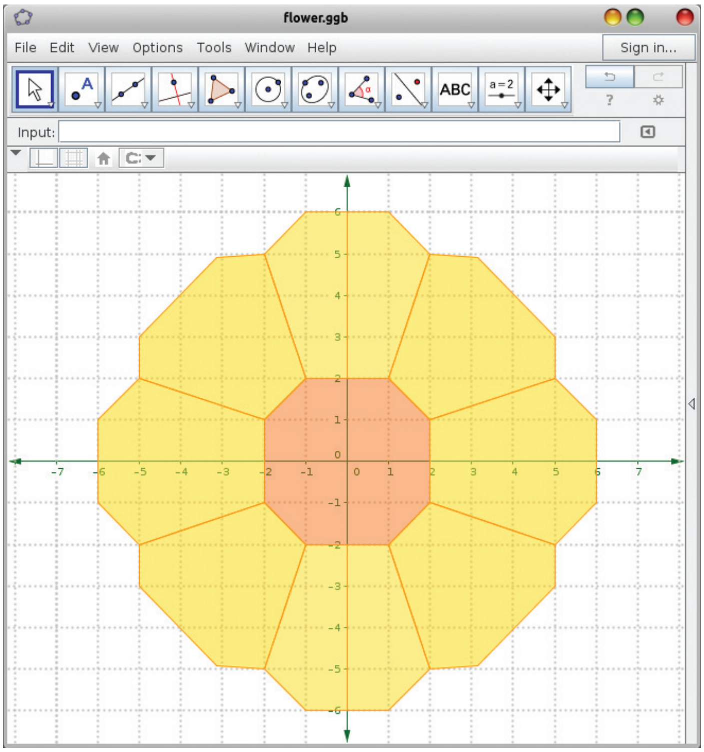
இதைப்போன்று நடுவிலிருந்து கீழ்நோக்கியுள்ள பாகங்களில், இரண்டாவது எண்ணைக் குறைஎண்ணாக எடுத்திருப்பதையும் கண்டீர்களா?

அப்படியானால் இவ்வாறு புள்ளிகளை எண் ஜோடிகளாக வெளிப்படுத்தும் போது, முதல் எண் வலதோ இடதோ உள்ள தூரத்தைக் குறிக்கும். இரண்டாவது எண், மேல்-கீழ்த் தூரத்தைக் காண்பிக்கும். இடதும் கீழும் உள்ள தூரங்களைக் குறைஎண்களாக எடுக்கவும் வேண்டும்.

இந்த எண்களை எளிதாகக் காண்பதற்கு, படத்தின் நடுவிலிருந்து நெடுக்காகவும், குறுக்காகவும் இரு கோடுகளில் தூரங்கள் எழுதப்பட்டுள்ளன.

ஜியோஜிப்ராவில் இந்தக் கோடுகளைக் காண்பதற்கு Axes பயன்படுத்த வேண்டும்.

இனி இந்த நட்சத்திரத்தைக் காகிதத்தில் பதிக்கலாம் அல்லவா. முயற்சி செய்யவும். ஜியோஜிப்ராவில் வரைந்த வேறொரு படம்.



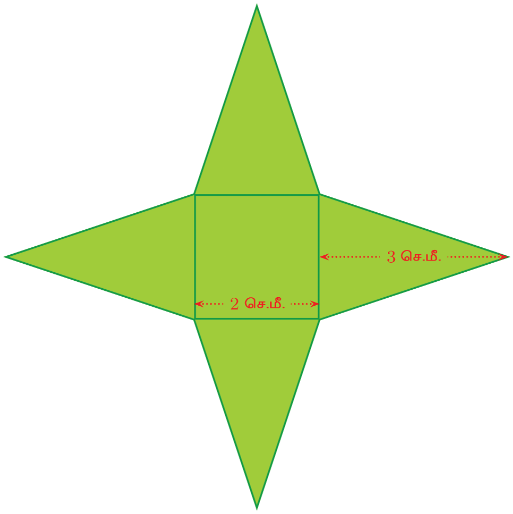
இதன் உச்சிகளையெல்லாம் இதைப்போன்று எண் ஜோடிகளால் அடையாளப்படுத்தலாமா? பின்னர் அதைக் காகிதத்தில் வரைந்து பார்க்கவும்.

ஜியோஜிப்ராவில் எண்ஜோடிகளைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகள் குறிப்பிடுவதற்கு Input Bar இல் அவற்றை ஒவ்வொன்றாகக் கொடுத்தால் போதும். இந்தப் புள்ளிகள் உச்சிகள் ஆகுமாறு பலகோணம் வரைவதற்கு. Polygon எனக் கொடுக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, Input Bar இல் இத்தகைய கட்டளையைக் கொடுத்துப் பார்க்கவும்.

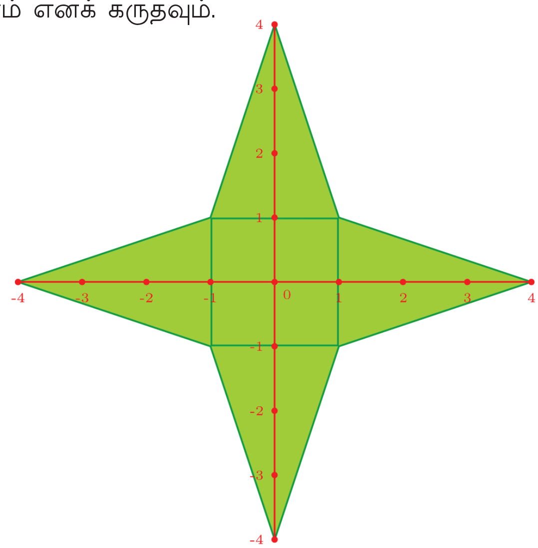
Polygon [(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)]

இடங்களும் எண்களும்

இதைப்போன்ற ஒரு வடிவத்தைக் காகிதத்தில் வரைய வேண்டும்.



முதலில் உச்சிகளையெல்லாம் எண்ஜோடிகள் பயன்படுத்தி அடையாளப்படுத்தினால்? அதற்குக் கட்டங்கள் வரைய வேண்டாம். படத்தின் மையப்பகுதியில் கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் இரு கோடுகள் வரைந்து, இரண்டிலும் ஒரு சென்டிமீட்டர் இடைவெளிவிட்டு தூரங்களை அடையாளப் படுத்தினோம் எனக் கருதவும்.

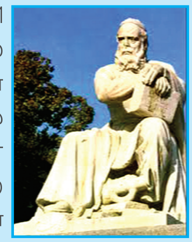


எல்லா உச்சிகளின் எண்களை எழுதலாமா?

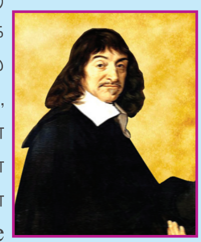
சதுரத்தின் வலப்பக்க உச்சி, நடுவிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் வலதும், அதிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் மேலேயும் ஆகும். அப்போது அதன் எண்ஜோடி (1, 1).

சிறு வரலாறு

கி.மு. இருநூறாம் ஆண்டிலேயே அப்போளோனியஸ் என்ற கிரேக்கக் கணித அறிஞர் சில வடிவியல் பிரச்சினைகளுக்கு விடை காண்பதற்குப் புள்ளிகளின் இடங்களை எண்களால் குறிப்பிடும் முறையைக் கடைபிடித்திருக்கிறார். குறிப்பிட்ட கோடுகளிலிருந்து உள்ள தூரங்களே இத்தகைய எண்கள்.

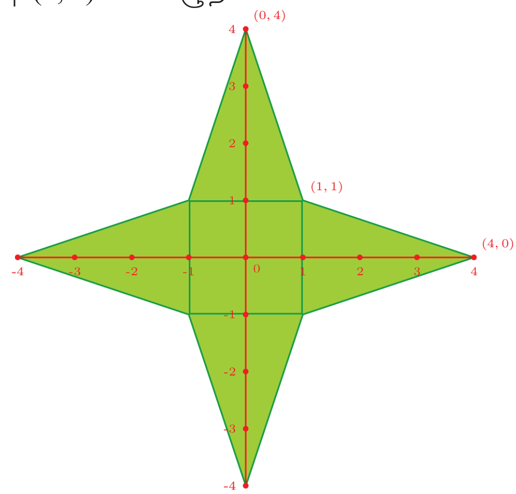


தொடர்ந்து கி.பி. 11 ஆம் நூற்றாண்டில் பாரசீக நாட்டின் கணித அறிஞரும் கவிஞருமான உமர் கயாம், சில இயற் கணிதப் பிரச்சினை களை வடிவியல் பிரச்சினைகளாக மாற்றுவதற்கு, எண் ஜோடிகளைப் புள்ளிகளாக மாற்றி வரையும் முறையைப் பின்பற்றி யிருக்கிறார்.

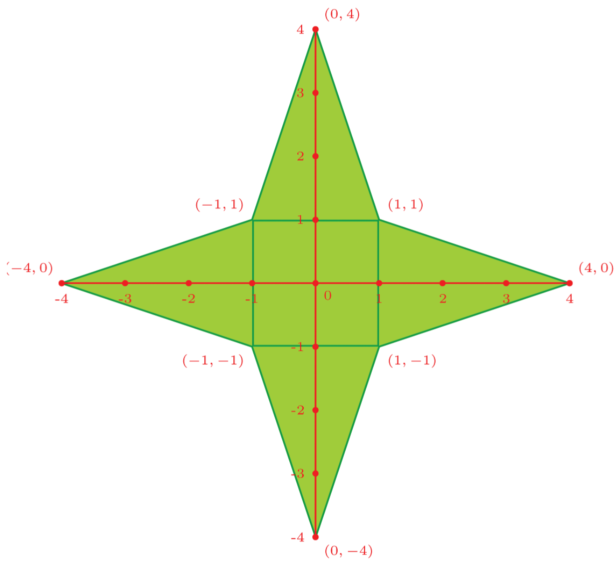


வடிவியலுக்கும் இயற்கணிதத்திற்கும் உள்ள இந்தத் தொடர்பு, வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு கணிதப் பிரிவாக வளர்ந்தது, 17ஆம் நூற்றாண்டில், பிரான்ஸ் நாட்டின் தத்துவச் சிந்தனை யாளரான ரெனே டெஸ்கார்டஸ் (Rene Descartes) "ஜியோமிதி" என்ற நூலை வெளியிட்டதன் பின்னர் ஆகும்.

இனி படத்தின் வலது முனையோ? நடுவிலிருந்து 4 சென்டிமீட்டர் வலது, மேலாகவோ, கீழாகவோ நகரவில்லை. அப்போது அதன் எண் ஜோடி (4, 0) என எழுதலாம். மிகவும் மேலே உள்ள உச்சி வேறுவிதத்தில் ஆகும். நடுவிலிருந்து வலது, இடது பக்கங்கள் நகராமல் நேராக 4 சென்டிமீட்டர் மேலே அதன் எண் ஜோடி (0, 4) என எழுதலாம்.



இதைப்போன்று ஏனைய உச்சிகளின் எண் ஜோடிகளை எழுதலாம் அல்லவா. இடப்பக்கத்திலும் கீழும் உள்ள தூரங்களைக் குறை எண்களாகவே எடுக்கிறோம் என நினைவில் கொள்க.

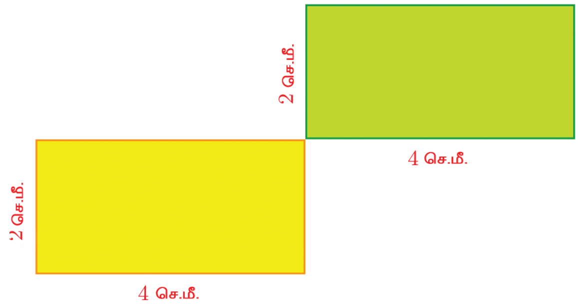


மேலும் இந்தப் படத்தை நோட்டுப்புத்தகத்தில் வரைந்து பார்க்கவும்.

இந்தப் படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும்.

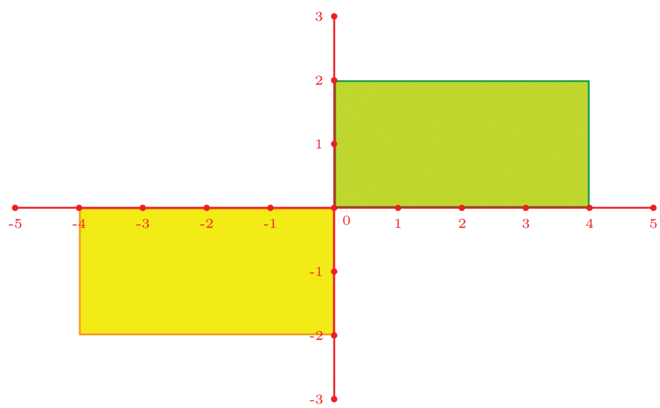
புள்ளிகளின் இடத்தை அடையாளப்படுத்துவதற்கு இவ்வாறு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வரையும் இருகோடுகளுக்குக் குறிகாட்டி அச்சுகள் (axes of co-ordinates) என்று பெயர். கிடைமட்டமான கோடு x அச்சு (x axis) செங்குத்துக்கோடு y அச்சு (y axis).

அச்சுகள் வரைந்த பின்னர் எந்தப்புள்ளியின் இடத்தையும் எண்ஜோடிகளாக எழுதலாம். இந்த எண்களைப் புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள் (co-ordinates) எனக் கூறுகிறோம்.



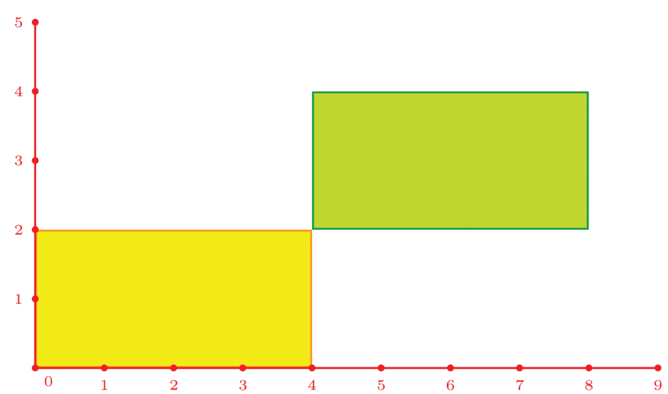
ஒரு படம் வரைவதற்கு, அச்சுகளை எங்கேயும் எப்படியும் வரையலாம். (ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வேண்டும் என்பது மட்டும்

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப்படத்தைப் பார்க்கவும். அச்சுகளை இவ்வாறு வரையலாம்.



இந்த இரு செவ்வகங்களின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவையெல்லாம்?

மேலும் அச்சுகளை இவ்வாறு வரைந்தால்?



பூமிப் பங்கீடு

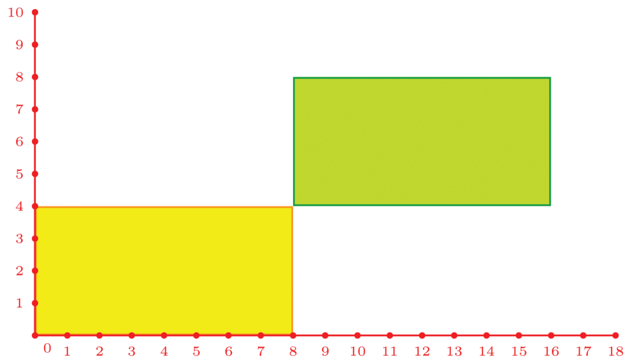
பூமி தானாகச் சுற்றுகிறது அல்லவா, எந்தக் கோளம் சுற்றும் போதும். அதன் இரு புள்ளிகள் அசையாமலிருக்கும். அவற்றைத் துருவங்கள் (poles) என்றும் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டைச் சுழற்சி அச்சு (axis of rotation). என்றும் கூறுகிறோம். கோளத்தில் வரையப் படும் வட்டங்களில், கோளத்தின் மையத்தைக் கொண்டவை பெரிய வட்டங்கள். இரு துருவங் களிலிருந்தும் சமத் தூரத்தில் உள்ள பெரிய வட்டமே பூமத்திய ரேகை (equator). அதற்கு இணையான வட்டங்களே அட்ச ரேகைகள் (lines of latitude)

துருவங்கள் வழியாக வரையும் பெரிய வட்டங்கள் தீர்க்க ரேகைகள் (lines of longitude or meridians). இவற்றுள் இங்கிலாந்தில் உள்ள கிரீன்விச் என்ற இடம் வழியாகச் செல்லும் வட்டம் முக்கிய தீர்க்க ரேகையாகக் கருதப் படுகிறது. (prime meridian)

இந்த அச்சுகளின்படி உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

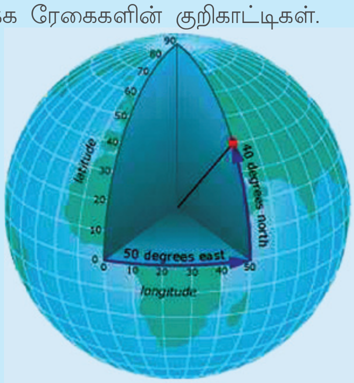
அச்சுகள் வரைந்த பின்னர் அவற்றில் ஒரே தூரத்தில் இடைவிட்டு புள்ளிகள் வைக்க வேண்டும். தூரம் ஒரு சென்டிமீட்டராக வேண்டும் என்றில்லை வசதிக்கு ஏற்ப எந்தத் தூரமும் ஆகலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, அரை சென்டிமீட்டர் இடைவிட்டு புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தவும். படம் இவ்வாறாகும்.



பூமியில் இடங்கள்

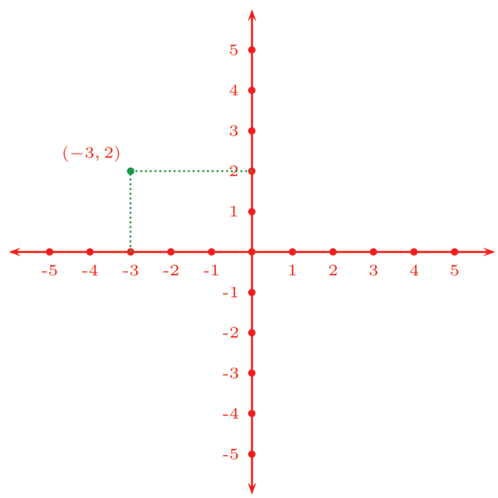
பூமத்திய ரேகையும், கிரீன்விச் ரேகையும் சந்திக்கும் ஒரு புள்ளியும் அதனைப் பூமியின் மையத்துடன் இணைக்கும் ஒரு கோட்டையும் கற்பனை செய்யவும். இந்தப் புள்ளியிலிருந்து வேறொரு அட்ச ரேகையில் சென்று சேர, வடக்கு நோக்கியோ அல்லது தெற்கு நோக்கியோ நகர வேண்டும். அதற்கு ஏற்ப புள்ளியைப் பூமியின் மையத்துடன் இணைக்கும் கோடும் மேல் நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் சுழல வேண்டும். இத்தகைய கோணங்களைப் பயன்படுத்தி அட்ச ரேகைகள் குறிக்கப்படுகின்றன. (வடக்கு, தெற்கு என்ற திசைகளும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன) இனி நமது முதல் புள்ளி, வேறொரு தீர்க்க ரேகைக்கு மாற வேண்டுமெனில்? கிழக்கு நோக்கியோ, மேற்கு நோக்கியோ மாற வேண்டும். அதற்கு ஏற்ப கோடும் வலப்பக்க மாகவோ அல்லது இடப்பக்க மாகவோ ஒரு குறிப்பிட்ட கோணத்தில் சுழல வேண்டும். இந்தக் கோணங்களே தீர்க்க ரேகைகளின் குறிகாட்டிகள்.



இப்போது உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் என்னவாயிற்று?

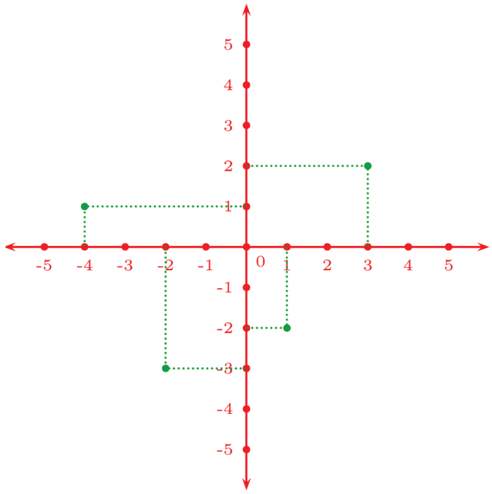
அச்சுகளை வரைந்து, தூரங்களை அடையாளப்படுத்தியதன் பின்னர் குறிகாட்டி எண்களைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துவது எவ்வாறு?

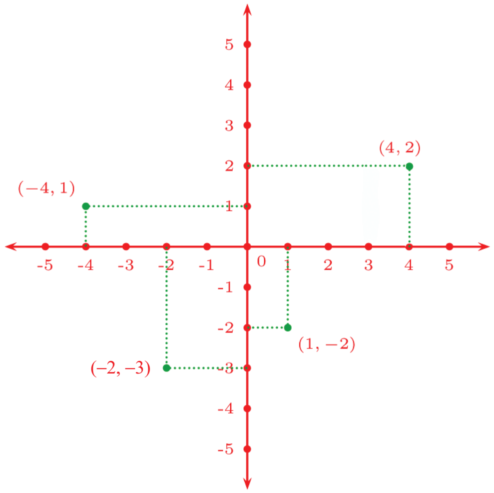
எடுத்துக்காட்டாக, குறிகாட்டி எண்கள் $(-3, 2)$ ஆன புள்ளியை அடையாளப்படுத்துவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்:



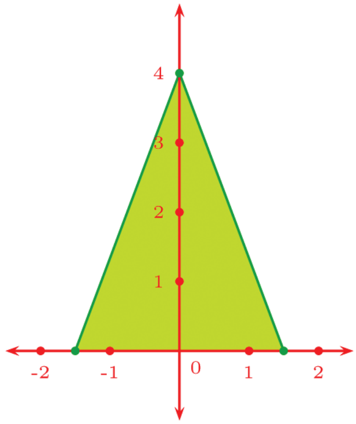
x அச்சில் -3 அடையாளப்படுத்திய இடத்திலிருந்தும், y அச்சில் 2 அடையாளப்படுத்திய இடத்திலிருந்தும் வரையக்கூடிய செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திப்பதே $(-3, 2)$ குறிகாட்டி எண்களான புள்ளி ஆகும்.

மேலும் அடையாளப்படுத்திய ஒரு புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்க, புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கும் y அச்சிற்கும் செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால் போதும்.



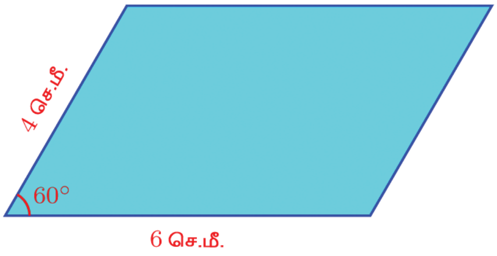


குறிகாட்டி எண்கள் முழுஎண்களாக இருக்க வேண்டுமோ? எடுத்துக்காட்டாக, அடிப்பக்கம் 3 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 4 சென்டிமீட்டரும் ஆன ஓர் இரு சமபக்கமுக்கோணம் வரைவதற்குக் கீழ்க்காண்பித்திருப்பதைப் போன்று அச்சுகள் வரையலாம்.



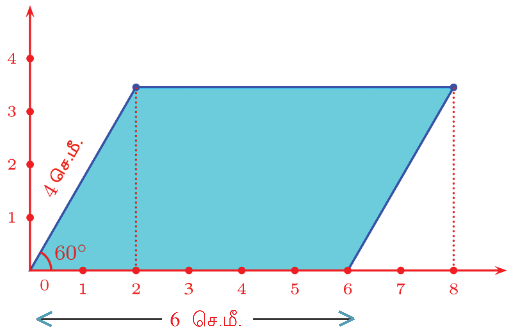
முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

மேலும் இந்த இணைகரம் வரைய வேண்டுமெனில்?



அச்சுகளை இவ்வாறு வரையலாம்.

ஜியோஜிப்ராவில் a என்ற பெயரில் ஒரு ஸ்லைடர் உருவாக்கவும். Input Bar இல் (a, 0) எனக் கொடுக்கவும். சிலைடரை மெதுவாக நகர்த்தி a மாற்றிப் பார்க்கவும். இந்தப்புள்ளி பயணம் செய்யும் பாதை எது? இதைப்போன்று (a, 2), (a, –1), (0, a), (3, a), (–2, a) இந்தப் புள்ளிகளை எடுத்து a மாறுவதற்கு ஏற்ப ஒவ்வொரு புள்ளியும் பயணம் செய்யும் பாதையின் சிறப்புத் தன்மை என்ன என்று பார்க்கவும். புள்ளிக்கு Trace On கொடுத்துப் பார்க்கவும்.



கோணங்கள் 30°, 60°, 90° ஆன முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் தெரியும் அல்லவா. அப்போது இடதுமேல் உச்சியின் குறிகாட்டி எண்கள் $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

வலது உச்சியின்?

குறிகாட்டி எண்கள் $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ என்ற புள்ளி கிடைப்பதற்கு ஜியோஜிப்ராவின் Input Bar இல் (2, 2sqrt (3)) எனக் கொடுத்தால் போதும்.

அச்சுகளைப் பயன்படுத்திப் படங்கள் வரையும் போது x அச்சிற்கு $X'X$ என்றும் (இடதுபக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கம்) y அச்சிற்கு (மேலிருந்து கீழ்நோக்கி) YY' என்றும் அடையாளப்படுத்தப்படுகின்றன. இவை வெட்டிச்செல்லும் புள்ளியை O என்றும் இந்தப்புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி (origin) என்றும் கூறுகிறோம்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

i) x அச்சில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் y குறிகாட்டி எண்.

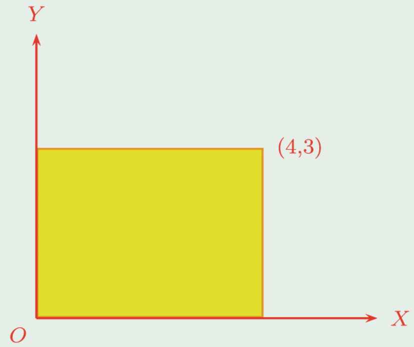
ii) y அச்சில் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x குறிகாட்டி எண்.

iii) ஆதிப்புள்ளியின் குறிகாட்டி எண்கள்.

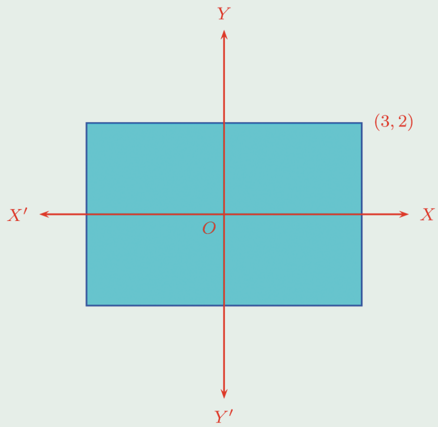
iv) (0, 1) என்ற புள்ளி வழியாக x அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் y குறிகாட்டி எண்.

v) (1, 0) என்ற புள்ளியின் வழியாக y அச்சிற்கு இணையாக வரையப்படும் கோட்டின் எந்தப் புள்ளியினுடையவும் x குறிகாட்டி எண்.

(2) படத்தில் செவ்வகத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

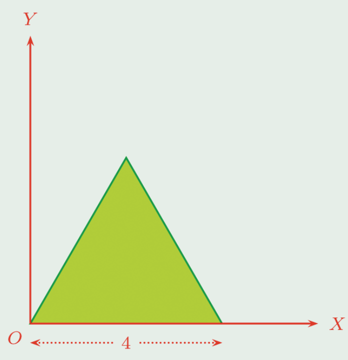


(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகும். மேலும் ஆதிப்புள்ளி செவ்வகத்தின் மையப்புள்ளி ஆகும்.



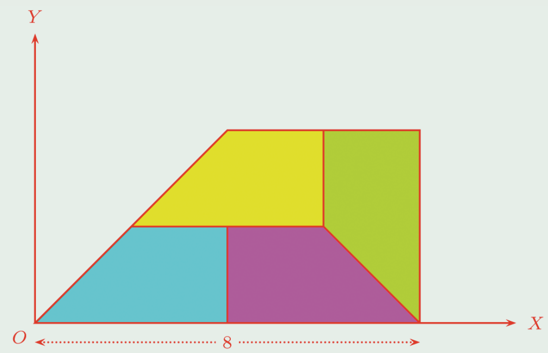
செவ்வகத்தின் பிற மூன்று உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

(4) ஒரு சமப்பக்க முக்கோணத்தின் படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



முக்கோணத்தின் எல்லா உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) சமமான நான்கு சரிவகங்கள் சேர்ந்துள்ள ஒரு பெரிய சரிவகம்.



எல்லாச் சரிவகங்களிலும் உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும். இந்தப்படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும்.

ஜியோஜிப்ராவில் Input Bar இல்

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5]

எனக் கொடுத்துப் பார்க்கவும். a ஆக 0 முதல் 5 வரையுள்ள முழு எண்களைப் பயன்படுத்தி (a, a + 1) என்ற வடிவத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் அடையாளப்படுத்துவதற்கு உரிய அறிவுரையே இது. அதாவது, (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) என்ற புள்ளிகள்

அறிவுரையில் ஒரு சிறிய மாற்றம் செய்து

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5, 0.5]

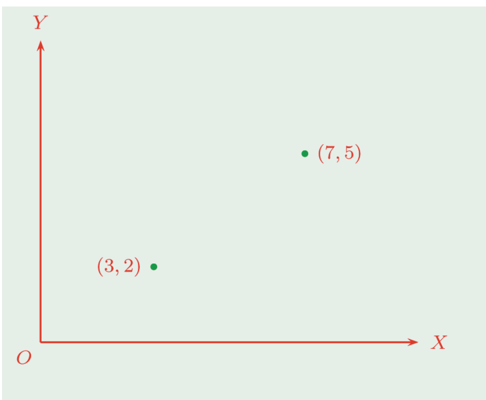
எனச் செய்து பார்க்கவும். இங்கு a ஆக எடுப்பது பூஜ்யத்திலிருந்து தொடங்கி 0.5 வீதம் கூட்டிக் கிடைக்கும் எண்களாக வேண்டும் என்பதே இறுதியில் 0.5 என்று கொடுப்பதன் நோக்கமாகும். (1 வீதமே கூட்ட வேண்டுமெனில் குறிப்பிட்டு ஒன்றும் கொடுக்கவேண்டியதில்லை). அப்போது (0, 1), (0.5, 1.5), (1, 2), ..., என இவ்வாறு (5, 6) வரையுள்ள புள்ளிகளே கிடைக்கின்றன.

கீழே கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு அறிவுரையிலிருந்தும் கிடைக்கும் புள்ளிகளின் சிறப்புத் தன்மைகளைக் கலந்துரையாடவும்.

Sequence [(a, 0), a, 0, 5, 0.5]
Sequence [(a, 2a), a, –3, 4, 0.25]
Sequence [(a, a^2), a, –3, 3, 0.2]
Sequence [(a, -a^2), a, –3, 3, 0.2]
Sequence [(a^2, a), a, –4, 4, 0.1]

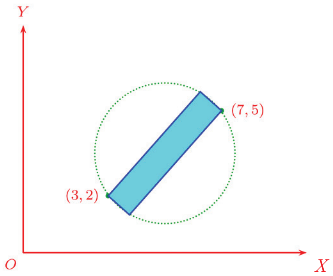
செவ்வகக் கணக்குகள்

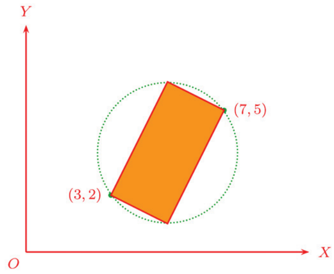
படத்தைப் பார்க்கவும்.

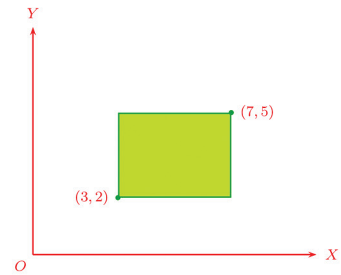


படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாக வரும்படி ஒரு செவ்வகம் வரையவும்.

எவ்வளவு வேண்டுமெனிலும் வரையலாம்.





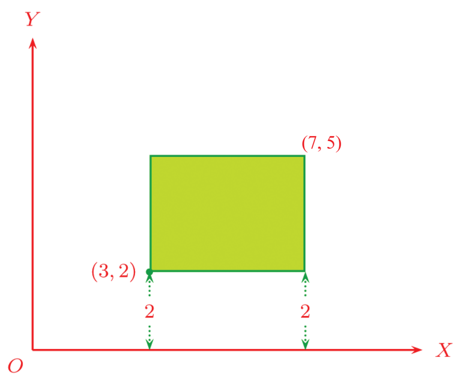


இவற்றில் ஒன்றுக்கு மட்டும் அச்சுகளுக்கு இணையான பக்கங்கள் உள்ளன

இந்தச் செவ்வகத்தின் பிற இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்கள் எவை?

அதற்காகப் படத்தை மேலும் விளக்குவோம். கீழே இடப்பக்க உச்சியின் y குறிகாட்டி எண்கள் 2 ஆனதால் x அச்சிலிருந்து அதற்கு உள்ள உயரம் 2 ஆகும்.

கீழ்ப்பக்கம் x அச்சிற்கு இணையானதால், இந்தப் பக்கத்தின் அடுத்த உச்சியும் இதே உயரத்தில் ஆகும்.



வட்டப்படங்கள்

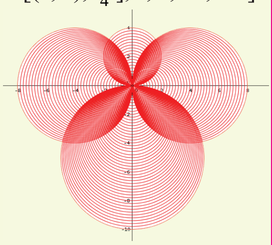
Input Bar இல் circle [(1, 3), 2] என எழுதினால், ஜியோஜிப்ராவில் மையம் (1, 3) என்ற புள்ளியும் ஆரம் 2 உம் உடைய வட்டம் கிடைக்கும்.

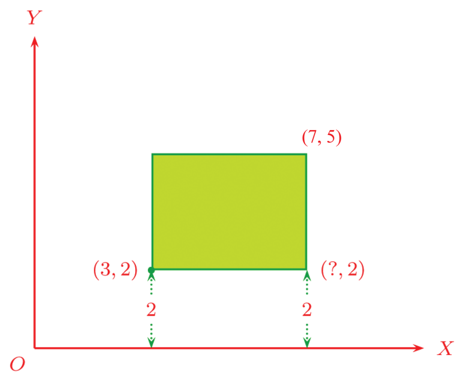
Sequence [circle [(a, 0), 1], a, 0, 5, 0.2]

என்ற கட்டளை கொடுத்தால் (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0), ..., (5, 0) என்ற புள்ளிகள் மையமாகவும், ஆரம் 1 உம் உடைய வட்டங்களும் கிடைக்கும். இதைப் போன்று கீழே கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு கட்டளையையும் கொடுத்தால் கிடைக்கின்ற படங்களை மனதில் காணவும். அதன் பின்னர் ஜியோஜிப்ராவில் செய்து பார்க்கவும்.

- Sequence [circle [(a, 0), a], a, 0, 10, 0.1]
- Sequence [circle [(a, 0), $\frac{a}{4}$], a, 0, 10, 0.1]

தேவையான அறிவுரைகளைக் கொடுத்து, இந்தப் படத்தை வரையவும்.

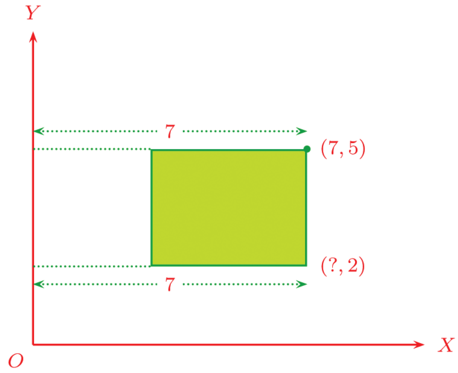


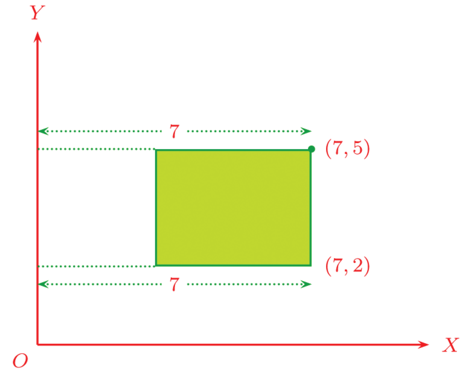


அதாவது இந்த உச்சியின் y குறிகாட்டி எண் 2 ஆகும்.

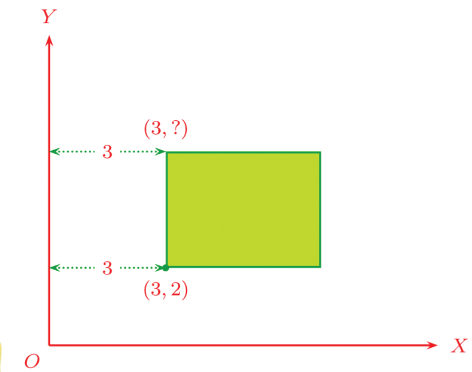
இதன் x குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்க, மேல் உள்ள வலது உச்சியைப் பார்க்கவும். இதன் x குறிகாட்டி எண் 7 ஆனதால், y இல் இருந்து இந்த உச்சிக்கு உள்ள தூரம் 7 ஆகும்.

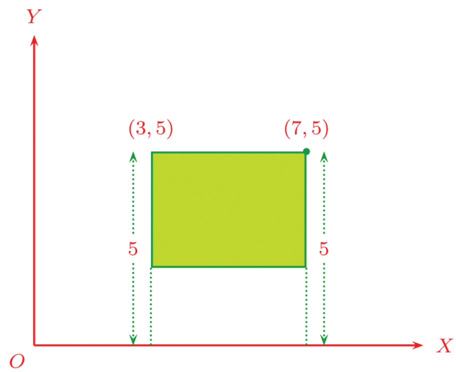
செவ்வகத்தின் வலப்பக்கம் y அச்சிற்கு இணையானதால், இந்தப் பக்கத்தின் மற்ற உச்சியும் இதே தூரத்திலாகும். அதாவது அதன் x குறிகாட்டி எண்ணும் 7 ஆகும்.





இதைப்போன்று செவ்வகத்தின் இடது-மேல் உச்சியைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

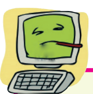




செவ்வகத்தின் நான்கு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களை ஒன்றாகப் பார்க்கவும்:

குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடித்த வழிமுறையை மேலும் ஒரு தடவை பார்க்கவும். பயன்படுத்திய கோட்பாடு என்ன?

x அச்சிற்கு இணையாக நகரும் போது y குறிகாட்டி எண் மாறவில்லை; y அச்சிற்கு இணையாக நகரும் போது x குறிகாட்டி எண் மாறவில்லை.



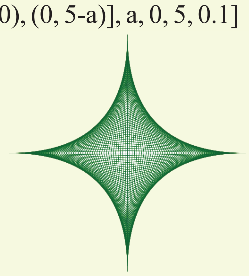
ஜியோஜிப்ராவில்

Segment [(2, –1), (3, 5)]

என்ற கட்டளை கொடுத்தால் (2,–1), (3, 5) என்ற புள்ளிகள் இணையும் கோட்டுத்துண்டு கிடைக்கும். கீழே தரப்பட்டுள்ள கட்டளைகளை உருவாக்கும் கோடுகளின் சிறப்புத் தன்மைகளைக் கலந்து ரையாடவும்.

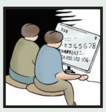
- Sequence [segment [(a, 0), (a, 3)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (a, a)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(0, 3), (a, 0)], a, –4, 4, 0.1]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, a)], a, –3, 3, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, 5-a)], a, 0, 5, 0.1]

தேவையான கட்டளை களைக் கொடுத்து இந்தப் படத்தை வரையவும்.

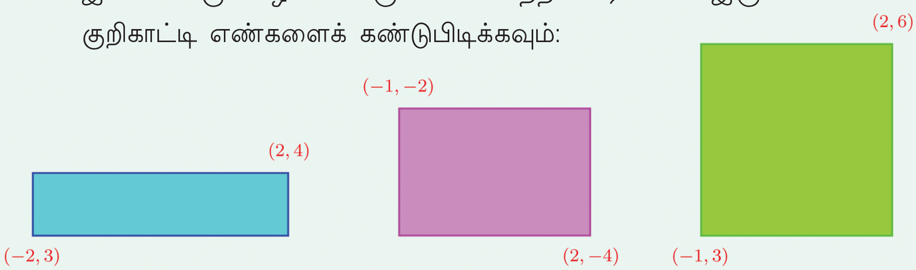


பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையான வேறொரு செவ்வகத்தைப் பார்க்கலாம்:

இதன் ஏனைய இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பீர்கள்?



(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள செவ்வகங்களின் பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகும். ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் ஏனைய இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்:



(2) அச்சுகள் வரையாமல் கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் ஜோடிகளை. இடது-வலது, மேல்-கீழ் இடங்களில் சரியாக அடையாளப்படுத்தவும். பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் இந்தப் புள்ளிகள் எதிர் உச்சிகளாகவும் வருகின்ற செவ்வகங்களின் ஏனைய இரு உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

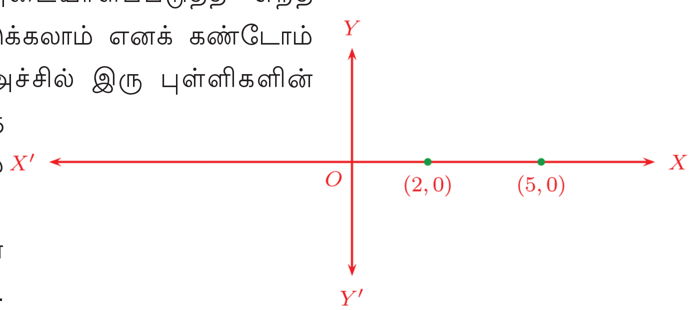
i) (3, 5), (7, 8)   ii) (6, 2), (5, 4)

iii) (−3, 5), (−7, 1)   iv) (−1, −2), (−5, −4)

தூரங்கள்

அச்சுகளில் தூரங்களை அடையாளப்படுத்த எந்த நீளத்தையும் ஓர் அலகாக எடுக்கலாம் எனக் கண்டோம் அல்லவா. அப்போது ஓர் அச்சில் இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரம், இந்த அலகின் மடங்காக மட்டுமே கூற இயலும்.

எடுத்துக்காட்டாக, x அச்சின் இரண்டு புள்ளிகளைப் பார்க்கவும்.

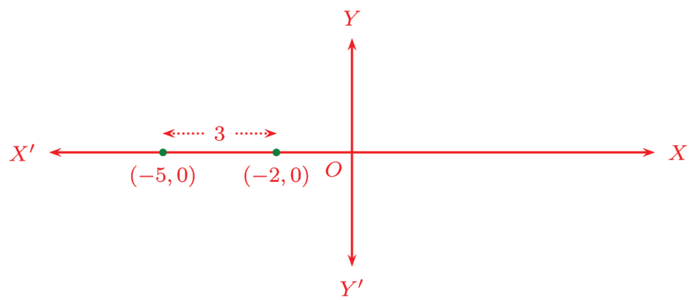


ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து முதல் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம், இந்த அலகின் 2 மடங்கு. இரண்டாவது புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் அலகின் 5 மடங்கு. இதனைச் சுருக்கி ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து முதல் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் 2 எனவும், இரண்டாவது புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் 5 எனவும் எளிதாகக் கூறலாம்.

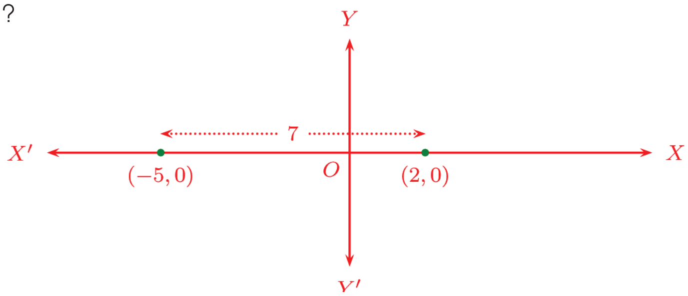
அப்போது இந்தப் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $5 - 2 = 3$

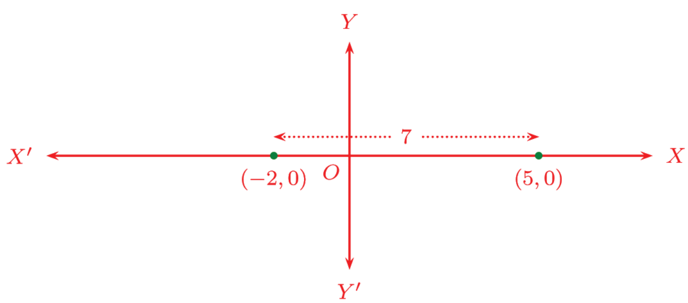
புள்ளிகள் இவ்வாறு ஆனாலோ?

புள்ளிகள் ஆதிப்புள்ளியின் இரு பக்கங்களில் ஆனால்?



x அச்சில் இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

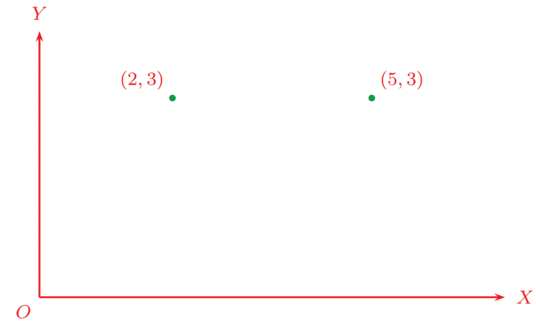




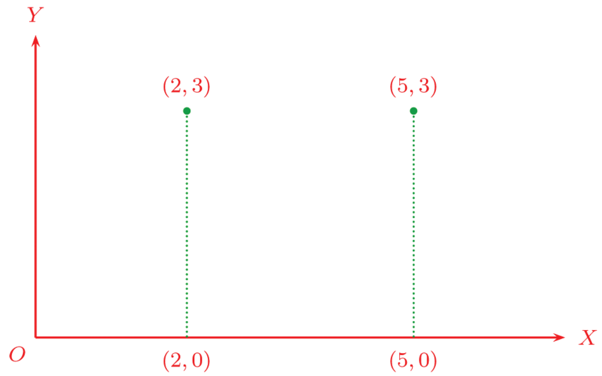
ஒன்பதாம் வகுப்பில் ஒரு கோட்டின் புள்ளிகளை எண்களால் அடையாளப் படுத்தியதையும், இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிட்டதையும் நினைவுகூர்க.

குறிகாட்டி எண்கள் $(x_1, 0), (x_2, 0)$ ஆன புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|x_1 - x_2|$.

இனி இந்தப் புள்ளிகளைப் பார்க்கவும்:



இவற்றின் இடையே உள்ள தூரம், இந்தப் புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்பகுதிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் அல்லவா? (எதனால்?)



பொதுவாகக் கூறினால்,

ஒரே y குறிகாட்டி எண் உள்ள புள்ளிகள் எல்லாம், x அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோட்டில் ஆகும். இத்தகைய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம். அவற்றின் x குறிகாட்டி எண்களின் வித்தியாசம் ஆகும்.

இதைப் போன்று ஒரே x குறிகாட்டி எண்கள் உள்ள புள்ளிகளைப் பற்றியும் கூறலாம் அல்லவா:

ஒரே x குறிகாட்டி எண் உள்ள புள்ளிகள் அனைத்தும், y அச்சிற்கு இணையான ஒரு கோட்டில் ஆகும். அத்தகைய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம், இவற்றின் y குறிகாட்டி எண்களின் வித்தியாசம் ஆகும்.

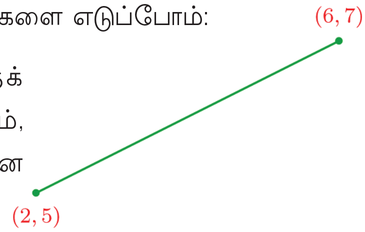
இயற்கணித மொழியில் கூறினால்,

குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y), (x_2, y) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|x_1 - x_2|$

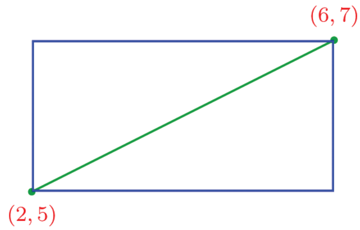
குறிகாட்டி எண்கள் (x, y_1), (x, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|y_1 - y_2|$

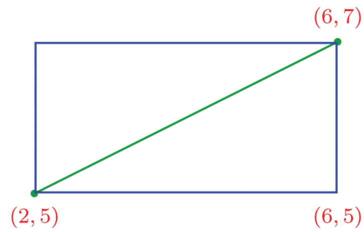
x குறிகாட்டி எண்களும் y குறிகாட்டி எண்களும் வித்தியாசமான இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பீர்கள்?

எடுத்துக்காட்டாக, $(2, 5)$, $(6, 7)$ என்ற புள்ளிகளை எடுப்போம்:

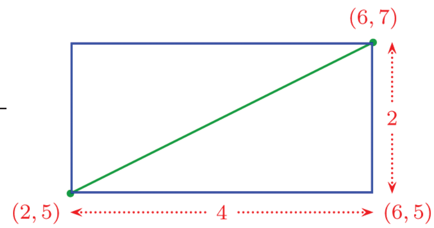


இவற்றின் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடுவதற்கு இவை எதிர் உச்சிகளும், பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையானதுமான செவ்வகம் வரைவோம்:





இந்தச் செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டமே நமக்குத் தேவைப்படுகிறது. அதைக் கணக்கிடுவதற்குச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் கண்டுபிடித்தால் போதும். அதற்குச் செவ்வகத்தின் கீழே உள்ள மற்ற உச்சியை எழுதுவோம்:

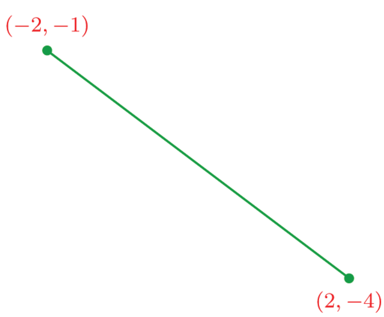


இதிலிருந்து செவ்வகங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா?

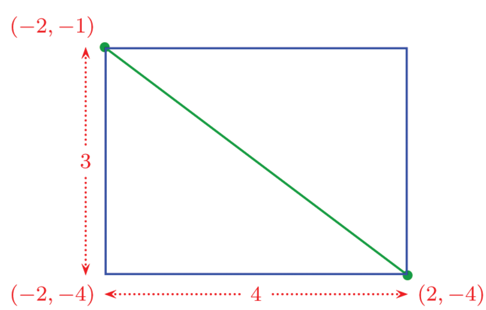
இனி பைதகோரஸ் தேற்றம் பயன்படுத்தி நமக்குத் தேவையான நீளத்தைக் கணக்கிடலாம்.

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

புள்ளிகள் இவ்வாறு ஆனால்?



இதிலும் செவ்வகம் வரைந்து, நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

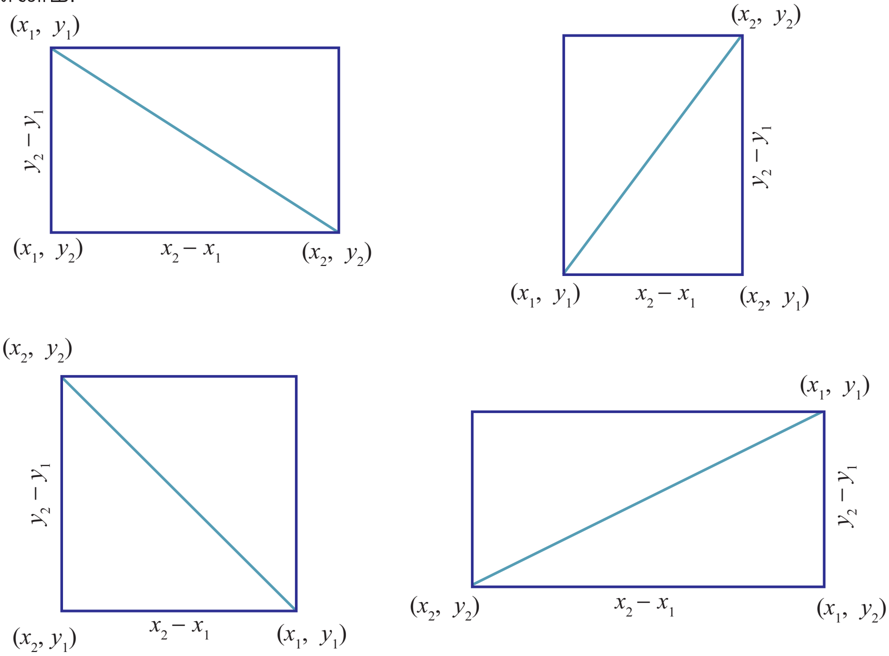


இப்போது நமக்குத் தேவையான தூரம்

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

x குறிகாட்டி எண்களையும், y குறிகாட்டி எண்களையும் வித்தியாசமான எந்த இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரத்தையும் இவ்வாறு செவ்வகம் வரைந்து கண்டுபிடிக்கலாம். (ஏதேனும் குறிகாட்டி எண்கள் சமமெனில், இத்தகைய ஒரு செவ்வகம் இல்லை அல்லவா)

பொதுவாக, இத்தகைய இரு புள்ளிகளை (x_1, y_1), (x_2, y_2) என எடுக்கலாம். இவை எதிர் உச்சிகளாகவும், பக்கங்கள் அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் உள்ள ஒரு செவ்வகம் வரைவோம். மற்ற இரு உச்சிகள் (x_1, y_2), (x_2, y_1) எனக் காணலாம்.



செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் $|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$ எனவும் கணக்கிடலாம் அப்போது முதல் இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

எந்த ஓர் எண், அதன் சார்பு விலை இவற்றின் வர்க்கம் ஆகியன ஒரே எண் என ஒன்பதாம் வகுப்பில் கண்டோம் அல்லவா? அப்போது இந்தத் தூரம்

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

இதில் $y_1 = y_2$ என எடுத்தால்

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

எனக் கிடைக்கும்; $x_1 = x_2$ என எடுத்தால்

$$\sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

எனவும் கிடைக்கும்.

அப்போது, ஏதேனும் குறிகாட்டி எண்கள் சமமானாலும் தூரத்தை இந்த முறையில் எழுதலாம்.

குறிகாட்டி எண்கள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற எந்த இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

எடுத்துக்காட்டாக, குறிகாட்டி எண்கள் $(4, -2)$, $(-3, -1)$ ஆன புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

$$\sqrt{((4-(-3))^2 + ((-2-(-1))^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

குறிகாட்டி எண்கள் $(-2, 1)$ என்ற புள்ளிக்கும் ஆதிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்?

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) ஆன புள்ளிக்கும் ஆதிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $\sqrt{x^2 + y^2}$

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:

குறிகாட்டி எண்கள் $(-1, 2)$, $(3, 5)$, $(9, -3)$ ஆன புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டிலா?

மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் எனில், அவற்றில் இரண்டின் இடையே உள்ள தூரங்களில் மிகப்பெரியது, பிற இரு தூரங்களின் தொகையாக இருக்கும்.

கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளுக்கு A, B, C எனப் பெயரிடுவோம். அப்போது,

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2 + ((5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

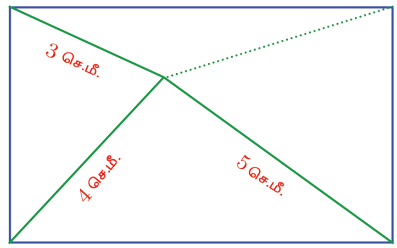
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2 + ((2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

இவற்றுள் மிகப் பெரியது AC (அது எவ்வாறு கிடைத்தது?) மேலும், AB, BC என்பனவற்றின் நீளத்தைக் கூட்டினால் 15; இது AC இன் நீளம் அல்ல. அப்போது A, B, C ஒரே நேர்கோட்டில் அல்ல.

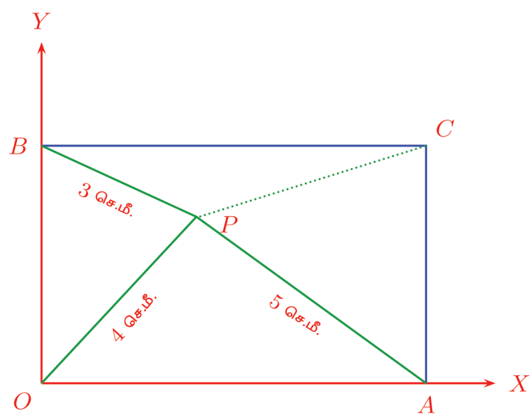
வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஒரு செவ்வகத்தின் உள்ளே இருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து செவ்வகத்தின் அடுத்தடுத்த மூன்று உச்சிகளுக்கு உள்ள தூரம் 3 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர் இவ்வாறாகும். நான்காவது உச்சிக்கு உள்ள தூரம் எவ்வளவு?

ஒரு படம் வரைவோம்.



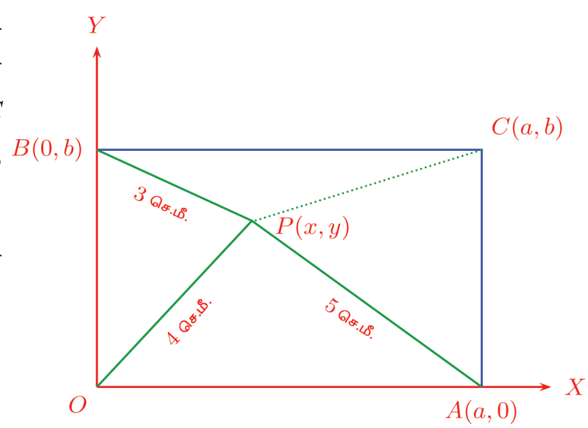
செவ்வகத்தின் கீழே இடப்பக்க உச்சி ஆதிப்புள்ளியாகவும், அதன் வழியாக உள்ள இரு பக்கங்களை அச்சுகளாகவும் எடுப்போம்:



படத்தில், A என்ற புள்ளி x அச்சில் உள்ளபடியால், அதன் y குறிகாட்டி எண் 0 ஆகும்; அதன் x குறிகாட்டி எண் a என எழுதினால், A இன் குறிகாட்டி எண்கள் $(a, 0)$.

இதைப்போன்று B இன் y குறிகாட்டி எண்ணை b என எடுத்தால் அதன் குறிகாட்டி எண்கள் $(0, b)$. அப்போது C இன் குறிகாட்டி எண்கள் (a, b) ஆக வேண்டும்.

P இன் குறிகாட்டி எண்கள் (x, y) என எடுக்கலாம்:



இனி தெரிந்த நீளங்களின் வர்க்கங்களைக் குறிகாட்டி எண்கள் பயன்படுத்தி எழுதலாம்:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 = 16$$
$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டியது PC அல்லவா; அதன் வர்க்கம்

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

மேலே எழுதிய மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து இதைக் கணக்கிட முடியுமா?

அந்தத் தொகுப்பில் உள்ள முதலாவதும் இரண்டாவதும் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\left(x^2 + (y - b)^2\right) - (x^2 + y^2) = 9 - 16$$

எனவும் காணலாம். அதாவது,

$$(y - b)^2 - y^2 = -7$$

மூன்றாவது சமன்பாடும் இதுவும் பயன்படுத்தி

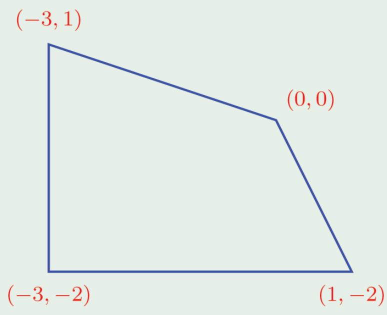
$$(x - a)^2 + y^2 + \left((y - b)^2 - y^2\right) = 25 - 7$$

எனவும் காணலாம். அதாவது

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 18$$

அப்போது PC இன் நீளம் $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர்.

(1) படத்தில் நாற்கரத்தின் பக்கங்களின், மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.



(2) (2, 1), (3, 4), (− 3, 6) என்ற புள்ளிகளை இணைத்தால் செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

(3) ஆதிப்புள்ளி மையமும் ஆரம் 10 உம் உள்ள ஒரு வட்டம் வரையப்படுகிறது.

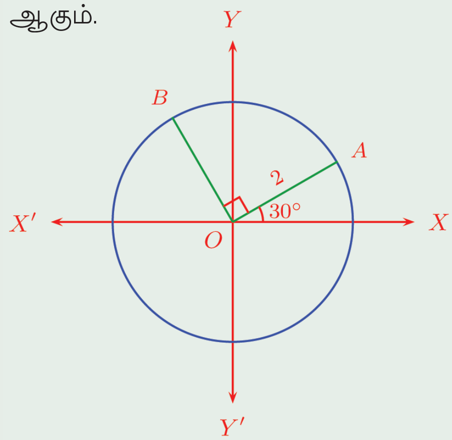
i) குறிகாட்டி எண்கள் (6, 9), (5, 9), (6, 8) ஆன புள்ளிகள் இந்த வட்டத்தின் உள்ளேயா, வெளியேயா, வட்டத்திலா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

ii) இந்த வட்டத்தில் உள்ள 8 புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களை எழுதுக.

(4) மையத்தின் குறிகாட்டி எண்கள் (1, 1) உம், ஆரம் $\sqrt{2}$ உம் உடைய வட்டத்தில் x அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களையும், y அச்சை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ என்ற புள்ளிகள் ஆகும். இதன் சுற்றுவட்டத்தின் மையமும் ஆரமும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(6) படத்தில் வட்டத்தின் மையம் ஆதிப்புள்ளியும், A, B வட்டத்தில் உள்ள புள்ளிகளும் ஆகும்.



AB என்ற நாணின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் முடியும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	மேலும் மேம்பட வேண்டும்
• புள்ளிகளின் இடங்களை எண்ஜோடிகள் பயன் படுத்திக் குறிக்கும் முறையை விளக்குதல்.			
• எண்ஜோடிகளைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி, பல்வகை வடிவங்களை உருவாக்குதல்.			
• x, y அச்சுகள் வரைந்து பல்வகை வடிவங்களில் புள்ளிகளின் குறிகாட்டி எண்களைக் கண்டு பிடிக்க இயலுதல்.			
• கணினியில் ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி வடிவியல் வரிசைகள் உருவாக்குவதற்கு உரிய வழிமுறையை விளக்குதல்.			
• குறிகாட்டி எண்களைப் பயன்படுத்தி, இரு புள்ளிகளின் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு வதற்கு உரிய வழிமுறையைக் கண்டு பிடிக்க இயலுதல்.			
• உச்சிகளின் குறிகாட்டி எண்களைப் பயன்படுத்தி அவை உறுதிப்படுத்துகின்ற வடிவியல் வடிவங் களின் பல்வேறு அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க இயலுதல்.			

Notes

Notes

Notes

Notes