ತರಗತಿ VIII

ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ಭಾಗ - 1

PART - 1

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ
2016

KT 439-1/MATHS-8-(K)vol-1

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ,
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ಬಂಗ,
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ,
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ,
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ,
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ,
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ,
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ!

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ನನ್ನ ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
First Edition: 2015, Reprint 2016
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೆ,

ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಹಳಷ್ಟು ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಿ ಆಯಿತು. ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಸಾಗಬೇಕಾದ ದಾರಿ ಬಹಳಷ್ಟಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶಾಲವಾದ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಯುಕ್ತಿಯನ್ನು ಹುಡುಕುತ್ತಾ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಹೊಸ ಕ್ಷೇತ್ರದತ್ತ ಅನ್ವೇಷಣೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸೋಣ.

ಪ್ರೀತಿಯ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಪಿ.ಎ. ಫಾತಿಮ
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

PARTICIPANTS

T.P. Prakashan
G.H.S.S. Vazhakkad, Malapuram.

Unnikrishnan M.V.
G.H.S.S. Kumbla, Kasaragod.

Narayanan K.
V.A.R.H.S.S. Bovikana, Kasaragod.

Mohanan C.
G.H.S.S. Angadikall South, Chengannur.

Ubaidulla K.C.
G.V.H.S.S. Arikkod, Malapuram

Vijaya kumar T.K.
G.H.S.S. Cherkala, Kasaragod

V.K. Balagangadharan
G.H.S.S. Calicut University Campus, Malapuram

Shrikumar T.
GGHSS, Karamana, Thiruvananthapuram

Narayananunni
DET Palakkad.

Ebrahim Kurian
G.H.S.S. Puthukall, Nilambur.

Sunilkumar V.P.
Jannath H.S.S. Vendaramood.

Krishnaprasad
C.M.S.A.V.H.S.S. Pappanangadi, Malapuram

Cover

Ragesh P. Nair

Participants (Kannada Version)

Mathematics - VIII Standard

Krishna Prakash S.
H.S.A., S.N.H.S. Perla

Balakrishna P.
H.S.A., B.E.M.H.S.S. Kasaragod

Harsha Kumar M.
H.S.A., S.G.K.H.S. Kudlu

Raghava A.
H.S.A., G.H.S.S. Bellur

Rajeshchandra K.P.
H.S.A., B.E.M.H.S.S. Kasaragod

Co-ordinator
Dr. Faisal Mavulladathil

Experts

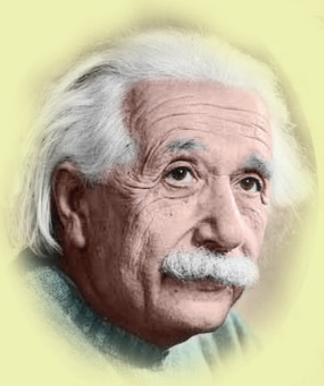
Dr. E. Krishnan
Rtd. Prof. University College, Thiruvananthapuram.

Shri Venugopal C.
Asst. Prof. College of Teachers Education, Thiruvananthapuram.

Academic Co-Ordinator

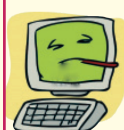
Sujith Kumar G.
Research Officer, SCERT

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Vidyabhavan, Pujappura, Thiruvananthapuram - 695 012



ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

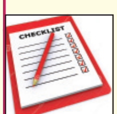
ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು
ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.



ICT ಸಾಧ್ಯತೆ

ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ನೋಡುವ

ಪ್ರೋಜೆಕ್ಟ್



ಪುನರವಲೋಕನ

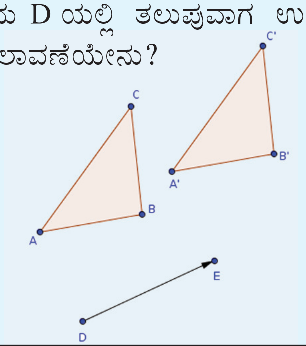
1

ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

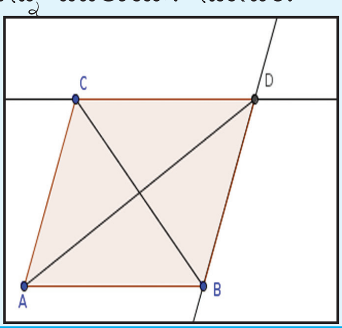
ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲು ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ?

ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. D, E ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Translate by Vector ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ΔABC, D, E ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ.ಹೊಸ ಒಂದು ΔA′B′C′ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಏನು? ΔABCಯ ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಕೋನಗಲನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ΔA′B′C′ ಬದಲಾಗುವುದೇ? Eಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. E ಎಂಬ ಬಿಂದು D ಯಲ್ಲಿ ತಲುಪುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯೇನು?

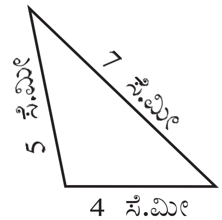


ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು DE ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. Reflect about Line ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋದಲ್ಲೂ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ. ΔA′B′C′ ಲಭಿಸುವುದು. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ΔABC ಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ, DE ಎಂಬ ಗೆರೆಯಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಬಾಗುವಿಕೆ ಮೊದಲಾದ ವುಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

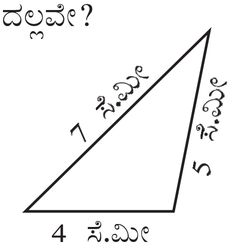


ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಹಾಗೂ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ

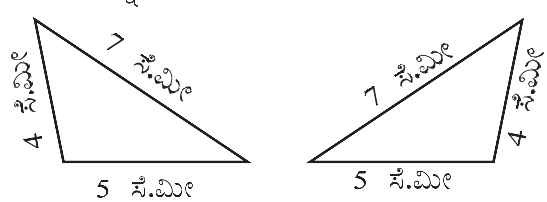
ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?



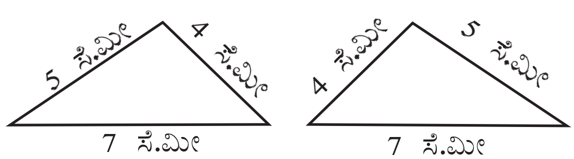
ಹೀಗೂ ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ?



ಇದೇರೀತಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿಯೂ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವಂತೆಯೂ ರಚಿಸಬಹುದು.



ಈ ಆರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಕೋನಗಳೋ?

ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಮಗುಚಿಯೂ ಇರಿಸಿದವುಗಳೇ ಇತರ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲವೇ

ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಚಾರ್ಟ್ ಪೇಪರಿನಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು,ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಮಗುಚಿಯೂ ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದಿಸಿ ಇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡಿರಿ.

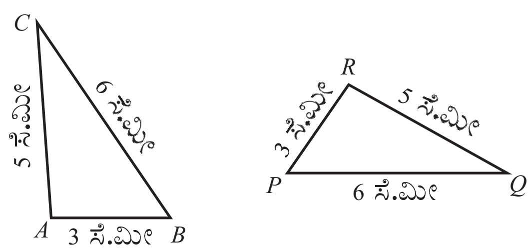
ಸಮಾನವಾದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ಇರಿಸಿದರೆ ಕೋನಗಳೂ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

ಇತರ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ, ΔABC ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವೂ ΔPQR ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಯಾವ ಯಾವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು?

$\angle A$ ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನ ಯಾವುದು?

$\angle A$ ಎಂಬುದು ΔABC ಯ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ΔPQR ನ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನ ಯಾವುದು?

ಆಗ

$\angle A$ = ...

ಇನ್ನು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅತಿ ಸಣ್ಣಕೋನ ಯಾವುದು?

$\angle C$ = ...

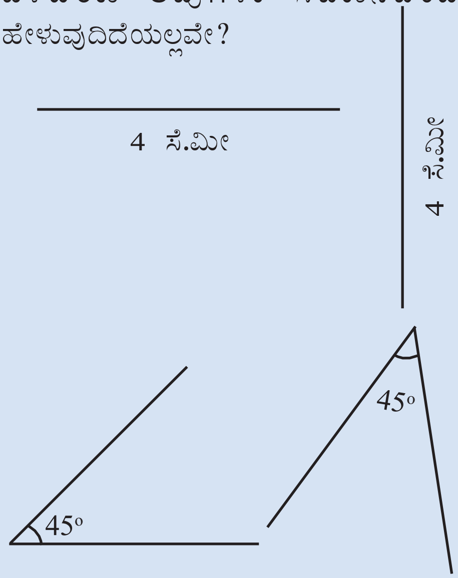
ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

$\angle B$ = ...

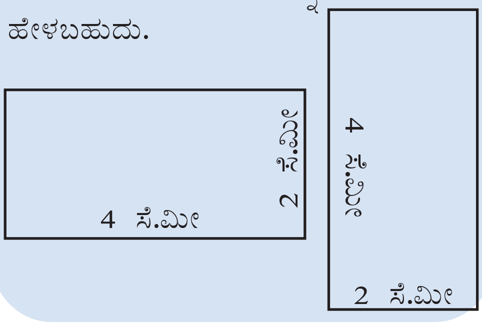
ಸಮಾನತೆ

ಗೆರೆಗಳು, ಕೋನಗಳು, ಆಯತಗಳು ಮೊದಲಾದ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಿವೆ.

ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆದರೂ ಅವುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳುವುದಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



ಹಾಗೆಯೇ ಅಳತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಹೇಳುವರು. ಸಮಾನ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನೂ ಸಮಾನವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ನೋಡಬಹುದು. ΔABC ಯ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಭುಜ BC ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಕೋನ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಕೋನವಾದ $\angle A$.

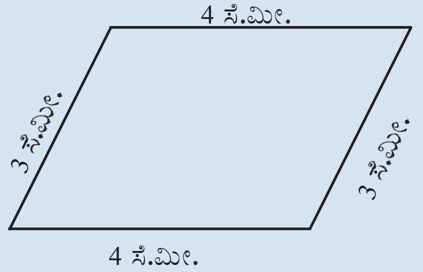
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವಾದ AB ಯ ಎದುರಿರುವ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಕೋನವಾದ $\angle C$; ಮೂರನೆಯ ಭುಜವಾದ AC ಯ ಎದುರಿರುವುದು ಮೂರನೆಯ ಕೋನವಾದ $\angle B$.

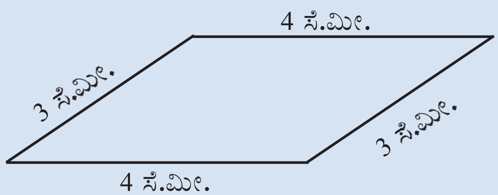
ΔPQR ನಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಆಗ ಮೊದಲು ಕಂಡ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಾನತೆ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





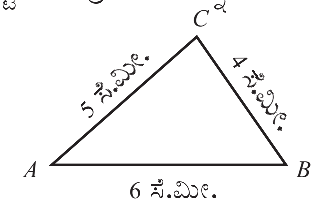
ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲವಲ್ಲ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಯ ಸಮಾನತೆಯ ಕುರಿತು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಹೇಳುವುದು ಹೀಗೆ :

> *ಒಂದರೊಡನೊಂದು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.*

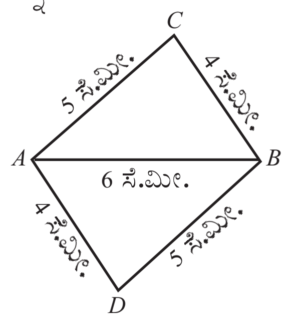
ಮೊದಲಿನ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಗಳು, ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಮ್ಮೆ ತಿರುಗಿಸಿ ಇರಿಸಿದರೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವಾ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಇದೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು AB ಯ ಕೆಳಗೆ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಬಲಭಾಗವನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿರಿ.



ΔABC ಯ AC, BC ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು, ΔABD ಯ BD, AD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಮೂರನೆಯ ಭುಜವು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ AB ಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಮೂರೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ

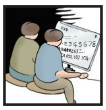
$\angle CAB = \angle DBA$ $\quad\quad$ $\angle CBA = \angle DAB$

AC, BD ಎಂಬ ಗೆರೆಗಳನ್ನು AB ಎಂಬ ಗೆರೆ ಸಂಗಮಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಏಕಾಂತರ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ $\angle CAB$ ಮತ್ತು $\angle DBA$ ಎಂಬಿವುಗಳು. ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, AC ಮತ್ತು BD ಗಳೂ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ BC ಮತ್ತು AD ಗಳೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. (ವಿವರಿಸಬಹುದೇ?)

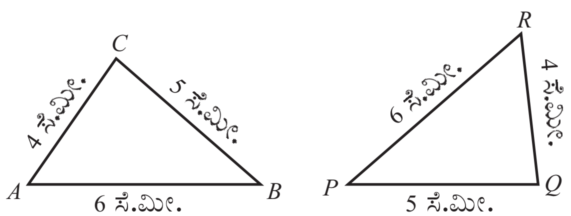
ಅಂದರೆ $ACBD$ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದ **ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಒಂದು ಕರ್ಣ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?

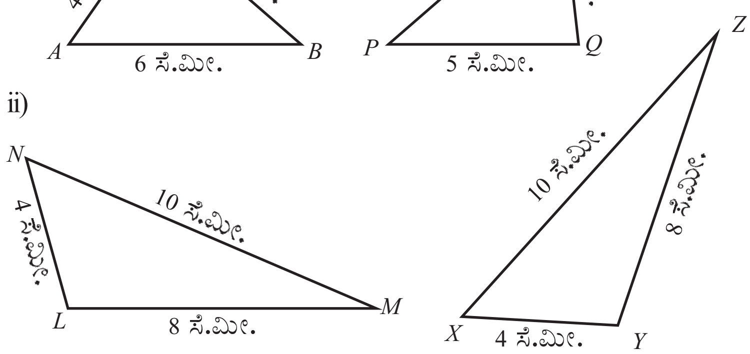


(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

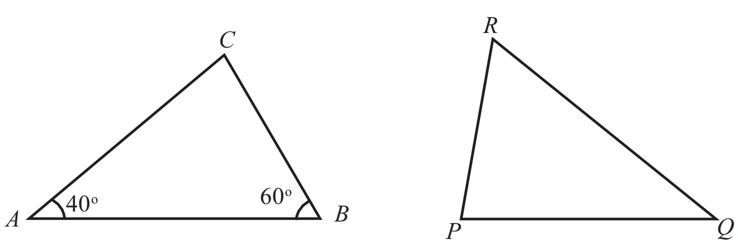
i)



ii)



(2) ಈ ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ $AB = QR$ $BC = RP$ $CA = PQ$ ಆಗಿವೆ :



ΔABC ಯ $\angle C$ ಮತ್ತು ΔPQR ನ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

ಪದ ಮತ್ತು ತಿರುಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದಿಸಿಡಬಹುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವು ನವೋತ್ಥಾನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಯುರೋಪಿನಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಯಿತು. ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದು ಎನ್ನುವುದರ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದ congruent ಎಂದಾಗಿದೆ. ಹತ್ತೊಂಬತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಿಂದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಮಾನತೆ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ equal ಎಂಬುದರ ಬದಲು congruent ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು.

ನಮ್ಮ ಭಾಷೆ

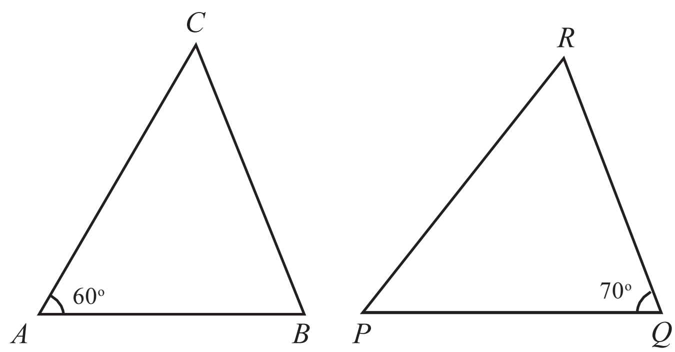
ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಕುರಿತಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ ಭಾಷಾಂತರಗೊಳಿಸಿದಾಗ congruent ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳು ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವಂತಿರುವುದಾದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳೂ (ಉದ್ದವೂ ಕೋನವೂ) ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ.

ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುವು.

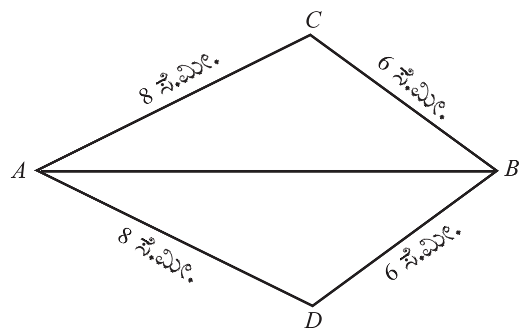
(3) ಕೆಳಗೆ ರಚಿಸಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ

$AB = QR$, $BC = PQ$, $CA = RP$ ಆಗಿವೆ.



ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಇತರ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

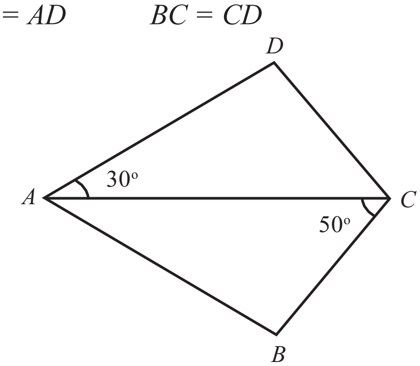
(4)



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC, ΔABD ಎಂಬವುಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ

$AB = AD \qquad BC = CD$



ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

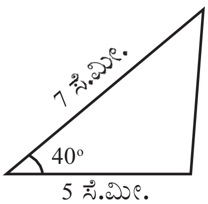
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೇ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ

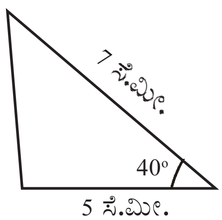
ಮೂರೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನೂ ತಿಳಿದರೆ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನ 40° ಆಗಿರುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಹೀಗೆ ರಚಿಸುವಾ

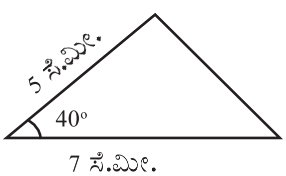


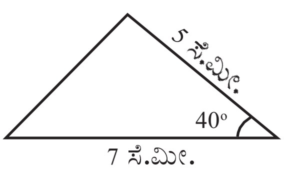
ಹೀಗೂ ಆಗಬಹುದು.



min = 0, max = 5 ಆಗಿರುವ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4, 5, 6 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ 4a, 5a, 6a ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. (Angle ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು) a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಏನಾಗುವುದು? $a = 1$ ಆಗುವಾಗಲೋ?

ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿಯೂ ರಚಿಸಬಹುದು.





ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಮೂರನೆಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ?

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ದಪ್ಪ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ತಿರುಗಿಸಿಯೂ, ಮಗುಚಿಯೂ ಇತರ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

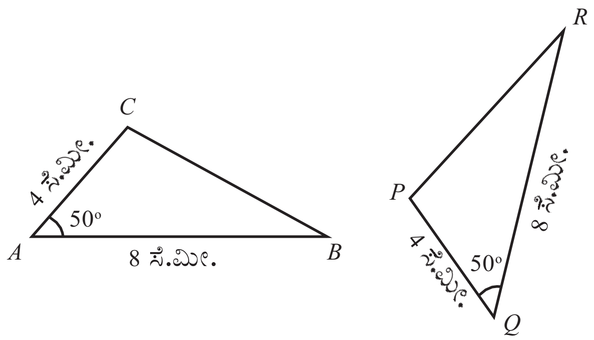
ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ?

ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನ, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಕ್ಕೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು; ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ΔABC ಯ AB, CA ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ $\angle A$ ಯೂ ΔPQR ನ QR, PQ ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ $\angle Q$ ವಿಗೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡದ್ದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ΔABC, ΔPQR ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂರನೇಯ ಭುಜಗಳಾದ BC, PR ಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; $\angle B$, $\angle C$ ಎಂಬಿವುಗಳು ΔPQR ನ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

$\angle B$ ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನ ಯಾವುದು?

ಸಮಾನ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ AC ಎಂಬ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವುದು $\angle B$ ಆಗಿದೆ.

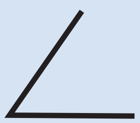
ΔPQR ನಲ್ಲಿ AC ಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಭುಜ PQ; ಅದರ ಎದುರಿರುವ ಕೋನ $\angle R$.

ಆಗ $\angle B = \angle R$.

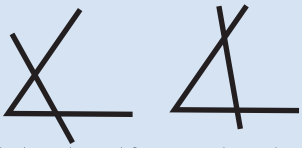
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\angle C = \angle P$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ವಿವರಿಸಬಹುದೇ?)

ತ್ರಿಕೋನ ನಿರ್ಧಾರ

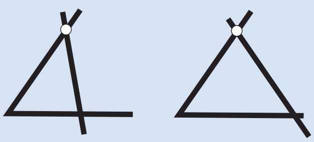
ಉದ್ದದ ಒಂದು ಮಡಲ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿರಿ.



ಈ ಕೋನದ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ಮಡಲ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಇರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ?



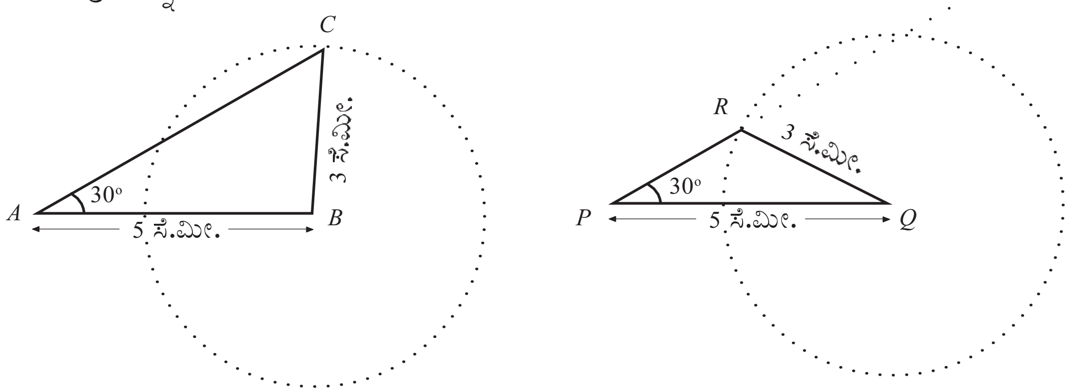
ಮೇಲಿನ ಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುರುತು ಹಾಕಿ ಎರಡನೆಯ ಮಡಲ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅದರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಮಾಡಿದರೆ?



ಮೇಲಿನ ಭುಜದಲ್ಲೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದಲ್ಲೂ ಗುರುತು ಹಾಕಿ, ಈ ಗುರುತುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಮಡಲ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಇರಿಸಬೇಕೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ? ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಉಂಟಾಗುವುವು?

ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೇಳುವುದರ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಅಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ :



ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಏಳನೆ ತರಗತಿಯ **ತ್ರಿಕೋನ ರಚನೆ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ΔABC, ΔPQR ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ

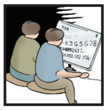
$AB = PQ = 5$ ಸೆ.ಮೀ.

$BC = QR = 3$ ಸೆ.ಮೀ.

$\angle A = \angle P = 30^\circ$

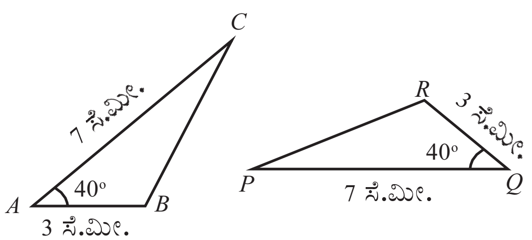
AC, PR ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೋ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಕೋನ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೂ ಮೂರನೆಯ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದು ಯಾಕೆ?

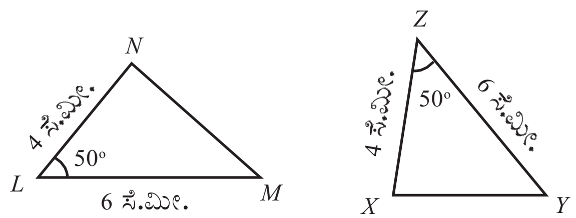


(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎರಡನೆಯ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

i)



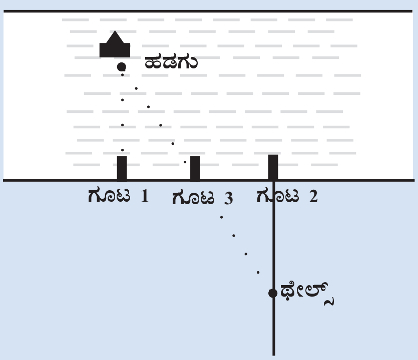
ii)



ಸರ್ವಸಮತೆಯ ತಂತ್ರ

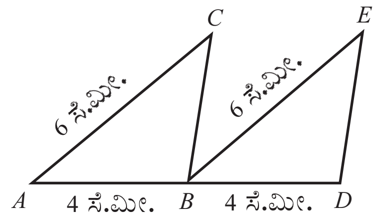
ಕ್ರಿ.ಶ. ಆರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಥೇಲ್ಸ್ ತತ್ವಜ್ಞಾನಿಯೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಆಗಿದ್ದನು. ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ದೂರದಲ್ಲಿ ಲಂಗರು ಹಾಕಿರುವ ಹಡಗು ದಡದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಥೇಲ್ಸ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದನೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಮೊದಲು ಹಡಗಿನಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ದಡದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೂಟವನ್ನು ನೆಡುವುದು. ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರದಲ್ಲಿ ಅದೇ ದಡದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಗೂಟವನ್ನು ನೆಡಬೇಕು. ಮುಂದುವರಿದು ಈ ಎರಡೂ ಗೂಟಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಮೂರನೆಯ ಗೂಟವನ್ನು ನೆಟ್ಟಗೆ ನೆಡಲಾಯಿತು.

ನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಗೂಟದಿಂದ ದಡಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ತೀರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಯಿತು. ಹಡಗನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಈ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಹಿಂದೆ ಹಿಂದೆ ನಡೆಯುತ್ತಾ ಮಧ್ಯದ ಗೂಟ ಹಡಗಿಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡಾಗ ನಡೆಯುವುದನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಯಿತು. ಆಗ ನಿಂತ ಜಾಗವನ್ನು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಯಿತು.



ಈಗ ಸಮುದ್ರದ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ದಡದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾದುದರಿಂದ (ಯಾಕೆ?) ದಡದಿಂದ ಹಡಗಿಗಿರುವ ದೂರವು ಥೇಲ್ಸ್ ಕೊನೆಗೆ ನಿಂತಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಸಮುದ್ರ ದಡ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

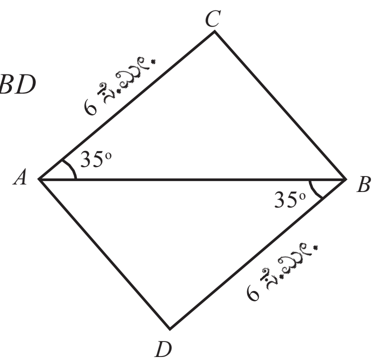
(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AC, BE ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ.



i) BC, DE ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವೇ? ಯಾಕೆ?

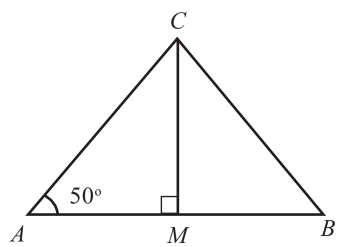
ii) BC, DE ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವೇ? ಯಾಕೆ?

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ACBD$ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೇ?

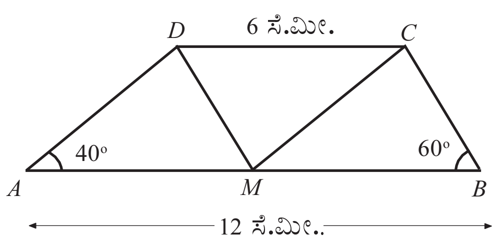


(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ.

ΔABC ಯ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.



(5) ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB, CD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ M.



i) ΔAMD, ΔMBC, ΔDCM ಎಂಬಿವುಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

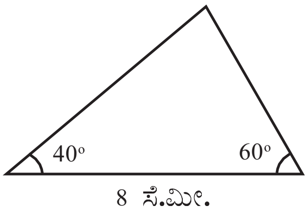
ii) $AMCD$, $MBCD$ ಎಂಬೀ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಶೇಷತೆಯೇನು?

ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳು

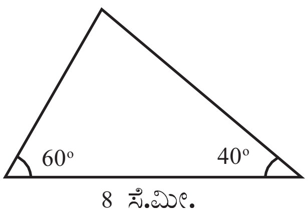
ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು; ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಹೇಳಿದರೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಹೇಳಿದರೆ?

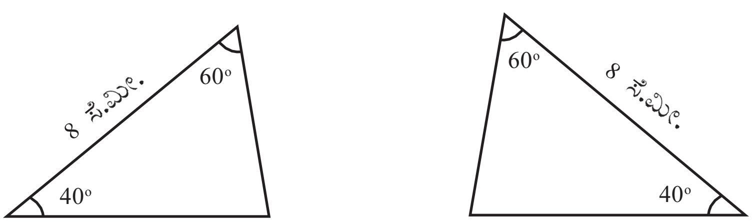
ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 8 ಸೆ.ಮೀ.; ಆದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ 40°, 60°



ಕೋನಗಳಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?



ಕೋನಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸುವ.



ಹೀಗೂ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಹೀಗೆ ರಚಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನ 80° ಆಗಿದೆ (ಕಾರಣವೇನು?)

ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೋ?

ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಇತರ ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಂದಿಗೆ ತಿರುಗಿಸಿಯೂ ಮಗುಚಿಯೂ ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ. ಇತರ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಮೂರನೆಯದಾದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವೂ ಆಯಿತು.

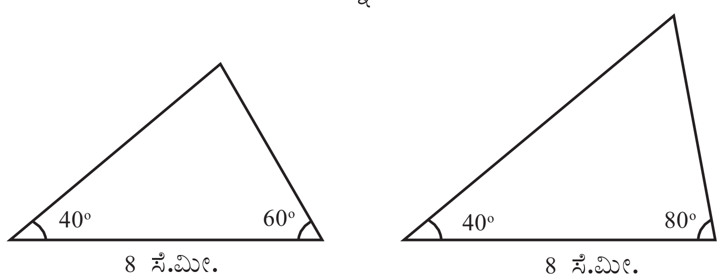
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವೂ ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಆಗ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ತಿಳಿದರೆ ಮೂರನೆಯ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

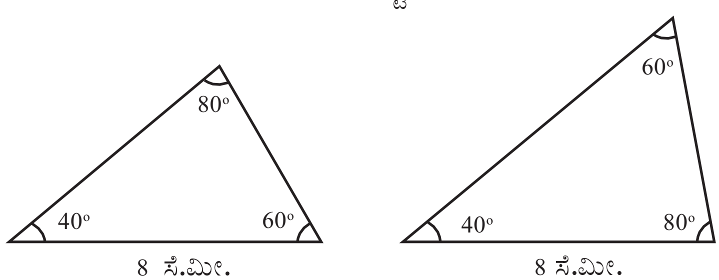
ಆಗ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವು ಕೂಡಾ ಸಮಾನವಾದರೆ? ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವುದೇ?

ಇದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ:

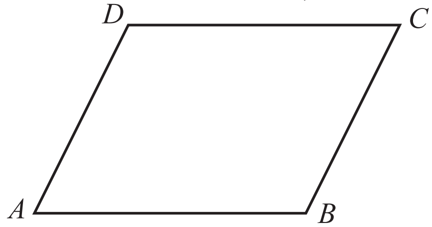


ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೂರನೆಯ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?



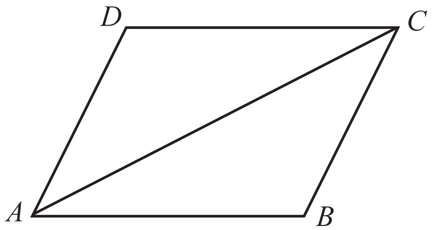
ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗದಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ಒಂದು ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನೋಡುವ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ $ABCD$ ಯು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ.



ಅಂದರೆ, ಇದರ AB, CD ಎಂಬೀ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳೂ, AD, BC ಎಂಬೀ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನಾಂತರಗಳಾಗಿವೆ.

AC ಎಂಬ ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.



ΔABC, ΔADC ಎಂಬಿವುಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭುಜ AC ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಲು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? AB, CD ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, AC ಎಂಬ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಏಕಾಂತರ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ $\angle CAB$ ಮತ್ತು $\angle DCA$. ಆದುದರಿಂದ

$$\angle CAB = \angle DCA$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\angle ACB = \angle DAC$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. (ಹೇಗೆ)

ಆಗ ΔABC, ΔADC ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ AC ಎಂಬ ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ,

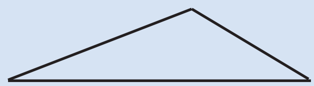
$$AB = CD \qquad AD = BC$$

ಇದು ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಸರಿಯಲ್ಲವೇ?

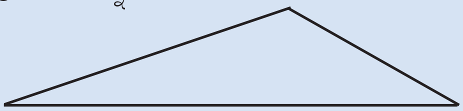
ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಸರಿಯಲ್ಲದ ಹೊಂದಿಕೆ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಎಂಬಂತೆ ಒಟ್ಟು ಆರು ಅಳತೆಗಳು ಇರುವುದಲ್ಲವೇ? ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳು (ಮೂರು ಭುಜಗಳು, ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನ, ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿನ ಕೋನಗಳು) ಸಮಾನವಾದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವುದೆಂದೂ (ಅಂದರೆ ಬಾಕಿ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗುವುದೆಂದು) ನೋಡಿದೆವು. ಇನ್ನು ಒಂದು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳು 4, 6, 9 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



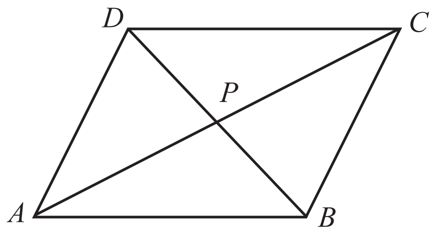
ನಂತರ 6, 9, 13.5 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? (ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ನೋಡಿದರೂ ಸಾಕು)

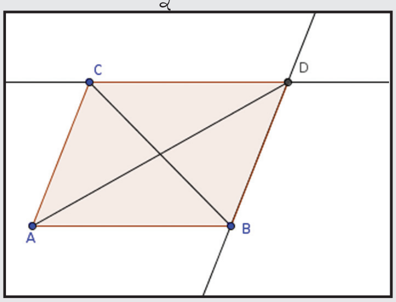
ಅಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಕೋನಗಳೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಐದು ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಇವುಗಳು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ DB ಎಂಬ ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆಯುವಾ. ಕರ್ಣಗಳು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ.



ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

AB, AC ಎಂಬ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. Parallel Line ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ AC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ B ಯ ಮೂಲಕವೂ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ C ಯ ಮೂಲಕವೂ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇವಗಳು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ABDC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕರ್ಣಗಳನ್ನೂ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡಿರಿ. (Mid Point or Center ಆಯ್ದು ಕರ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು). A, B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ΔAPB, ΔCPD ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳ AB, CD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ನೋಡಿ ಆಯಿತು. ಅವುಗಳ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಾದರೋ?

$\angle CAB$, $\angle DCA$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ನೋಡಿದೆವು

ಅಂದರೆ, $\angle PAB = \angle PCD$

$\angle PBA$, $\angle PDC$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವೇ?

ಇವುಗಳು AB, CD ಎಂಬೀ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳೂ BD ಎಂಬ ಗೆರೆಯೂ ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಏಕಾಂತರ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ΔAPB, ΔCPD ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ AB, CD ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಅವುಗಳ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

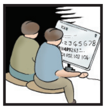
ಅಂದರೆ, $AP = CP$ $\quad BP = DP$

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, AC, BD ಎಂಬೀ ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು P ಆಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವು, ಎರಡೂ ಕರ್ಣಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿದೆ.

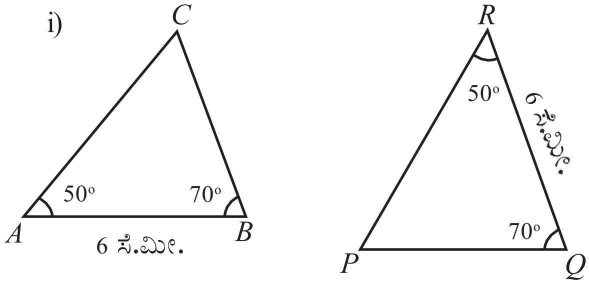
ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.

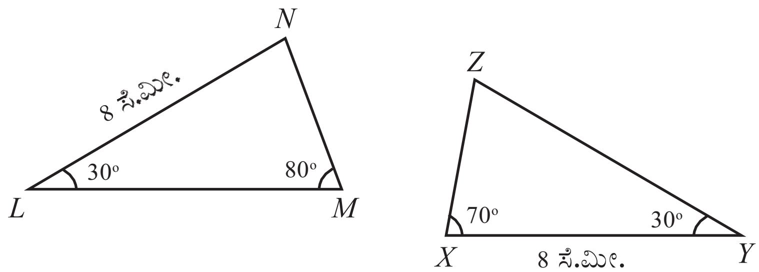


(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ, ಒಂದನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಬರೆಯಿರಿ.

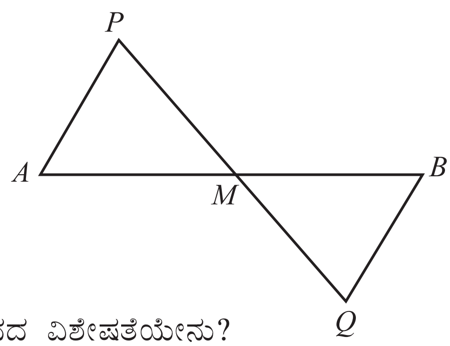
i)



ii)



(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯು ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಮತ್ತು ಸಮಾನವಾದ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಾದ AP, ಮತ್ತು BQ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. PQ, AB ಪರಸ್ಪರ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ.

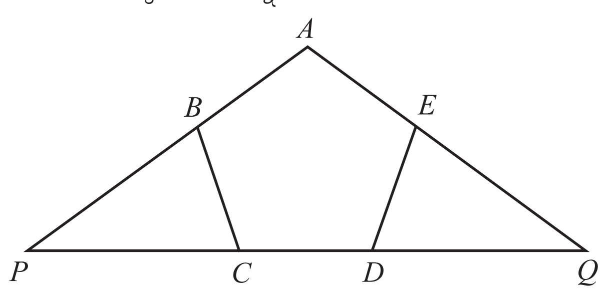


i) ΔAMP ಯ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳೂ ΔBMQ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

ii) AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ M ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನದ ವಿಶೇಷತೆಯೇನು?

iii) 5.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಒಂದು ಮಟ್ಟವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

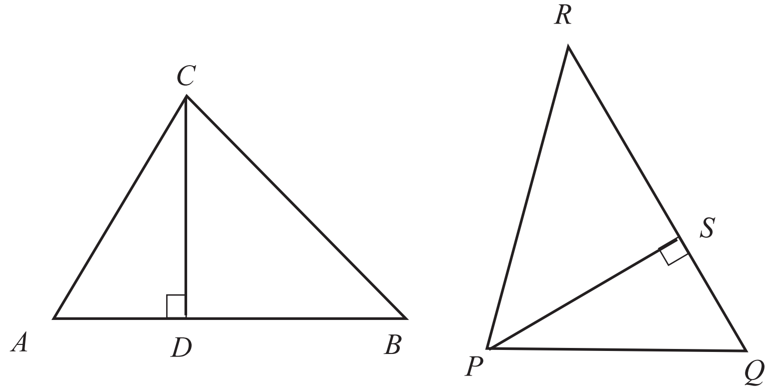
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCDE$ ಎಂಬ ಪಂಚಭುಜದ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. AB, AE ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಭುಜವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು P, Q ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



i) ΔBPC ಯ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ΔEQD ಯ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

ii) ΔAPQ ವಿನ AP, AQ ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

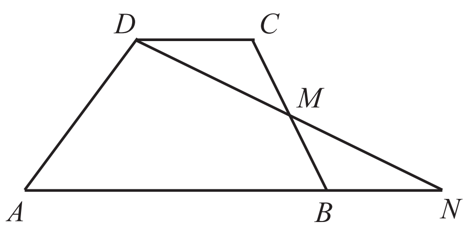
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ΔABC, ಮತ್ತು ΔPQR ಎಂಬವುಗಳಲ್ಲಿ
$AB = QR$, $BC = RP$, $CA = PQ$ ಆಗಿವೆ.



i) CD, PS ಎಂಬವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

ii) ΔABC, ΔPQR ಎಂಬವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜ $ABCD$ ಯಲ್ಲಿ AB, CD ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ; BC ಎಂಬ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿದೆ.



DM, AB ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳು N ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.

i) ΔDCM, ΔBMN ಎಂಬವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವೇ? ಕಾರಣವೇನು?

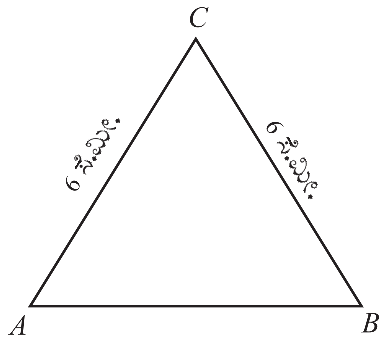
ii) $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ADN ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

(6) ಒಂದು ಆಯತದ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೇ?

ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

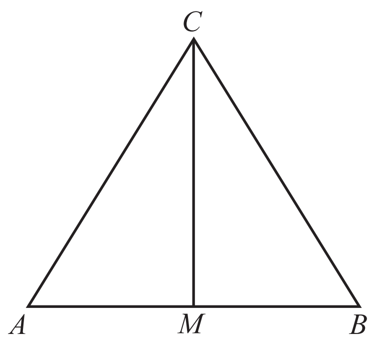
ಇದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ?



ಇಂತಹ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸೇರಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಡಚಿ ನೋಡಿರಿ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವುದಲ್ಲವೇ?

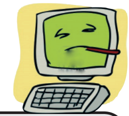
ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಮಡಚಿದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ; ಅಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ಶಿರವನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು.



ಈಗ *AMC, BMC* ಎಂಬ ಎರಡು ಕೋನಗಳಾಗುವುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ *AC, BC* ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

M ಎಂಬುದು, *AB* ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ *AM, BM* ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಎರಡರಲ್ಲೂ ಮೂರನೇ ಭುಜ *CM* ಆಗಿದೆ.



min = 3, max = 15 ಆಗುವಂತೆ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. ಉದ್ದ 6 ಆಗಿರುವ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. A, B ಎಂಬಿವುಗಳು ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ a ಆಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದು C ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಮರೆಮಾಡಿರಿ. a ಯ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೆ? ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಕೋನಗಳೋ? a = 6 ಆಗುವಾಗ ಕೋನಗಳು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ, ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಆಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ *CM* ಎಂಬ ಭುಜದ ಎದುರಿರುವ $\angle A, \angle B$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಾಣಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\Delta AMC, \Delta BMC$ ಗಳ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳಾದ *AC, BC* ಗಳ ಎದುರಿರುವ $\angle AMC, \angle BMC$ ಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಈ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳು CM ಎಂಬ ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿದೆ.

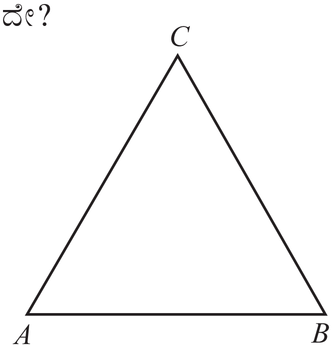
ಆಗ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು 90° ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, CM ಎಂಬ ಗೆರೆ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

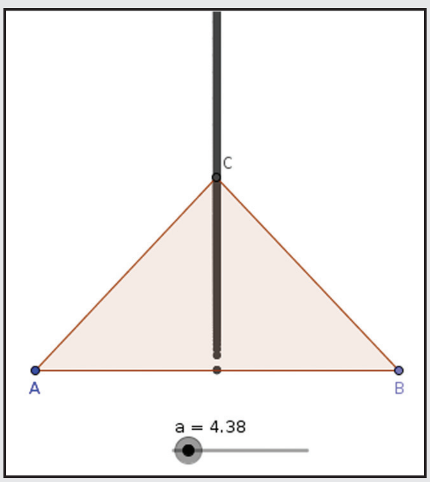
ಇನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಚಾರ : ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಅಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವುದೇ?

ಒಂದು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿರಿ :

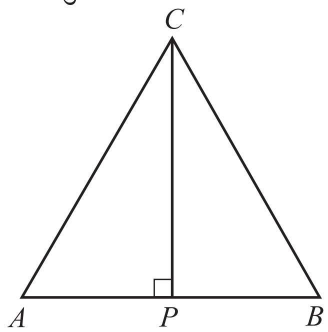


ಹಿಂದಿನ ಪೇಜಿನ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ Trace On ನೀಡಿರಿ. C ಯು ಸಂಚರಿಸುವ ಪಥವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.



ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle A = \angle B$ ಆಗಿದೆ. $AC = BC$ ಆಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಪ್ರಶ್ನೆ.

ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ΔABC ಯನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ. ಇಲ್ಲಿ Cಯನ್ನೂ AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಬದಲಾಗಿ Cಯಿಂದ AB ಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಅನುಕೂಲ.



$\Delta APC, \Delta PBC$ ಇವುಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭುಜ CP ಆಗಿದೆ. ಅದರ P ಎಂಬ ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೋ?

$\angle A = \angle B$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\angle APC = 90^\circ = \angle BPC$ ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದೆ.

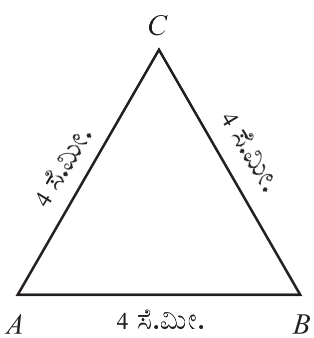
ಆಗ ಮೂರನೇ ಕೋನಗಳಾದ $\angle ACP, \angle BCP$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ? (ಯಾಕೆ?)

ಹೀಗೆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಲಭಿಸಿತು. ಆಗ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೆ. ಆದುದರಿಂದ AC, BC ಇವುಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತಿಳಿದು ಬರುವುದು.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಈ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನ (isosceles triangle) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡ ತತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ :



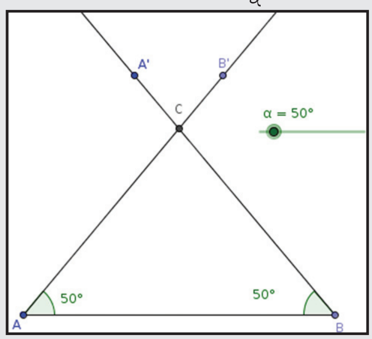
ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಇಂತಹ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು. ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವು ಒಂದು ವಿಶೇಷತೆಯಾಗಿದೆ. (equilateral triangle).

ಚಿತ್ರ ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AC = BC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು $\angle B, \angle A$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಲ್ಲದೆ $AB = AC$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಎದುರಿರುವ $\angle C, \angle B$ ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಕೋನಗಳು ಮೊತ್ತ $180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು $180° \div 3 = 60°$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ 60° ಆಗಿವೆ

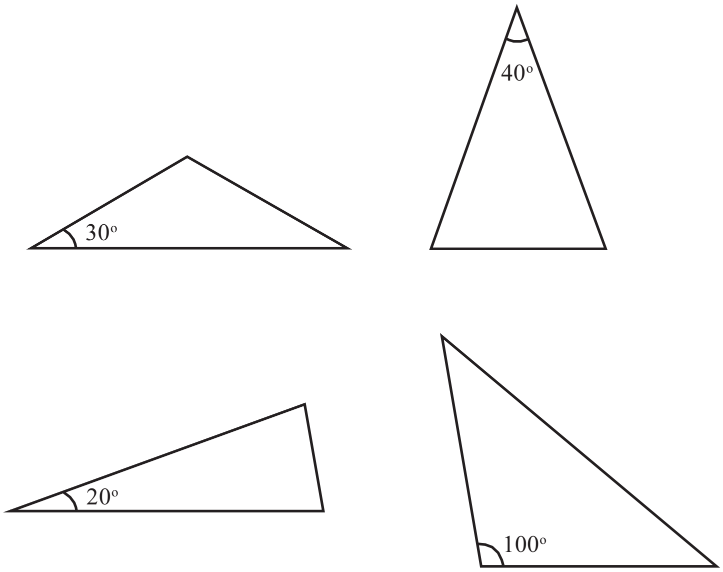
ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ $60°$ ಆದರೆ, ಅದೊಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. (ವಿವರಿಸಬಹುದೇ?)

Slider ನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ Angle ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ α ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. min = $0°$, max = $90°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಉದ್ದ 6 ಆಗಿರುವ AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\angle A = \angle B = \alpha$ ಆಗುವಂತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು $A'C$, $B'C$ ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು A', B' ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮರೆಮಾಡಿರಿ. α ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ $\alpha = 60°$ ಆಗುವಾಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಏನಾಗಿರುವುದು? $45°$ ಆಗುವಾಗಲೋ?

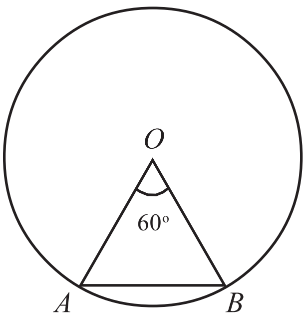
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವರು. ಉಳಿದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(2) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನ 120° ಆಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

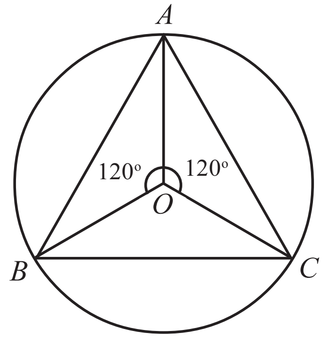
(3) ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನ 90° ಆಗಿದೆ. ಅದರಿಂದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ?

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವೂ, A, B ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳೂ ಆಗಿವೆ.



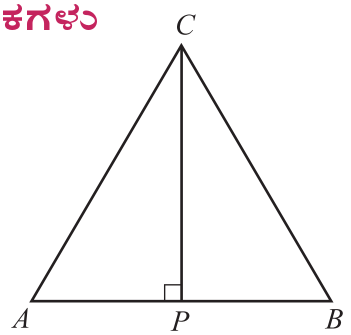
$\angle A, \angle B$ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವೂ, A, B, C ಎಂಬಿವುಗಳು ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳೂ ಆಗಿವೆ.



ΔABC ಯ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಾವುವು?

ಸಮಭಾಜಕಗಳು



ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

ΔABC ಯಲ್ಲಿ AC, BC ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. CP ಯು C ಯಿಂದ AB ಗಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $\Delta APC, \Delta BPC$ ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳು, ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ತಿಳಿದೆವು. ಆಗ AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ AB ಯನ್ನು CP ಯು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

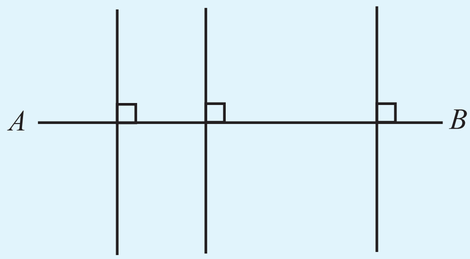
ಅಲ್ಲದೆ $\angle ACP, \angle BCP$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ CP ಎಂಬ ಗೆರೆ $\angle C$ ಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಶಿರದಿಂದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬವು ಆ ಶಿರಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತು ಎದುರಿರುವ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ.

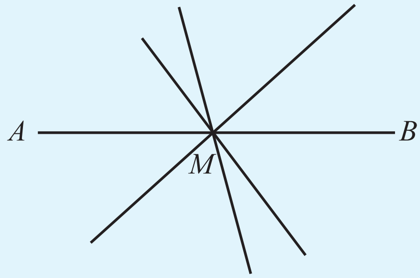
ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೂ ಕೋನವನ್ನೂ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಜಕ (bisector) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ CP ಗೆರೆ AB ಯ ಮತ್ತು $\angle C$ ಯ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. ಇದು AB ಗೆ ಲಂಬವಾದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು AB ಯ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕ (perpendicular bisector) ಎಂದೂ ಹೇಳುವರು.

ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ

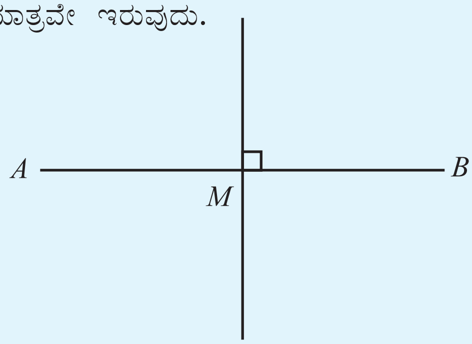
ಒಂದು ಗೆರೆಗೆ ಅನೇಕ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಒಂದು ಗೆರೆಗೆ ಅನೇಕ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

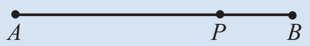


ಲಂಬವೂ ಸಮಭಾಜಕವೂ ಆಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಮಾತ್ರವೇ ಇರುವುದು.

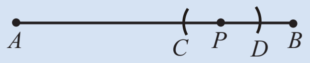


ಒಳಗಿನಿಂದ ಒಂದು ಲಂಬ

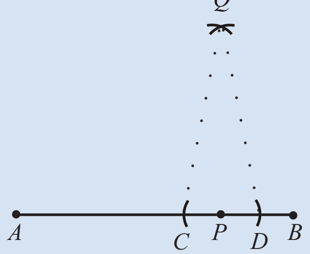
ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಲಂಬ ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?



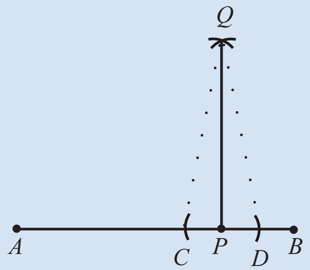
ಮೊದಲು P ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ABಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು C, Dಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು C ಯಿಂದಲೂ D ಯಿಂದಲೂ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ Q ವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ΔCQD ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಲ್ಲವೇ? ಆದ್ದರಿಂದ QP ಎಂಬ ಗೆರೆ CD ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. CD ಗೆರೆಯು AB ಗೆರೆಯ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ QP ಎಂಬ ಗೆರೆ AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

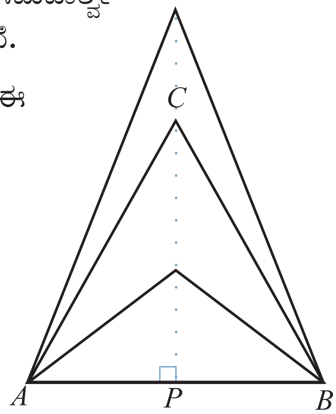


ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು : AB ಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ C ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು.

AB ಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇತರ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೆ.

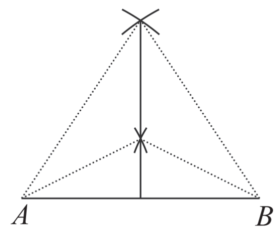
AB ಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವು ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು.

ಆದುದರಿಂದ AB ಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ AB ಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

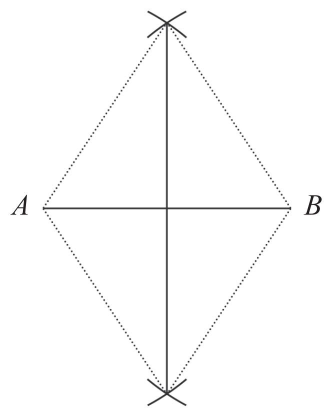


ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆಯಲು ಎರಡು ಬಿಂದು ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ ರಚಿಸಲು ಇಂತಹ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಾಕಾಗುವುದು. ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ರಚಿಸಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

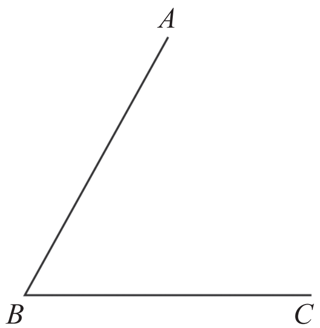


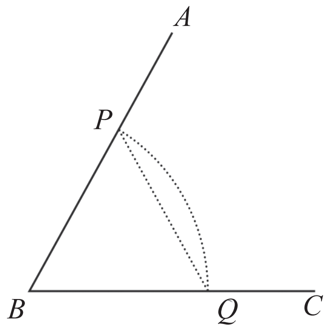
ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ A ಯಿಂದಲೂ B ಯಿಂದಲೂ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು. ಕೆಳಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಿ ರಚಿಸಬೇಕೆಂದಿದ್ದರೆ, ಹೀಗೂ ಆಗಬಹುದು.



ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

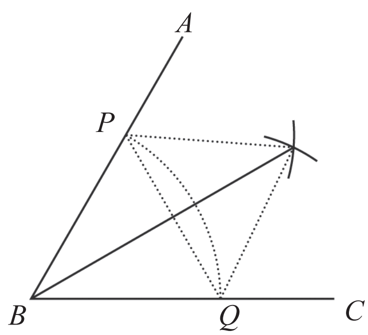
ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಈ ಕೋನ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

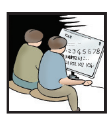




ಇನ್ನು ΔPBQ ವಿನಲ್ಲಿ PQ ಎಂಬ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಇದಕ್ಕೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ನಮಗೆ ರಚಿಸಬೇಕಾದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವು B ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೆ. (ಯಾಕೆ) ಆಗ ಈ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.





(1) 6.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(2) ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವು 3.75 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

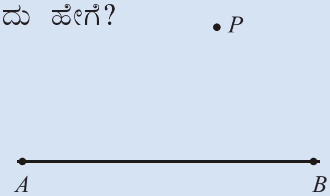
(3) 75° ಅಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಸಮಬಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(4) ತ್ರಿಜ್ಯವು 2.25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(5) $AB = 6$ ಸೆ.ಮೀ. $\angle A = 22\frac{1}{2}^{\circ}, \angle B = 67\frac{1}{2}^{\circ}$ ಎಂಬೀ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ΔABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

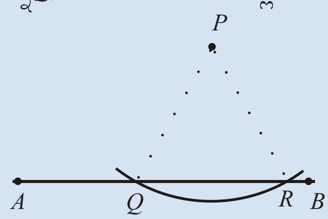
ಹೊರಗಿನಿಂದ ಇರುವ ಲಂಬ

ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

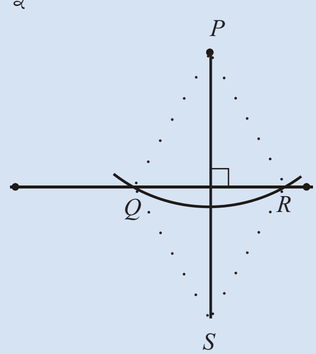


ಅದಕ್ಕಾಗಿ P ಯು ಮೇಲಿನ ಶಿರವಾಗಿಯೂ, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ AB ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ P ಯಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು AB ಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೆ.

P ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ABಯನ್ನು Q, R ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಖಂಡಿಸಬೇಕು.



ಇನ್ನು QR ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.

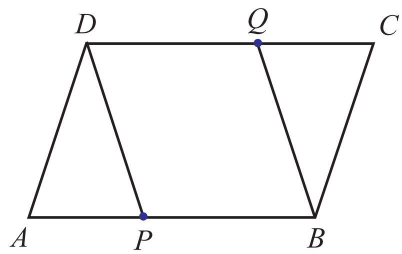


(6) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜಕ್ಕೂ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕ ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳೆಲ್ಲವು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಲ್ಲವೆ ಹಾದುಹೋಗುವುದು?

(7) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಕೋನಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳು ಹಾದುಹೋಗುವುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಲ್ಲವೇ?

(8) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅದೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

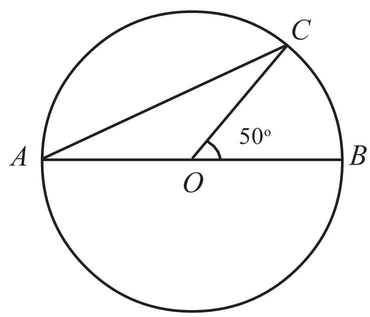
(9) $ABCD$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $AP = CQ$ ಆಗಿದೆ.



$PBQD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(10) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅದರ ಒಂದು ಕರ್ಣವು ಇನ್ನೊಂದು ಕರ್ಣದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(11) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವೂ AB ಯು ವ್ಯಾಸವೂ ಆಗಿದೆ. C ಯು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ.



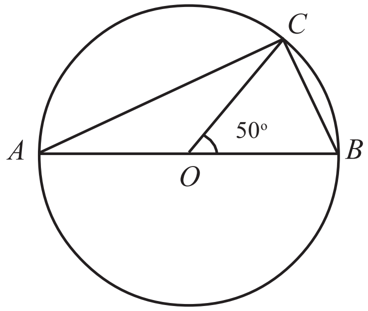
i) $\angle CAB$ ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

ii) $\angle COB$ ಯ ಅಳತೆಯು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಳತೆಯಾಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle CAB$ ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ..

ಹಗ್ಗವೂ ಲೆಕ್ಕವೂ

ಪ್ರಾಚೀನ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಮೂಲ ಗ್ರಂಥವಾದ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್‌ನ ಕುರಿತು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಲ್ಲವೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸುವಂತಹ ರೂಪಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅಳತೆ ಗುರುತಿಸಿರದ ಅಂಕುಡೊಂಕುಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಕೋನ (straight- edge) ಮತ್ತು ಕೈವಾರದಿಂದ ರಚಿಸುವ ರೂಪಗಳು ಮಾತ್ರ. ಇದು ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ? ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ನೂಲು ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಹಗ್ಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಉರುಟನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಎರಡು ಮಕ್ಕಳು ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎಳೆದು ಹಿಡಿದರೆ ಗೆರೆಯಾಗುವುದು. ಒಂದು ಮಗುವು ಇನ್ನೊಂದು ಮಗುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಹಿಡಿದುಕೊಂಡು ತಿರುಗಿದರೆ ಉರುಟಾಗುವುದು. ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿರುವ ಉಪಕರಣಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ ಇಂದು, ಇಂತಹ ರಚನೆಗಳಿಗೆ ಚಾರಿತ್ರಿಕವಾಗಿಯೂ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕವಾಗಿಯೂ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯತೆಯಿದೆ.

(12) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ, AB ಒಂದು ವ್ಯಾಸ ಆಗಿದೆ. C ಯು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ.



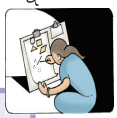
i) $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

ii) $\angle COB$ ಯ ಅಳತೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ವೃತ್ತದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(13) ಒಂದು ಕೋನ 50° ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆ 7 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು?

(14) $AB = 7$ ಸೆ.ಮೀ., $\angle A = 67\frac{1}{2}^\circ$, $\angle B = 15^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೋನಮಾಪಕ ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ರಚಿಸಿರಿ.



ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿದೆಯೇ?

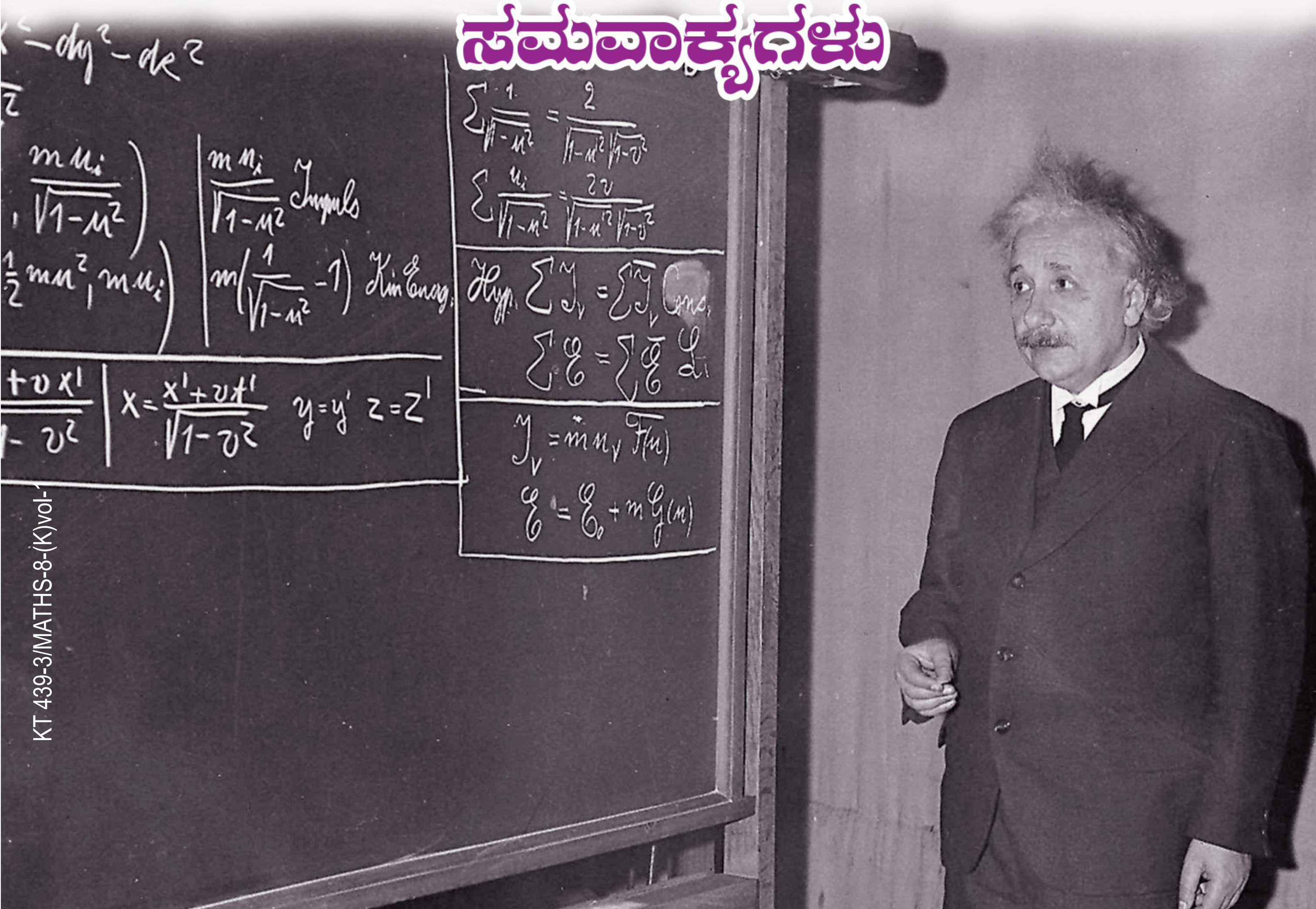
ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ. ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳ ಹೊರತು, ಇನ್ನಾವುದೇ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬಹುದೇ?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.	ಟೀಚರರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಲವು ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನ ವಾದರೆ, ಉಳಿದ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗುವ ವಿವಿಧ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕುರಿತಿರುವ ಇಂತಹ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಇತರ ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು.			
• ಗೆರೆಯ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ ರಚಿಸಲಿರುವ ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬ ಎಳೆಯಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			

2

ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು



KT 439-3/MATHS-8-(K)vol-1

ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ

ಸುಹರಾಳು ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಗೆಯನ್ನು ತೆಗೆದು ಎಣಿಸಿ ನೋಡುತ್ತಾಳೆ. "ಎಷ್ಟು ಹಣವಿದೆ?", ತಾಯಿ ಕೇಳಿದಳು. "ಏಳು ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಐವತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು", ಸುಹಾರಳು ತನ್ನ ಇಚ್ಚೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಳು.

ಸುಹಾರಾಳ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಗೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣವಿದೆ?

7 ರೂಪಾಯಿ ಲಭಿಸಿದರೆ 50 ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು. ಆಗ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದು 50 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ 7 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆ: $50 - 7 = 43$.

ಉಣ್ಣಿಯು ತನಗೆ ಲಭಿಸಿದ ವಿಷು ಕೊಡುಗೆಯಿಂದ ಎಂಟು ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಆದರೂ, ನಲ್ವತ್ತೆರಡು ರೂಪಾಯಿ ಬಾಕಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನಿಗೆ ಲಭಿಸಿರುವುದು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

8 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ 42 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಆಗ ಕೊಡುಗೆಯಾಗಿ ಲಭಿಸಿರುವುದು 42ಕ್ಕಿಂತ 8 ಹೆಚ್ಚು : $42 + 8 = 50$.

(1) "ಇನ್ನೂ ಆರು ಮಾರ್ಕು ಲಭಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ನೂರು ಮಾರ್ಕು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು", ರಾಜು ಪರಿತಪಿಸಿದನು. ರಾಜುವಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕು ಎಷ್ಟು?

(2) ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಲಿಸ್ಸಿಗೆ ತಾಯಿಯು 60 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಳು. ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿ ಬಾಕಿ 13 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಲಿಸ್ಸಿಯು ಹಿಂತಿರುಗಿಸಿದಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗೆ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು?

(3) ಗೋಪಾಲನು ಒಂದು ಗೊನೆ ಬಾಳೆಹಣ್ಣನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಹಾಳಾದ 7ನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ 46 ಉಳಿಯಿತು. ಗೊನೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(4) ವಿಮಲಳು 163 ರೂಪಾಯಿಗೆ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿ ಮಾಡಿದಾಗ 217 ರೂಪಾಯಿ ಉಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವಳಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(5) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 254ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 452 ಆಯಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

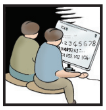
(6) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 198ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 163 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಗುಣಾಕಾರವೂ ಭಾಗಾಕಾರವೂ

ಒಂದು ಠೇವಣಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಆರು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಲಭಿಸಲು ಈಗ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಬೇಕು? ಠೇವಣಿಯ ಎರಡು ಮಡಿಯು 10,000 ರೂಪಾಯಿ; ಆಗ ಠೇವಣಿ ಮೊತ್ತವು 10,000ದ ಅರ್ಧ, 5000 ಆಗಿದೆ.

ತರಕಾರಿ ವ್ಯಾಪಾರದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಲಾಭವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಜನರು ಸಮಾನವಾಗಿ ಹಂಚಿಕೊಂಡಾಗ ಜೋಸಿಗೆ ಸಾವಿರದ ಐನೂರು ರೂಪಾಯಿ ಲಾಭ ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಲಾಭದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವೆಂಬುದು 1500 ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಲಾಭ 1500ರ 4 ಮಡಿ: $1500 \times 4 = 6000$.



(1) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಮ್ಯಾನೇಜರರ ಸಂಬಳವು ವಾಚ್‌ಮ್ಯಾನಿನ ಸಂಬಳದ ಐದು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಮ್ಯಾನೇಜರರ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ 50,000 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ. ವಾಚ್‌ಮ್ಯಾನಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಸಿಗುವ ಸಂಬಳವೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ವಿನೋದಯಾತ್ರೆಯ ಖರ್ಚಾದ 5200 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಭಾಗವಹಿಸಿದವರು ಸಮಾನವಾಗಿ ಹಂಚಿಕೊಂಡಾಗ 1300 ರೂಪಾಯಿನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಕೊಡಬೇಕಾಗಿ ಬಂತು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಯಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದವರೆಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 12ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 756 ಲಭಿಸಿತು. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಲಾಗಿದೆ?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 21 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 756 ಲಭಿಸಿತು. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿದೆ ಭಾಗಿಸಿರುವುದು?

ಹಲವು ವಿಧದ ಬದಲಾವಣೆ

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

> ಎರಡು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಮೂರು ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಿರುವ ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನೂ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 23 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಯಿತು. ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು 3 ರೂಪಾಯಿಯ ಪೆನ್ನನ್ನು ಕೂಡಾ ಖರೀದಿಸಿದಾಗ 23 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುವುದು. ಪೆನ್ನನ್ನು ಖರೀದಿಸಿಲ್ಲವಾದರೋ?

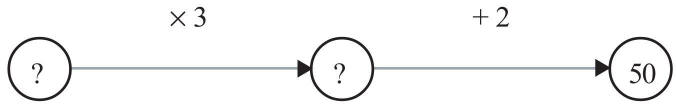
20 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುತ್ತಿತ್ತು.

ಈ 20 ರೂಪಾಯಿಯು ಎರಡು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 10 ರೂಪಾಯಿ. ಇನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗಲೋ? 10 ರೂಪಾಯಿಯ ಎರಡು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ 20 ರೂಪಾಯಿ, ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 3 ರೂಪಾಯಿ; ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ 23 ರೂಪಾಯಿ.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

> ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 50 ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ತಿಳಿಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅನಂತರ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 50 ಆಯಿತು.



ಬದಲಾಗಿ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಏನೆಲ್ಲಾ ಮಾಡಬೇಕು.

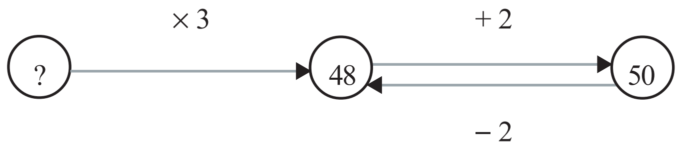
ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದ ಮೊತ್ತ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 2ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ಕಳೆದುದು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ? ಸಂಖ್ಯೆ ಪುನಃ ಲಭಿಸಲು 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಇದರಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿಯೂ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಕ್ಕಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲೂ ಬೇಕು.

ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ 'ಲೀಲಾವತಿ' ಎಂಬ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯಾ ರೀತಿಯೆಂದು ಅವರು ಕರೆಯುವ ಈ ವಿಧಾನವು ಹೇಳಿರುವುದು ಹೀಗೆ.

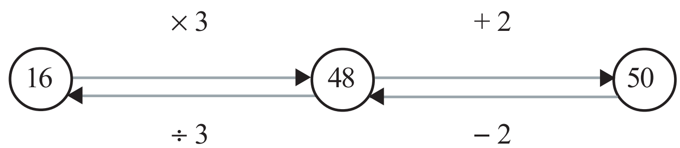
ಉತ್ತರ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಕಾರ ಮಾಡಬೇಕು. ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ವರ್ಗ ಮಾಡಬೇಕು. ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು. ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು.

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 2 ಸೇರಿಸಿದಾಗ 50 ಲಭಿಸಿರುವುದು ಅಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಅದರ ಮೊದಲು $50 - 2 = 48$ ಆಗಿರುವುದು.



ಇನ್ನು 48 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಲುಪುವುದು ಹೇಗೆ?

3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 48 ಆಯಿತು. ಆಗ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು $48 \div 3 = 16$.

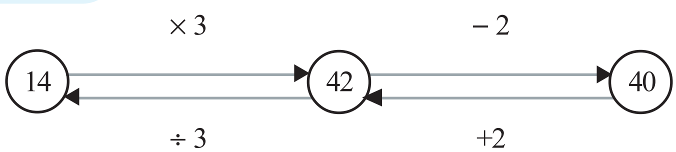


ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ 2 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ 40 ಆಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 2ನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆ $40 + 2 = 42$;

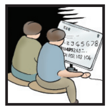
ಇದು 3ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸಿರುವುದು. ಆಗ ಅದರ ಮೊದಲು $42 \div 3 = 14$. ಅಂದರೆ ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 14.



ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡಿರಿ :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 30 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅದರ $\frac{5}{4}$ ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ ಲಭಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯ $\frac{4}{5}$ ಮಡಿಯು 30 ಆಗಿದೆ.



ಆಗ, ಸಂಖ್ಯೆ 30 ರ $\frac{4}{5}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $30 \times \frac{4}{5} = 24$

(1) ಅನಿತಳು ಮತ್ತು ಸಹಪಾಠಿಗಳು ಸೇರಿ ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದರು. ಐದು ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಖರೀದಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯಿಂದ 3 ರೂಪಾಯಿ ಕಡಿಮೆಗೆ ಲಭಿಸಿತು. ಅವರಿಗೆ 32 ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚು ಆಯಿತು. ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಖರೀದಿಸಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಕೊಡಬೇಕಾಗಿ ಬರುತ್ತಿತ್ತು.

(2) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 25 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ 5 ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಭುಜಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಮೂರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 101.

ii) ಮೂರು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 101.

iii) ಎರಡು ಮಡಿಯಿಂದ ಮೂರು ಕಳೆದಾಗ 101.

iv) ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ ಎರಡು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ 101.

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅದರ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 111 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(5) ಹಳೆಯ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ : ಹಕ್ಕಿಗಳ ಗುಂಪಿನೊಂದಿಗೆ ಮಗುವು ಕೇಳಿತು. “ನೀವೆಷ್ಟು ಮಂದಿ?” ಒಂದು ಹಕ್ಕಿ ಹೇಳಿತು :

“ನಾವು, ನಮ್ಮಷ್ಟು,
ನಮ್ಮ ಅರ್ಧ,
ಅದರ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು
ಒಂದು ಸೇರಿದಾಗ ನೂರು ಆಗುವುದು” ಹಾಗಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಕ್ಕಿಗಳು ಇದ್ದವು?

ಹಕ್ಕಿಗಳ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಕೊನೆಗೆ ಹೇಳುವ ಮೊತ್ತ 100ರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು?

ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತ

ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ. ಮೂರು ಸಾವಿರದ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿಯೇ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನವರು ಹಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂರಕ್ಷಿಸಿರುವರು. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪಪೈರಸ್ ಎಂಬ ಹೆಸರಿರುವ ಗಿಡದ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಓಲೆಗರಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವುದು ಇಂತಹ ಅನೇಕ ದಾಖಲೆಗಳನ್ನು ಪುರಾವಸ್ತು ಸಂಶೋಧಕರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ. ಅಂತಹ ದಾಖಲೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಪಪೈರಸ್ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಪಪೈರಸಿನಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದು ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ 1650ರಲ್ಲಿ ಬರೆದುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಆರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಇದನ್ನು ಬರೆದವರು ತನ್ನ ಹೆಸರು ಅಹಮ್ಮೋಸ್ ಎಂದೂ ಇನ್ನೂರು ವರ್ಷಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹಳೆಯದಾದ ದಾಖಲೆಯಿಂದ ತರ್ಜುಮೆಗೊಳಿಸಿರುವುದು ಎಂದೂ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಬ್ರಿಟಿಷ್ ವಸ್ತುಸಂಗ್ರಹಾಲಯದಲ್ಲಿ ಜೋಪಾನವಾಗಿರಿಸಿರುವ ಈ ದಾಖಲೆಯೇ ಅಹಮ್ಮೋಸ್ ಪಪೈರಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. (ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿದಿರುವುದ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡರ್ ರಿಂಡ್ ಎಂಬ ಸಂಶೋಧಕನಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ರಿಂಡ್ ಪಪೈರಸ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು.)

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಆಕೃತಿಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿ

ಈಗ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಸ್ವಭಾವಗಳೇನು? ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರವು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿದಾಗ ಆರಂಭಿಸಿರುವುದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಕಂಡುಹಿಡಿದದ್ದು ಹೇಗೆ? ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸಿದ ಹಂತವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ರಷೀದನು 4 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿ, 10 ರೂಪಾಯಿಯ ಕೊತ್ತಂಬರಿ ಸೊಪ್ಪು, ಕರಿಬೇವಿನ ಸೊಪ್ಪು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಖರಿದಿಸಿದಾಗ 130 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ 1 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಇದನ್ನು ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 10ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 130 ಲಭಿಸಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ 10ನ್ನು ಮೊದಲು ಕಳೆಯ ಬೇಕು; ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸಿದ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಅನಂತರ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$(130 - 10) \div 4 = 120 \div 4 = 30$

ಹೀಗೆ ಒಂದು 1 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಬೆಂಡೆಕಾಯಿಯ ಬೆಲೆ 30 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂತು.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

10 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಉದ್ದವೂ ಅಗಲವೂ ಎಷ್ಟಾಗಬೇಕು?

ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳೋಣ. ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂದಾದರೆ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚನ್ನು ತಮ್ಮೊಳಗೆ ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂದಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಸಮಸ್ಯೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 1 ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ 10. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಕೊನೆಗೆ ಮಾಡಿದ ಇಮ್ಮಡಿಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ 1 ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವು 5. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಹಳೆಯ ರೀತಿ

ಅಹಮ್ಮೋಸ್ ಪೈಪರಿಸ್‌ನ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಇದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದು ಸೇರಿದರೆ 15 ಆಗುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇದರ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿ ಇದಾಗಿದೆ.

4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 5 ಸಿಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಸಿಗಬೇಕಾದ ಉತ್ತರ 15 . ಅದು 5 ರ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದ ನಾಲ್ಕರ ಮೂರು ಮಡಿ ಅಂದರೆ 12 ಆಗಿರುವುದು ಉತ್ತರ. ಈ ತಾರ್ಕಿಕ ಚಿಂತನೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು ಯಾಕಾಗಿ? ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದರ ಮೊತ್ತವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೆ? (**ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ.)

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡೆವು.

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x + (x + 1) = 2x + 1$.

ಈಗ ಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು: ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು

$2x + 1 = 5$ ಆದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 1 ಸೇರಿಸಿದಾಗ 5 ಸಿಗುವುದು: ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ವಿಲೋಮಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ.

$$(5 - 1) \div 2 = 2$$

ಆಗ ಆಯತದ ಅಗಲ 2 ಮೀಟರ್, ಉದ್ದ 3 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿಯೇ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡುವುದು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಸುಲಭ. ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಗೂ ಮೇಜಿಗೂ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 4500 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಮೇಜಿಗೆ ಕುರ್ಚಿಗಿಂತ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಕವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಇಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಅಧಿಕವಾದುದರಿಂದ ಅದರ ಬೆಲೆ $x + 1000$ ರೂಪಾಯಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪ ಹೇಗಿರುವುದು?

$x + (x + 1000) = 4500$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟು?

ಇದರಲ್ಲಿ $x + (x + 1000)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು?

$$x + (x + 1000) = 2x + 1000$$

ಆಗ ಲೆಕ್ಕ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು :

$2x + 1000 = 4500$ ಆದರೆ, x ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಕೂಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಲಭಿಸುವುದು. ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು.

x, a ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

$(x + a) - a = x$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$x + a = b$ ಆದರೆ $x = b - a$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದ್ದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವುದು.

$x - a = b$ ಆದರೆ $x = b + a$

ಎಂಬುದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಲಭಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಕಳೆದದ್ದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 2 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 1000ವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 4500 ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇದು ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವಲ್ಲವೇ? ಬದಲಾದುದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರ.

ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೋ?

ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ $4500 - 1000 = 3500$ ಎಂದು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವುದು.

$$2x = 4500 - 1000 = 3500$$

ಆಗ ಸಂಖ್ಯೆ $3500 \div 2 = 1750$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

$$x = 3500 \div 2 = 1750$$

ಇನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ 1750 ರೂಪಾಯಿ, ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆ 2750 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ನೂರು ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಚಿಲ್ಲರೆ ಮಾಡಿದಾಗ 20 ರೂಪಾಯಿಯ ಮತ್ತು ಹತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯ ನೋಟುಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದವು. ಒಟ್ಟು 7 ನೋಟುಗಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು?

ಇಪ್ಪತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಆಗ ಹತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $7 - x$.

ಇಪ್ಪತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯ x ನೋಟುಗಳು ಅಂದರೆ $20x$ ರೂಪಾಯಿ.

ಹತ್ತು ರೂಪಾಯಿಯ $7 - x$ ನೋಟುಗಳು ಅಂದರೆ $10 \times (7 - x)$ ರೂಪಾಯಿ

ಇದು ನೂರು ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಹೇಳಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $20x + 10 \times (7 - x) = 100$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಇದರಲ್ಲಿ $20x + 10\ (7 - x)$ ನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವ :

$$20x + 10\ (7 - x) = 20x + 70 - 10x = 10x + 70$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$10x + 70 = 100$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಗುಣಾಕಾರವೂ ಭಾಗಕಾರವೂ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಗುಣಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಇದರಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು ಭಾಗಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ

$ax = b\ (a \neq 0)$ ಆದರೆ $x = \frac{b}{a}$

$\frac{x}{a} = b$ ಆದರೆ $x = ab$

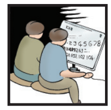
ಎಂದಲ್ಲವೆ ಬರೆಯುವುದು. ಇದು ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದಲೂ ಭಾಗಲಬ್ಧದಿಂದಲೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪುನ: ಪಡೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ 10 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 70ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 100 ಸಿಕ್ಕಿತು ಎಂದಲ್ಲವೇ ಇದರ ಅರ್ಥ. ಹಾಗಾದರೆ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು 100ರಿಂದ 70ನ್ನು ಕಳೆದು 10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$$x = (100 - 70) \div 10 = 30 \div 10 = 3$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಉತ್ತರವು 20 ರೂಪಾಯಿಯ 3 ನೋಟುಗಳು, 10 ರೂಪಾಯಿಯ 4 ನೋಟುಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಅಲ್‌ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ



(1) 80 ಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತ ಒಂದು ಮೀಟರು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳ ಅಳತೆಯೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕಿಂತ 50^0 ಅಧಿಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಬೇಕು?

(3) ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಿಂತ 4ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚು. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಿಂತ 2 ಕಡಿಮೆ. ಒಬ್ಬನು 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು, 2 ಪೆನ್ನುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ಸಿಲ್‌ಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದನು. ಒಟ್ಟು 74 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) i) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 36 ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

ii) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 36 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

iii) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 36 ಆದೀತೇ? ಕಾರಣವೇನು?

iv) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 33 ಆಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

v) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಮೂರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 33 ಆಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(5) i) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 80 ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

ಹೆಸರು ಬಂದ ದಾರಿ

ಅರಬ್ ಕೃತಿಗಳ ಪರಿಭಾಷೆಯ ಆಟಗಳ ಮೂಲಕ ನವೋತ್ಥಾನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಯುರೋಪಿನಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರಚಾರ ಮಾಡಿರುವುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನವಾದವು ಮಹಮ್ಮದ್ ಅಲ್‌ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನ ಕೃತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಕ್ರಿ.ಪೂ. 8ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಲ್‌ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದನು. ತಿಳಿಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ವಸ್ತು ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಬರುವ ಅರಬ್ ಪದವನ್ನು ಅವನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2ನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ 5 ಲಭಿಸಿತು ಎಂಬುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು 5ನ್ನು ಮತ್ತು 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದಲ್ಲವೆ ನಾವು ಮಾಡುವುದು. ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅಲ್‌ಜಬರ್ ಎಂಬ ಅರಬ್ ಪದದಿಂದ ಅಲ್ ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಸೂಚಿಸುವುದು. "ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸುವುದು" ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ "ಪೂರ್ವಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಾಗಿಸುವುದು" ಎಂಬುದು ಈ ಪದದ ಅರ್ಥ. ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ algebra ಎಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿರುವುದು ಈ ಅರಬ್ ಪದದಿಂದಾಗಿದೆ.

ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾದ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ (ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) algorithm ಎಂಬ ಹೆಸರಿದೆ. ಅಲ್‌ಖ್ವಾರಿಷ್ಮಿ ಎಂಬ ಪದದಿಂದಾಗಿದೆ ಈ ಪದ ಉಂಟಾಗಿರುವುದು.

ii) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನಲ್ಲಿ 9 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 90 ಲಭಿಸುವುದಾದರೆ, ಕೂಡಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

ವಿಭಿನ್ನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 10ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇಲ್ಲಿ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ? ಆದರೆ, ಈ ರೀತಿ ಚಿಂತಿಸಬಹುದು. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯನ್ನು 5 ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿಸಲು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿನ **ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದು, ಕೂಡಿಸಿರುವುದು 10 ಎಂದಾಗಿದೆ; ಆಗ, ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯು 10 ಆದುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5 ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ?

ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$$3x + 10 = 5x$$

$3x$ ನ್ನು $5x$ ಮಾಡಲು ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು $2x$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $3x + 2x = 5x$.

ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಪ್ರಕಾರ $3x$ ನ್ನು $5x$ ಮಾಡಲು ಕೂಡಿಸಿದುದು 10 ಆಗಿದೆ. ಆಗ $2x = 10$; ಅಂದರೆ $x = 5$.

ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದರೆ :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 13 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 36ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ 31 ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 13 ಮಡಿಯನ್ನು 31 ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿಸಲು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು?

$31 - 13 = 18$ ಮಡಿ, ಅಲ್ಲವೇ?

ಕೂಡಿಸಿದುದು 36 ಎಂದು ಹೇಳಿರುವುದು. ಆಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ 18 ಮಡಿ 36. ಸಂಖ್ಯೆ 2.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ? ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನೂ ಅದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಿದ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

ಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳು

$2x + 3 = 3x + 2$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 3ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೂ 3 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 2ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೂ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು (equations) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

$$13x + 36 = 31x$$
$$31x - 13x = 18x$$
$$18x = 36$$
$$x = 2$$

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 12ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದು, ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$3x + 12 = 5x + 2$$

$3x$ ನೊಂದಿಗೆ $2x$ ಕೂಡಿಸಿದರೆ $5x$ ಆಗುವುದು.

$5x + 2$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, ಇನ್ನೂ 2 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ,

$$3x + (2x + 2) = 5x + 2$$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 12. ಆಗ,

$$2x + 2 = 12$$

ಇನ್ನು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ:

$$x = (12 - 2) \div 2 = 5$$

ಒಂಬತ್ತರ ಆಟ

9ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 29 ಆದರೆ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ $2 + 9 = 11$.

ಗುಣಲಬ್ಧ $2 \times 9 = 18$.

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ $18 + 11 = 29$.

9 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಸಂಖ್ಯೆ $10x + 9$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ.

9 ಅಲ್ಲದ ಇತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಸವಿಶೇಷತೆಯಿದೆಯೇ?

$10x + y = x + y + xy$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ y ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಇತರ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ :

ಅಪ್ಪುವಿನ ತಾಯಿಯ ಪ್ರಾಯವು ಅಪ್ಪುವಿನ ಪ್ರಾಯದ ಒಂಬತ್ತು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂಬತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇದು ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಇವರ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯ ಎಷ್ಟು?

ಅಪ್ಪುವಿನ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ತಾಯಿಯ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯ $9x$.

9 ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ?

ಅಪ್ಪುವಿನ ಪ್ರಾಯ $x + 9$

ತಾಯಿಯ ಪ್ರಾಯ $9x + 9$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಇದು ಅಪ್ಪುವಿನ ಪ್ರಾಯದ 3 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $3\,(x + 9) = 3x + 27$

ಇನ್ನು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ.

$$3x + 27 = 9x + 9$$

$3x$ ನ್ನು $9x + 9$ ಮಾಡಲು ಯಾವುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಬೇಕು?

$$(9x + 9) - 3x = 6x + 9$$

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ

$$(9x + 9) - 3x = 6x + 9$$

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವುದು 27.

ಆಗ,

$$6x + 9 = 27$$

ಇದರಿಂದ $6x = 27 - 9 = 18$ ಎಂದೂ $x = 18 \div 6 = 3$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ?
ಅಂದರೆ ಅಪ್ಪುವಿನ ಪ್ರಾಯ 3, ತಾಯಿಯ ಪ್ರಾಯ $3 \times 9 = 27$.

(1) ವಿಜ್ಞಾನಮೇಳದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 10 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆಯೂ ವಯಸ್ಕರಿಗೆ 25 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆಯೂ ಟಿಕೇಟಿನ ದರವಿದೆ. 50 ಜನರಿಗೆ ಟಿಕೇಟುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ 740 ರೂಪಾಯಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಇವರಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳೆಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. 8 ಹುಡುಗರು ಗೈರುಹಾಜರಾದ ಒಂದು ದಿನ ಆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು? ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು?

(3) ಅಜಯನು ವಿಜಯನಿಗಿಂತ 10 ವರ್ಷ ಹಿರಿಯವ. ಮುಂದಿನ ವರ್ಷ ಅಜಯನ ಪ್ರಾಯ ವಿಜಯನ ಪ್ರಾಯಕ್ಕಿಂತ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇವರಿಬ್ಬರ ಪ್ರಾಯವೆಷ್ಟು?

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಐದು ಮಡಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(5) ಒಂದು ಸಹಕಾರಿ ಸಂಘದಲ್ಲಿ ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. 29 ಸ್ತ್ರೀಯರೂ 16 ಪುರುಷರೂ ಈ ಸಂಘಕ್ಕೆ ಸೇರಿದರೆ, ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸ್ತ್ರೀಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಯಿತು. ಸಂಘದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಎಷ್ಟು ಸ್ತ್ರೀಯರು ಇದ್ದರು?

ಜಾಣ್ಮೆಲೆಕ್ಕ

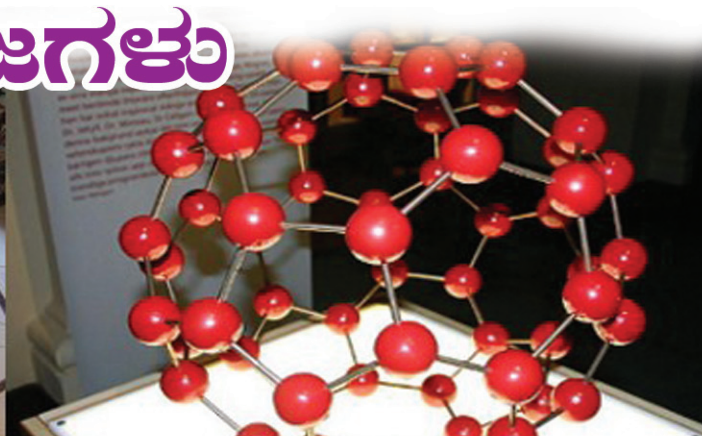
ಒಂದು ಕೆರೆಯಲ್ಲಿ ಅರಳಿದ ತಾವರೆಗಳಿವೆ. ಹಾರಿಬಂದ ದುಂಬಿಗಳು ತಾವರೆಯ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತುಕೊಂಡವು. ಒಂದೊಂದು ತಾವರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ದುಂಬಿಯಂತೆ ಕುಳಿತುಕೊಂಡಗ ಒಂದು ದುಂಬಿ ಬಾಕಿಯಾಯಿತು. ಒಂದು ತಾವರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡೆರಡು ದುಂಬಿಗಳಂತೆ ಕುಳಿತುಕೊಂಡಾಗ ಒಂದು ತಾವರೆ ಬಾಕಿಯಾಯಿತು. ತಾವರೆಗಳೆಷ್ಟು? ದುಂಬಿಗಳೆಷ್ಟು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.	ಟೀಚರರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಸರಳವಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಲೋಮಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಪರಿಹರಿಸುವುದು.			
• ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ ಮೂಲಕ ನೇರವಾಗಿ ಬಗೆಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬೀಜ ಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು.			

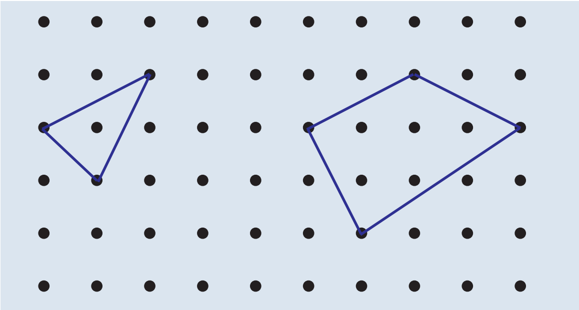
3

ಬಹುಭುಜಗಳು



ಆಕೃತಿಗಳು

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

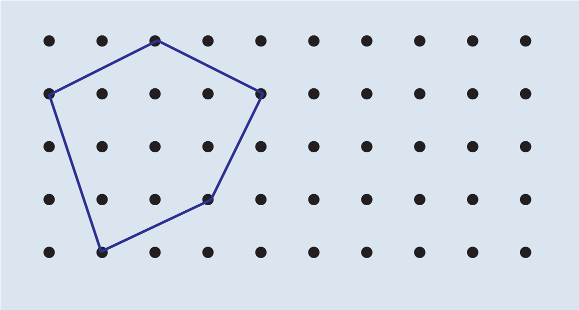


ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳು.

ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನ.

ಚತುರ್ಭುಜವೊ?

ಇನ್ನು ಐದು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಎಷ್ಟು ಶಿರಗಳು? ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳು?

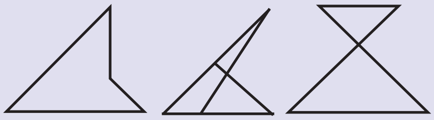
ಆರು ಮೂಲೆಗಳಿರುವ ರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳು?

ಐದು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಐದು ಮೂಲೆಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪಂಚಭುಜ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಆರು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಆರು ಮೂಲೆಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಯು ಷಡ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. (ಐದನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ ಬಹುಭುಜಗಳು ಎಂಬ ಭಾಗ) ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಥವಾ ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಭುಜಗಳಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಹೆಸರಾಗಿದೆ ಬಹುಭುಜ (polygon).

ವಿಚಿತ್ರ ಬಹುಭುಜಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

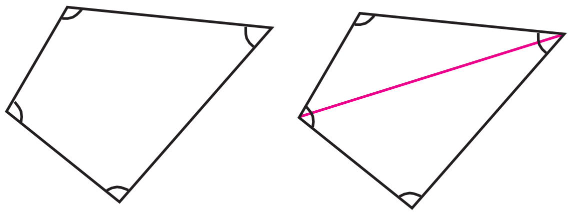


ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನೂ ಬಹುಭುಜಗಳಾಗಿ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಶಿರಗಳು ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಸರಿದಿರುವುದೋ, ಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಹುಭುಜಗಳ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ ನಾವು ಹೇಳುವ ಹಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳು ಇವುಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿವೆಲ್ಲವೇ.

ಎಲ್ಲಾ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇದರಂತೆ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ? ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ.



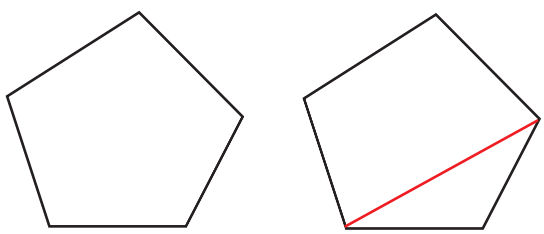
ಚತುರ್ಭುಜವು ಈಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾದುವು. ಎರಡು ಶಿರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕರ್ಣವು ಎರಡು ಭಾಗಮಾಡುವುದು. ಒಂದು ಭಾಗವು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಾದರೆ ಮರುಭಾಗವು ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವುದು. ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳಾದುವು. ಆದುದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

ಅದೇರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಪಂಚಭುಜವಾದರೋ?

ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಲಭಿಸುವುದು.

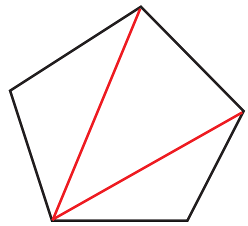


ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಚತುರ್ಭುಜದ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

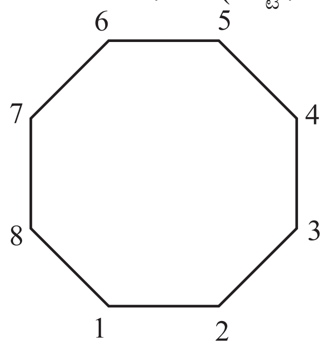
ಅಂದರೆ,

$$360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$$

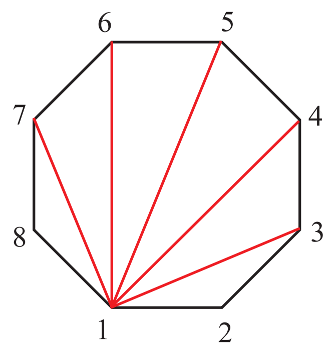
ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಪಂಚಭುಜವನ್ನು ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.



ಎಂಟು ಭುಜವಿರುವ ಬಹುಭುಜ (ಅಷ್ಟಭುಜ) ಆದರೋ?



ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು? 1 ನೇ ಶಿರವನ್ನು 3, 4, 5, 6, 7 ಎಂಬೀ ಐದು ಶಿರಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.



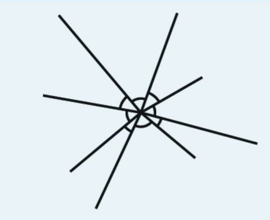
ಐದು ಗೆರೆಗಳು, ಆರು ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $6 \times 180^\circ = 1080^\circ$

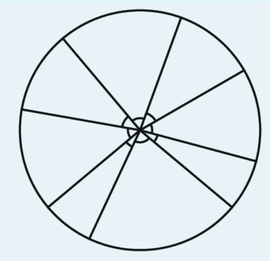
12 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವಾದರೋ?ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ ಆಲೋಚಿಸುವ, ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿದರೆ,

ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿಯೇ ಹಲವು ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವಂತಹ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಅಥವಾ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಈ ಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುವು. ಆಗ ಡಿಗ್ರಿ ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ತಿಳಿದ ವಿಷಯವನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆ.

ಅದರ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಶಿರಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ 9 ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸೋಣ. 9 ಗೆರೆಗಳು 10 ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $10 \times 180^{\circ} = 1800^{\circ}$

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು. n ಶಿರಗಳು ಇರುವ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ, ಉಳಿದವುಗಳು $n-1$ ಶಿರಗಳಾಗಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಒಟ್ಟು $(n-1)-2=n-3$ ಗೆರೆಗಳು ಲಭಿಸುವುದು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವಾಗಲೂ ಹೊಸ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಭುಜವೂ, ಕೊನೆಯ ಗೆರೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿಯುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವೂ ಲಭಿಸುವುದು.

ಒಟ್ಟು $(n-3)+1=n-2$ ತ್ರಿಕೋನಗಳು, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-2) \times 180^{\circ}$

n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n-2) \times 180^{\circ}$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ

ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 2700° ಆಗಬಹುದೇ?

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180°ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆಗ 2700 ಎಂಬುವುದು 180ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ 2700ನ್ನು 180 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$$2700 \div 180 = 15$$

ಅಂದರೆ, $2700 = 180 \times 15$

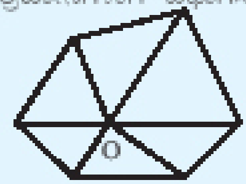
ನಮ್ಮ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ $15+2=17$ ಭುಜವಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 2700° ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

(1) 52 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?

(2) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 8100° ಆಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿವೆ?

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಭಜನೆ

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಒಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಶಿರಗಳಿಗೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು.



n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ, n ತ್ರಿಕೋನಗಳೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ ಇವುಗಳ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $= n \times 180^{\circ}$.

ಈ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ O ಶಿರದಲ್ಲಿನ ಕೋನವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಆಗಿದೆ. O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೇ, ಆದುದರಿಂದ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$(n \times 180^{\circ}) - (2 \times 180^{\circ}) = (n-2) \times 180^{\circ}$$

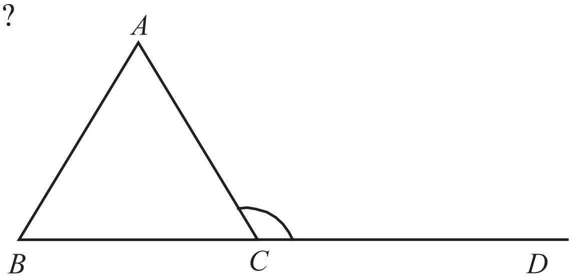
(3) ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $1600°$ ಆಗುವುದೇ? $900°$ ಆಗಬಹುದೇ?

(4) 20 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(5) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $1980°$ ಆಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಹೆಚ್ಚಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಾದರೇ?

ಹೊರಕೋನಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವು ಲಭಿಸಿತಲ್ಲವೇ?



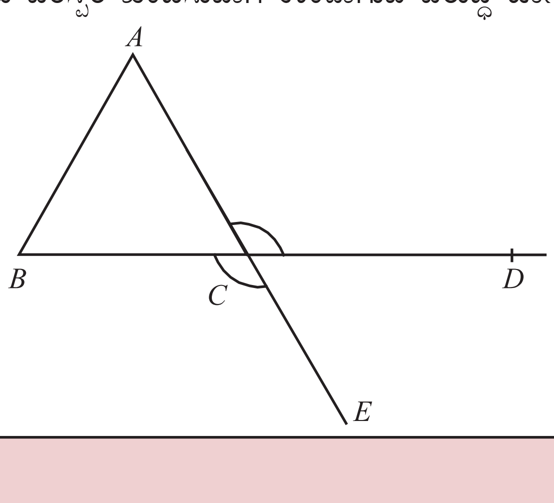
ಈ ಕೋನವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಹೊರಕೋನವಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯಕೋನವಾಗಿದೆ (external angle) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

C ಎಂಬ ಶಿರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನವಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು C ಯ ಒಳಕೋನ ಅಥವಾ ಆಂತರಿಕ ಕೋನ (interior angle) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

$\angle ACD$ ಎಂಬ ಹೊರಕೋನ ಮತ್ತು $\angle ACB$ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಇವು ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಜೋಡಿಗಳಾದುದರಿಂದ $\angle ACD = 180° - \angle ACB$.

ಇನ್ನು AC ಎಂಬ ಭುಜವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ C ಯಲ್ಲಿಯೇ ಇನ್ನೊಂದು ಹೊರಕೋನ $\angle BCE$ ಲಭಿಸುವುದು.

ಈ ಎರಡು ಹೊರಕೋನಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? ಈ ಕೋನಗಳು AE ಮತ್ತು BD ಯು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳಾಗಿದೆ.



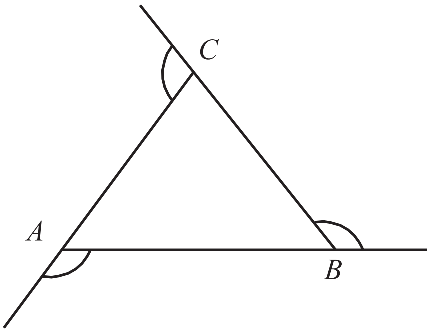
ಆದುದರಿಂದ $\angle ACD = \angle BCE$.

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಹೊರಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

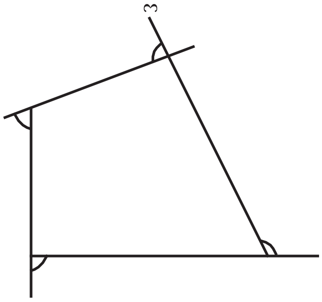
ಆಗ ಒಂದು ಶಿರದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಕುರಿತು ಮಾತ್ರ ಹೇಳುವಾಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೆಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

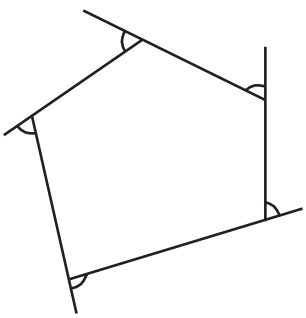
ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಶಿರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

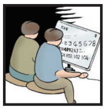
ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮತ್ತು ಪಂಚಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಲೂ ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿಯೂ ಒಳಕೋನ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನಗಳು ರೇಖೀಯ ಜೋಡಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



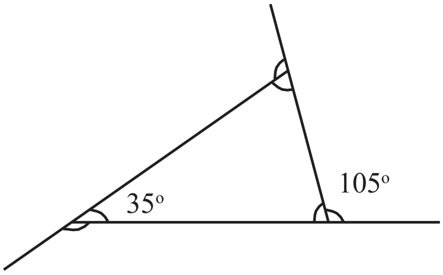




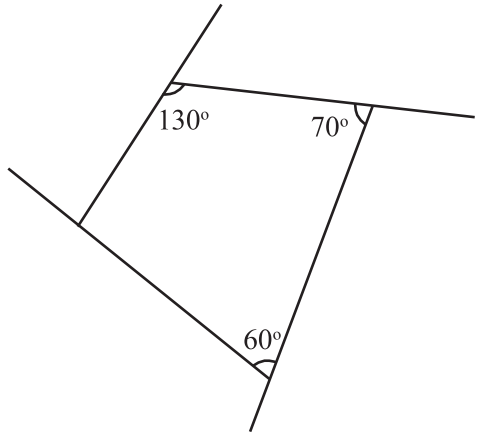
(1) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡುಕೋನಗಳು $40^\circ, 60^\circ$ ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಹೊರಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

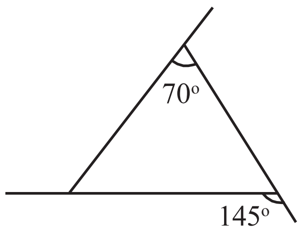
(2) ಚಿತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

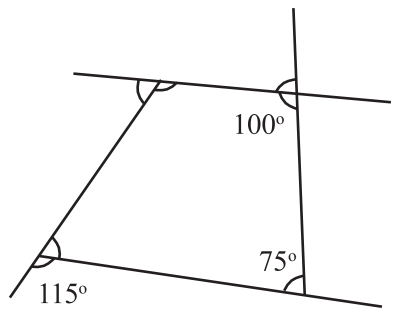
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

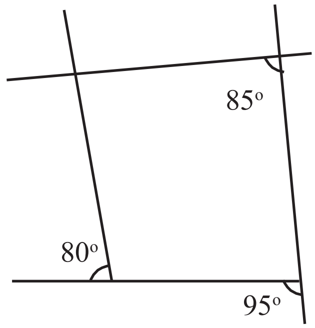


(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.









(5) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶಿರದ ಹೊರಕೋನವು ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

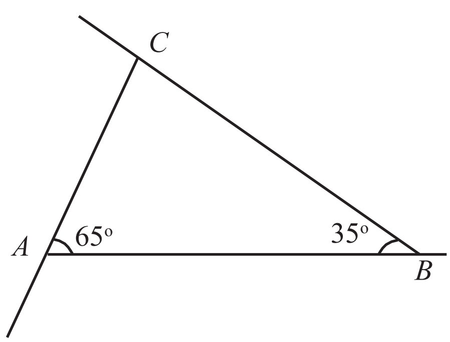
ಬದಲಾಗದ ಮೊತ್ತ

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೋ?

ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸೋಣ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿನ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?



A ಯ ಹೊರಕೋನವು $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

B ಯ ಹೊರಕೋನವು $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

C ಯ ಒಳಕೋನವು $180^\circ - (65^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 100^\circ$

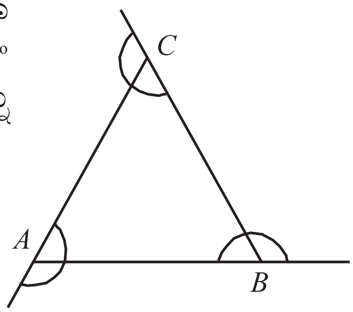
$= 80^\circ$

C ಯ ಹೊರಕೋನವು $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ

$115^\circ + 145^\circ + 100^\circ = 360^\circ$

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಯೇ ಆಗಿದೆಯೇ? ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನದ A ಎಂಬ ಶಿರದ ಒಳಕೋನ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 180° ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅದೇ ರೀತಿ B ಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿಯೂ 180° ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಒಳಕೋನ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180°.

ಆಗ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ
$540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360°.

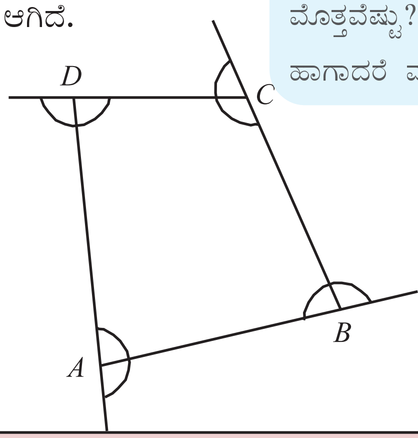
ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೋ? ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿಯೂ ಒಳಕೋನ ಮತ್ತು ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದೆ.
ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳಿಂದ

$$4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

ಇದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು

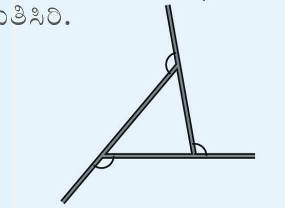
360°ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.



ಮಡಲಕಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕ

ಮಡಲಕಡ್ಡಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

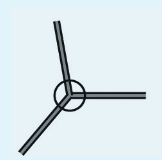


ಇದರ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೂ ಮೂರು ಮಡಲಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ಇಟ್ಟಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇಟ್ಟು ಸ್ವಲ್ಪ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತಯಾರಿಸಿಬೇಕು.

ಈಗಲೂ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಣ್ಣದಾಗಿಸಿದರೋ?

ಕೊನೆಗೆ ತ್ರಿಕೋನವೇ ಇಲ್ಲವಾದರೆ?



ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೋ?

ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿರುವುದು. ಪಂಚಭುಜದಲ್ಲೂ ಷಡ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ಈ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ n ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯೋಣ. ಒಟ್ಟು n ಶಿರಗಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಹೊರಕೋನ ಮತ್ತು ಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವೂ ಸೇರಿ ಒಂದು ರೇಖೀಯ ಜೋಡಿಯಾಯಿತು. ಒಟ್ಟು n ರೇಖೀಯ ಜೋಡಿಗಳು. ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $n \times 180^\circ$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $(n - 2) \times 180^\circ$ ಆಗಿರುವುದು. ಆಗ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$= n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ$$

$$= 2 \times 180^\circ$$

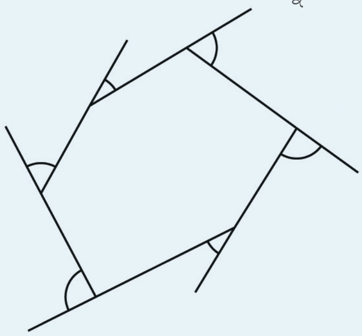
$$= 360^\circ$$

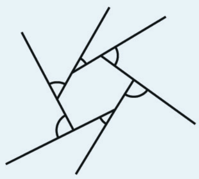
ಅಂದರೆ,

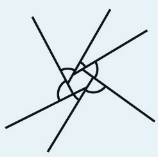
ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360° ಆಗಿದೆ.

ಸಂಕುಚಿತಗೊಳ್ಳುತ್ತಾ...

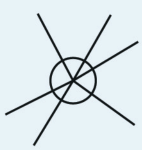
ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣದಾಗಿಸಿದಂತೆ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಸಣ್ಣದಾಗಿಸಬಹುದು. ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.







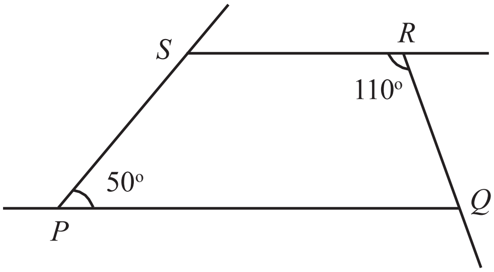
ಕೊನೆಗೆ ಬಹುಭುಜವೇ ಇಲ್ಲವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮಾತ್ರ ಇರುವುದಾದರೋ?



ಬಹುಭುಜದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೋ?

(1) 18 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(2) $PQRS$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ PQ, RS ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲ ಕೋನಗಳನ್ನೂ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(3) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಇತರ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

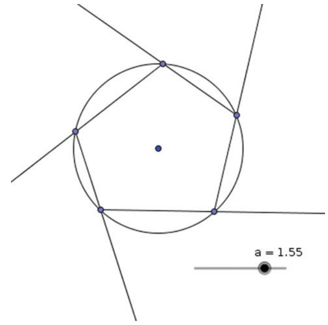
(4) ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದ ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನವು ಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಒಳಕೋನದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ,

   i) ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆಯೆಷ್ಟು?

   ii) ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿವೆ?

(5) ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಬಾಹ್ಯಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಆ ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿವೆ? ಬಾಹ್ಯ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವಾದರೋ? ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾದರೋ?

min = 0.01, max = 2, increment = 0.01 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಲೈಡರ್ a ಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ. a ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಐದೋ ಆರೋ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ. (ray tool ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು)



ಇನ್ನು ವೃತ್ತವನ್ನು hide ಮಾಡಿರಿ, Angle ತೆಗೆದು ಹೊರಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಸಮಬಹುಭುಜಗಳು

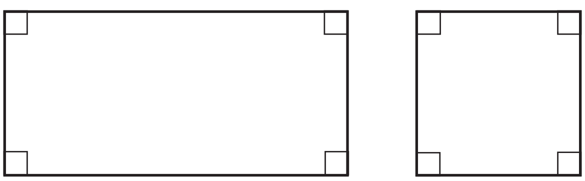
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. (**ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿನ **ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಬದಲಾಗಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೋ? ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು. ಈ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲವೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

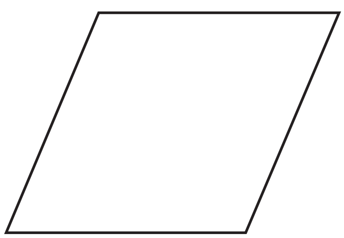
ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದುಂಟೇ?

ಆಯತದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅದು ಚೌಕವಾಗುವುದು.



ಬದಲಾಗಿ, ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆ?

ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ?

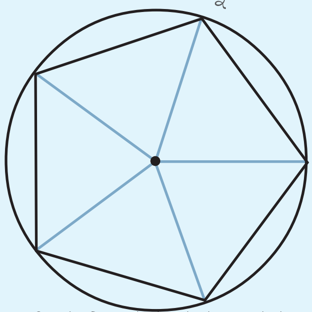


ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಅದು ಚೌಕವೇ ಆಗಿದೆ.

ವೃತ್ತವೂ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳೂ

ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನೂ ಸಮ ಷಡ್ಭುಜವನ್ನೂ ರಚಿಸಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 72° ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಕೋನದ ಅಳತೆಯು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು? ಸಮಅಷ್ಟಭುಜವಾದರೋ?

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಮಟ್ಟವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವ ಯಾವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು?

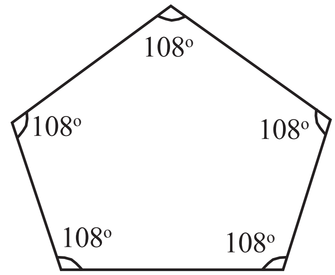
24 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಅಂದರೆ, ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚೌಕವಾಗಿದೆ.

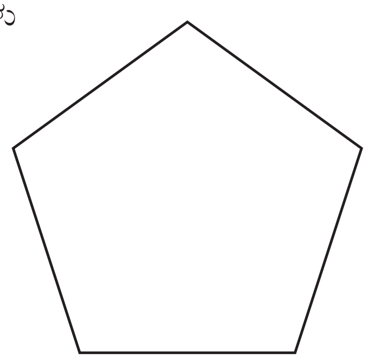
ಒಂದು ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಪಂಚಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆಯು $\frac{540}{5} = 108^\circ$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದ ಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದ ಕೋನವು 108° ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ? ಇದರಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕೆ?



ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದ ಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪಂಚಭುಜವು ಸಮ ಪಂಚಭುಜವಾಗಿದೆ.

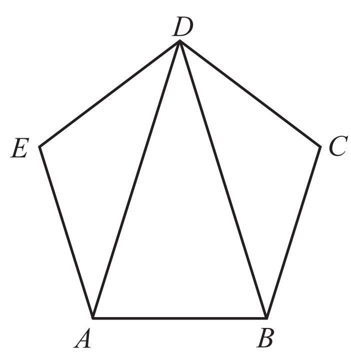


ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದ ಷಡ್ಭುಜ (ಸಮಷಡ್ಭುಜ) ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳು (regular polygons) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

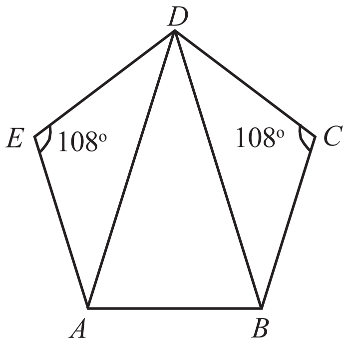
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

Regular Polygon ನ್ನು ತೆಗೆದು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಬೇಕು. ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ)ಯನ್ನು ನೀಡಿ OK ನೀಡಬೇಕು.

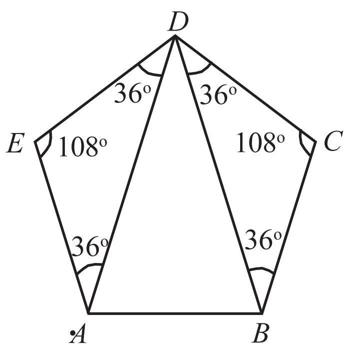


$ABCDE$ ಯು ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜವಾಗಿದೆ. D ಎಂಬ ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡಬಹುದೇ?

ಸಮಪಂಚಭುಜವಾದುದರಿಂದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 108° ಆಗಿದೆ.

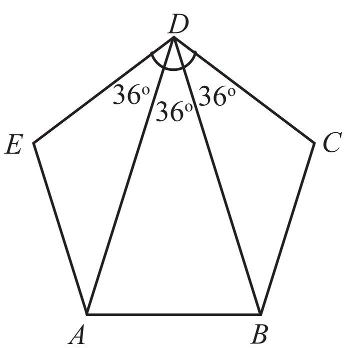


ΔAED ಮತ್ತು ΔBCD ಗಳು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ (ಯಾಕೆ?) ಆಗ ಅದರ ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ? (ಹೇಗೆ?)



D ಎಂಬ ಶಿರದಲ್ಲಿನ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 108°; ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಉಳಿದ ಕೋನವೋ?

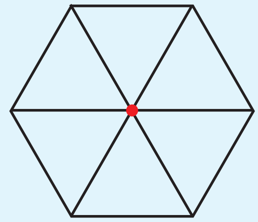
$$\angle ADB = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ.$$



ಹೀಗೆ, AD, BD ಎಂಬ ಗೆರೆಗಳು ಪಂಚಭುಜದ D ಎಂಬ ಶಿರದಲ್ಲಿನ ಕೋನವನ್ನು ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

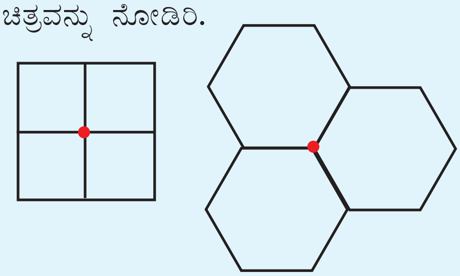
ಹೊಂದಿಸಿಡುವ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ 6 ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಜೋಡಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇದೇರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಯಾವೆಲ್ಲ ಸಮಾನ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿಡಬಹುದು. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಇರುವ ಕೋನವು 360° ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಸಮಾನವಾದ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಸೇರಿಸಿಡಲು ಬಹುಭುಜದ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 360 ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಬೇಕು.

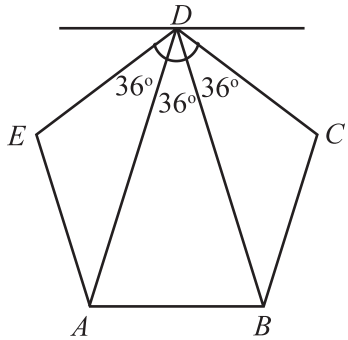
ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಿವೆಯೇ?

ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲದಿದ್ದರೆ?

ಇನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ D ಯ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ D ಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಎರಡು ಹೊಸ ಕೋನಗಳು 36^{o} ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಕಾರಣವೇನು?

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ :

ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು 144^{o} ಆಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿರುವುದು?

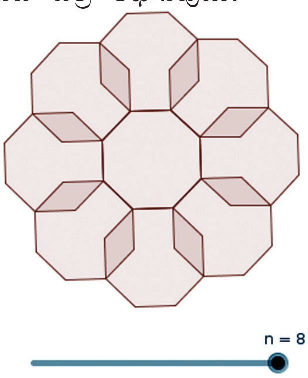
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವು 144^{o}.
ಹಾಗಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊರಕೋನವು 36^{o} ಆಗಿರುವುದು.

ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 360^{o} ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು

$$\frac{360^{o}}{36^{o}} = 10$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಸಮಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ 10 ಭುಜಗಳಿವೆ.

Slider ನ್ನು ತೆಗೆದು ಅದರಲ್ಲಿ Integer ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ n ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. (Integer ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ) min = 3, max = 8 ಎಂದು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಬೇಕು. n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಎಂದು ತೆಗೆದಾಗ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಆಗಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜವು ಲಭಿಸುವುದು. Reflect about Lineನ್ನು ತೆಗೆದು ಬಹುಭುಜದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡಿದರೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರ ಲಭಿಸುವುದು.



n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಯಾವ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯಿರುವುದು? 6 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗಲೋ? 6 ಆದರೋ?

(1) ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವೂ ಕೋನಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವೂ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

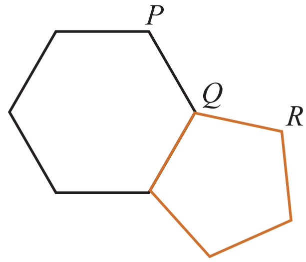
(2) ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೂ, ಭುಜಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವೂ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) 15 ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

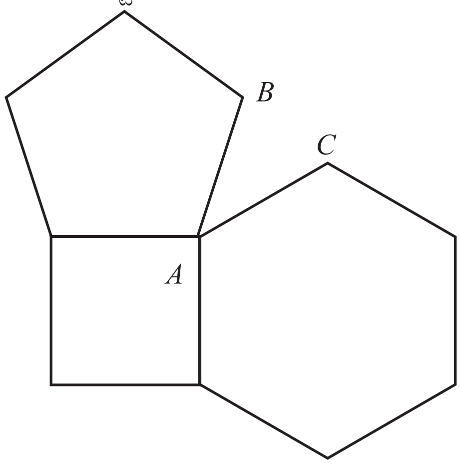
(4) ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನದ ಅಳತೆಯು 168^{o}. ಆದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಭುಜಗಳಿರುವುದು?

(5) ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆಯು 6^{o} ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ? 7^{o} ಆದರೋ?

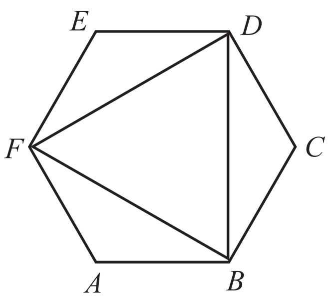
(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. $\angle PQR$ ನ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?



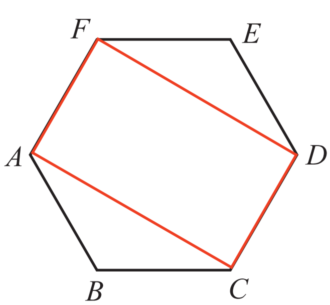
(7) ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ ಮತ್ತು ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. $\angle BAC$ ಯ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?



(8) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCDEF$ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



(9) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCDEF$ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. $ACDF$ ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಕೈವಾರ

ಮಟ್ಟಗಳನ್ನೋ ಕೋನಮಾಪಕಗಳನ್ನೋ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ಕೈವಾರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಸಮ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಸಮ ಭುಜತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ ಮತ್ತು ಸಮಷಡ್ಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಕೆಳಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ?

ಕೈವಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಪಂಚಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಸರಳವಾದ ವಿಧಾನವು www.cut-the-knot.org/pythagoras/PentagonConstruction ಎಂಬ ವೆಬ್ ಪೇಜ್‌ನಲ್ಲಿದೆ. ಕೈವಾರ ಮತ್ತು ರೂಲರ್‌ಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 17 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸ ಬಹುದೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಗೌಸ್ ಎಂಬಾತನು ತನ್ನ 19ನೇ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರುವನು.

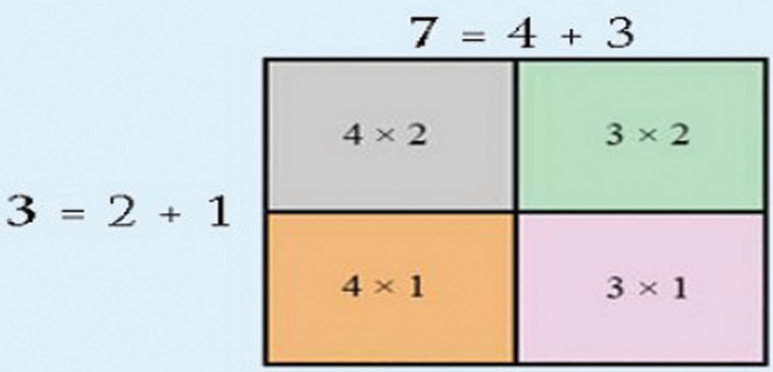
ಇದರ ಕುರಿತಾದ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳು en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon ಎಂಬ ವೆಬ್‌ಪೇಜ್‌ನಲ್ಲಿದೆ.

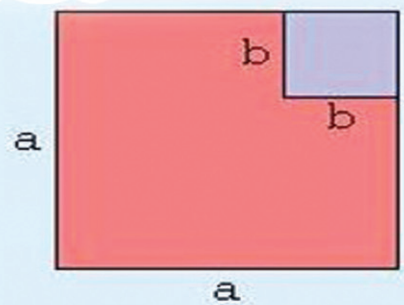
ಪುನರವಲೋಕನ

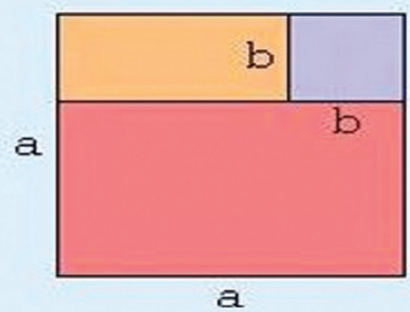
ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸ ಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಬಹುಭುಜದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಬಹುಭುಜದ ಹೊರಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ಒಳಕೋನಗಳ ಒಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಹೊರಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಬಹುಭುಜಗಳಿಂದ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು.			
• ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			

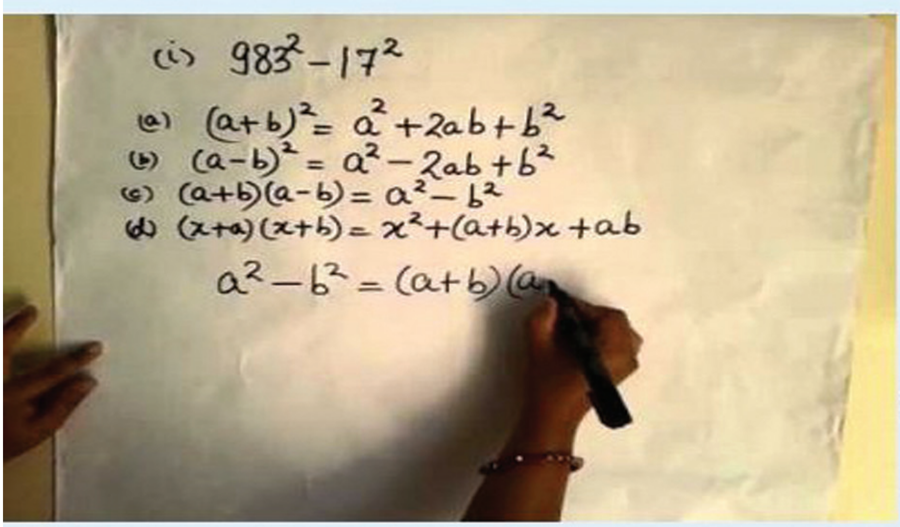
4

ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳು



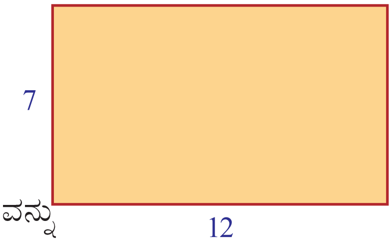






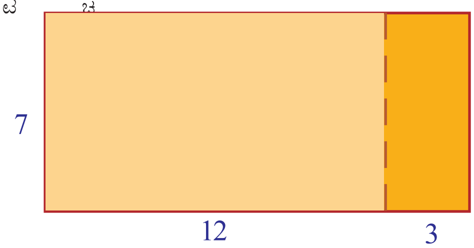
ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಗಲ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?



ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಆಯತವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಲಾಯಿತು.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು?

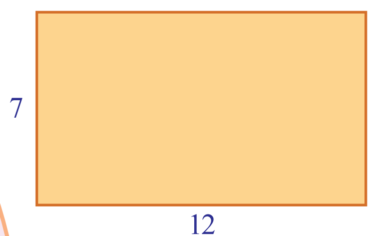


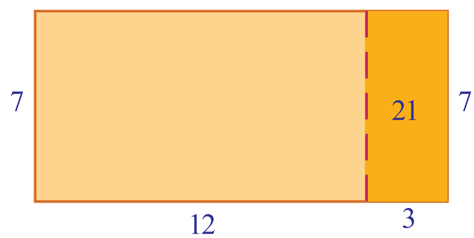
ಮೊದಲ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 84. ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $15 \times 7 = 105$. ಹೆಚ್ಚಾದುದು $105 - 84 = 21$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯದೆಯೂ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

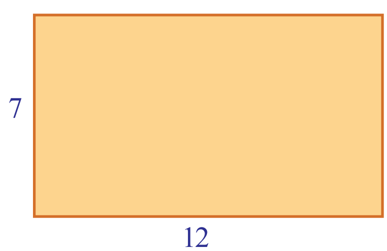
$$(12 + 3) \times 7 = (12 \times 7) + (3 \times 7) = (12 \times 7) + 21$$

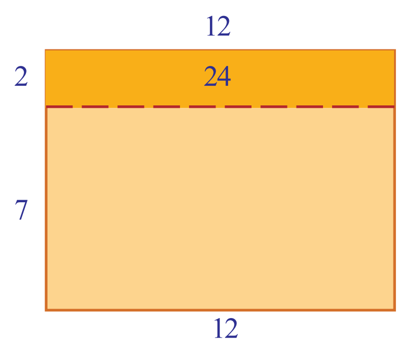
ಹೆಚ್ಚಾದುದು 21 ಎಂದು ಇದರಿಂದ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.





ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಬದಲು ಅಗಲ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾದರೋ?





ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆಯೆಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

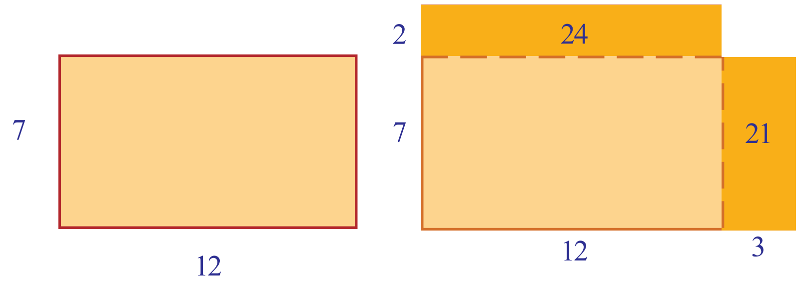
ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯ

$2x + 3 = 3x + 2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು, x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಮಾತ್ರವೇ ಸರಿಯಾಗುವುದು.

$x + (x + 1) = 2x + 1$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವೋ?

x ಗೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿದರೂ ಸರಿಯಾಗುವುದು. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯ (identity) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

$12 \times (7+2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) = (12 \times 7) + 24$

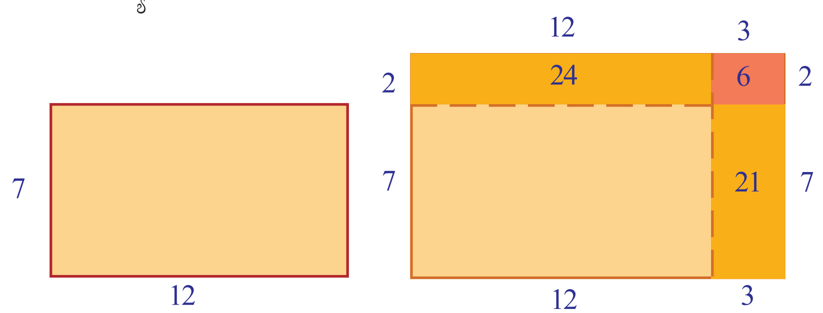


ಅಂದರೆ ಹೆಚ್ಚಾದುದು 24.

ಇನ್ನು ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅಗಲ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೋ?

ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದಂತೆ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಹೆಚ್ಚಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 21; ಅಗಲನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೆಚ್ಚಾದುದು 24; ಹೆಚ್ಚಾದುದು $21 + 24 = 45$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಆದರೆ ಅದು ಆಯತವಾಗಲಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ? ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಆಯತದ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.



ದೊಡ್ಡ ಆಯತವಾಗುವಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೆಚ್ಚಾದುದು $21 + 24 + 6 = 51$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಮೊದಲ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 12×7, ಈಗಿನ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 15×9 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಎರಡನೆ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ಕೂಡಿಸಿದುದು ಯಾವುದನ್ನೆಲ್ಲಾ?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + 24 + 21 + 6$$

ಕೂಡಿಸಿದುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ಬರೆದರೋ?

$$15 \times 9 = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

ಅಂದರೆ

$$(12 + 3) \times (7 + 2) = (12 \times 7) + (12 \times 2) + (3 \times 7) + (3 \times 2)$$

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದುದೇನು?

12×7 ನ್ನು 15×9 ಮಾಡಲು

- 15×9 ನ್ನು $(12 + 3) \times (7 + 2)$ ಎಂದು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದುದು
- 12 ರಿಂದ 7ಕ್ಕೂ, 2ಕ್ಕೂ ಗುಣಿಸಿದುದು;

- 3 ರಿಂದ 7ಕ್ಕೂ, 2ಕ್ಕೂ ಗುಣಿಸಿದುದು
- ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿದುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ 13×15 ನ್ನು 14×16 ಆಗಿ ಮಾಡಲು ಏನನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕೆಂದು ನೋಡೋಣ

$$14 \times 16 = (13+1) \times (15+1)$$
$$= (13 \times 15) + (13 \times 1) + (1 \times 15) + (1 \times 1)$$

ಆದರೆ, ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು $13 + 15 + 1 = 29$.

ಎರಡೂ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ. ಇದಕ್ಕಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನ ಯಾವುದು?

ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಲು ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡನೇ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, 26×74 ನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡುವ

$$26 \times 74 = (20+6) \times (70+4)$$
$$= (20 \times 70) + (20 \times 4) + (6 \times 70) + (6 \times 4)$$
$$= 1400 + 80 + 420 + 24$$
$$= 1924$$

103×205 ಆದರೋ?

$$103 \times 205 = (100+3)(200+5)$$
$$= (100 \times 200) + (100 \times 5) + (3 \times 200) + (3 \times 5)$$
$$= 20000 + 500 + 600 + 15$$
$$= 21115$$

ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆ

24×36 ಸಾಧಾರಣ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

$$\begin{array}{r} 24 \; \times \\ 36 \\ \hline 144 \\ 720 \\ \hline 864 \end{array}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಿಕ್ಕಿದುದು ಹೇಗೆ?

$$\begin{array}{rl} 24 \; \times & \\ 36 & \\ \hline 144 & \rightarrow 6 \times (4+20) = 24 + 120 \\ 720 & \rightarrow 30 \times (4+20) = 120 + 600 \\ \hline 864 & \end{array}$$

ಇನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲ ಮೊತ್ತ $x + y$ ಎಂದೂ, ಎರಡನೇ ಮೊತ್ತ $u + v$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, xu, xv, yu, yv ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಆಗ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು.

x, y, u, v ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ

$$(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$$

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ:

$$6\frac{1}{2}\times 8\frac{1}{3} = \left(6+\frac{1}{2}\right) \times \left(8+\frac{1}{3}\right)$$
$$= (6\times 8)+\left(6\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\times 8\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$
$$= 48+2+4+\frac{1}{6}$$
$$= 54\frac{1}{6}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ. ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕೆಲವು ಕುತೂಹಲಕರವಾದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. (**ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಲೆಕ್ಕ, ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಲೆಕ್ಕ** ಎಂಬ ಭಾಗಗಳು). ಇನ್ನು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕುರಿತು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ.

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತಿಂಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, ಒಂದು ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ.

ಆದಿತ್ಯ	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$$14\times 6 = 84$$
$$13\times 7 = 91$$

ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$91-84 = 7$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಚೌಕದೊಳಗೆ ಇರುವಂತೆ ಇತರ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ನೋಡಿರಿ.

$$22\times 30 = 660$$
$$23\times 29 = 667$$
$$667-660 = 7$$

ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗಲೂ 7 ಆಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡುವ :

ಚೌಕದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

x	$x + 1$
$x + 7$	$x + 8$

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ **ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಲೆಕ್ಕ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಕಂಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ?)

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೋ?

$$x\,(x + 8) = x^2 + 8x$$

$(x + 1)\ (x + 7)$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು?

$$(x + 1)\ (x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

ಎರಡೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ : ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಅಲ್ಲವೇ?

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುಣಲಬ್ಧ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಚೌಕದೊಳಗೆ ಬರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

12	15
16	20

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗೆ ಗುಣಿಸುವ ಬದಲು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$$12 + 20 = 32$$

$$16 + 15 = 31$$

ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

35	40
42	48

$$35 + 48 = 83$$

$$40 + 42 = 82$$

ಯಾವಾಗಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಮಾತ್ರವೇ ಆಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳಲ್ಲವೇ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \quad 5x \quad 6x \quad 7x \quad 8x \quad 9x$$

ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ

x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$	$7x$	$8x$	$9x$
$x+1$	$2(x+1)$	$3(x+1)$	$4(x+1)$	$5(x+1)$	$6(x+1)$	$7(x+1)$	$8(x+1)$	$9(x+1)$

ಮೊದಲು ಬರೆದ ಸಾಲಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ yx ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಈ ಸಾಲಿನ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ ಮುಂದಿನ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ $(y + 1)\,x$.

ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, yx ನ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಅದು, $x + 1$ ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಯಾವ ಅಪವರ್ತ್ಯ?

ಈ ಸಾಲಿನ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ?

ಆಗ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಚೌಕದ ಹೊಸ ರೂಪ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ.

yx	$(y + 1)\,x$
$y\,(x + 1)$	$(y + 1)\,(x + 1)$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ

$$(y+1)\,x = yx + x$$
$$y\,(x+1) = yx + y$$

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(y+1)\,x + y\,(x+1) = 2yx + y + x$$

ಉಳಿದ ಎರಡು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲಿ yx ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ; $(y+1)$ $(x+1)$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೋ?

$$(y+1)(x+1) = yx + y + x + 1$$

ಎರಡನೇ ಜೊತೆ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ

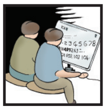
$$yx + (y+1)(x+1) = 2yx + y + x + 1$$

ಆಗ ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಒಂದು ಮೊತ್ತ $2yx + x + y$; ಇನ್ನೊಂದು ಮೊತ್ತ $2yx + y + x + 1$; ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವುದರೊಂದಿಗೆ,

$(y+1)(x+1) = yx + y + x + 1$ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ತತ್ವದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು? ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಈ ತತ್ವದಲ್ಲಿ 1ರ ಬದಲು 2 ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

i) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗೆ ಗುಣಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದೇ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಿಕ್ಕಿದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಮಾನವೇ?

ii) ಇದು ಯಾಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

iii) ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕದ ಬದಲು ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

8	9	10
13	14	15
18	19	20

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(2) ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕದ ಬದಲು ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

6	8	10
9	12	15
12	16	20

i) ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಮೊತ್ತದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಷ್ಟು?

ii) ಈ ರೀತಿಯ ಚೌಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಯಾಕೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

iii) ಹದಿನಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾದರಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$1 \times 4 = (2 \times 3) - 2$$

$$2 \times 5 = (3 \times 4) - 2$$

$$3 \times 6 = (4 \times 5) - 2$$

$$4 \times 7 = (5 \times 6) - 2$$

i) ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ii) ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ ಮಧ್ಯದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವೇನು?

iii) ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಕಾರಣವನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(4) 46×28 ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$4 \times 2 = 8$	8×100	800
$(4 \times 8) + (6 \times 2) = 44$	44×10	440
6×8		48
46×28		1288

i) ಇತರ ಕೆಲವು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.

ii) ಇದು ಸರಿಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರಿ. (ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ $10m + n$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ)

ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗ

51^2 ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?

ಗುಣಿಸಿ ನೋಡದೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. (**ವರ್ಗವೂ ವರ್ಗಮೂಲವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಅನಂತರದ ವರ್ಗ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 50^2 ರೊಂದಿಗೆ 50 ನ್ನು, ನಂತರ 51 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಅಂದರೆ,

$$51^2 = 50^2 + 50 + 51 = 2601$$

ಇದು ಸರಿಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, 51^2 ನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವಾ

$51^2 = 51 \times 51 = (50 + 1)(50 + 1)$

ಇದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$\begin{aligned}(50 + 1)(50 + 1) &= (50 \times 50) + (50 \times 1) + (1 \times 50) + (1 \times 1)\\ &= 2500 + 50 + 50 + 1\\ &= 2500 + 50 + 51\end{aligned}$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವ ವರ್ಗವನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

x^2 ನಿಂದ $(x + 1)^2$ ಸಿಗಲು, x^2 ನೊಂದಿಗೆ x, ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $x + 1$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಇದು ಯಾಕೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಗುಣಾಕಾರ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x+1)(x+1)\\ &= (x\times x)+(x\times 1)+(1\times x)+(1\times 1)\\ &= x^2 + x + (x+1)\end{aligned}$$

$x + (x+1) = 2x+1$ ಅಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$61^2 = (60+1)^2 = 60^2 + (2\times 60) + 1 = 3600 + 120 + 1 = 3721$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇನ್ನು 75^2 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕೆಂದಿರಲಿ. ಇದನ್ನು $(74+1)^2$ ಎಂದು ಬರೆದು ಆರಂಭಿಸಿದರೆ 74^2 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$(70+5)^2$ ಎಂದು ಬರೆದರೋ?

ಈ ರೀತಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\begin{aligned}75^2 &= (70+5)(70+5)\\ &= 70^2 + (70\times 5) + (5\times 70) + 5^2\\ &= 4900 + 350 + 350 + 25\\ &= 5625\end{aligned}$$

103^2 ಆದರೋ?

$$\begin{aligned}103^2 &= (100+3)(100+3)\\ &= 10000 + 300 + 300 + 9\\ &= 10609\end{aligned}$$

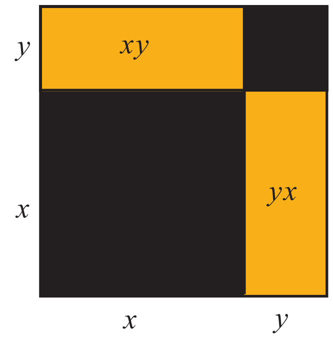
ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವು, ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದೀತೆ?

ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧದ ಎರಡು ಮಡಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\left(10\frac{1}{2}\right)^2 = \left(10+\frac{1}{2}\right)^2 = 10^2 + \left(2\times 10\times\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 + 10 + \frac{1}{4} = 110\frac{1}{4}$$



ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$\boldsymbol{(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy}$$

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 52 (ii) 105 (iii) $20\frac{1}{2}$ (iv) 10.2

ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಕೆಲವು ಮಾದರಿಗಳು ಹೇಗೆ ಸಿಗುತ್ತವೆಯೆಂದು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

$$1 \times 3 = 3 = 2^2 - 1$$

$$2 \times 4 = 8 = 3^2 - 1$$

$$3 \times 5 = 15 = 4^2 - 1$$

ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದೇ?

ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದೆ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡುವ. ಒಂದು ಎಡೆಬಿಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $x, x + 2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$x(x + 2) = x^2 + 2x$$

ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $x + 1$. ಅದರ ವರ್ಗದಿಂದ 1 ಕಳೆದರೋ?

$$(x + 1)^2 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 = x^2 + 2x$$

ಆಗ

$$x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 1, 2, 3, ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ :

$$3 = 2^2 - 1^2$$

$$5 = 3^2 - 2^2$$

$$7 = 4^2 - 3^2$$

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ರೀತಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $2x + 1$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. (**ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಇದನ್ನು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

x^2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $(x + 1)^2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಲುಪಲು, $2x + 1$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಲ್ಲವೇ ಕೂಡಿಸಬೇಕಾದುದು.

ಆಗ $2x + 1$ ಸಿಗಲು $(x + 1)^2$ ದಿಂದ x^2ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು. ಅಂದರೆ

$$2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ x ಆಗಿ 1, 2, 3, ... ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $2x + 1$ ಆಗಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. x, $x + 1$ ಆಗಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎಲ್ಲಾ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುವು.

ಈ ರೀತಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ವರ್ಗಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಲು ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಇದು ಯಾಕೆ ಹೀಗೆ?

ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳೆಲ್ಲಾ $(2x + 1)^2$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆಯಲ್ಲವೇ.

$$(2x + 1)^2 = (2x)^2 + (2 \times 2x \times 1) + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

ಇದರಿಂದ

$$4x^2 + 4x = 4(x^2 + x) = 4x\,(x + 1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ

$$(2x + 1)^2 = 4x\,(x + 1) + 1$$

ಇದರಲ್ಲಿ $4x\,(x + 1)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಅದರೊಂದಿಗೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ವಿಚಾರ ಸಿಗುವುದು.

$4x\,(x + 1) + 1$ ನ್ನು 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಅಲ್ಲವೇ. ಇದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸುವ.

$x, x + 1$ ಇವುಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.ಅದೇನಿದ್ದರೂ $x\,(x + 1)$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ $4x\,(x + 1)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

76 ರ ಆಟ

$76^2 = 5776$

$176^2 = 30976$

$276^2 = 76176$

76 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನೋಡಿರಿ.

ಯಾವ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ? ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

76 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $100x + 76$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$(100x + 76)^2 = 10000x^2 + 15200x + 5776.$

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $10000x^2$ ಮತ್ತು $15200x$ ಗಳ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮತ್ತು ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದೊಂದಿಗೆ 5776 ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವಾಗ ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕೆ 76 ಆಗಿರುವುದು.

76ರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯಿದೆಯೇ?

(1) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, ... ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಧಾನವಿದೆಯೇ? ಅದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(2) 37^2 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

$3^2 = 9$	9×100	900
$2 \times (3 \times 7) = 42$	42×10	420
7^2		49
37^2		1369

i) ಇತರ ಕೆಲವು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

ii) ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

iii) 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸುಲಭ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಈ ಮಾದರಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

$$1^2 + (4 \times 2) = 3^2$$
$$2^2 + (4 \times 3) = 4^2$$
$$3^2 + (4 \times 4) = 5^2$$

i) ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ii) ಇದರಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವ ಯಾವುದು? ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(4) 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(5) 3 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು 9ರಲ್ಲಿ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

5 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೋ? 4ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೋ?

ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗುಣಾಕಾರ

ಕೆಲವು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$302 \times 205 = (300+2) \times (200+5) = 60000 + 1500 + 400 + 10 = 61910$$

ಇನ್ನು 298×195 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೋ?

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times (200 - 5)$$

ಎಂದು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಮೊದಲು

$$298 \times 195 = (300 - 2) \times 195$$

ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನೂ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$(300 - 2) \times 195 = (300 \times 195) - (2 \times 195)$$

ಇನ್ನು $195 = 200 - 5$ ಎಂದು ಬರೆದು ಈ ಎರಡು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$300 \times 195 = 300 \times (200 - 5) = 60000 - 1500 = 58500$$

$$2 \times 195 = 2 \times (200 - 5) = 400 - 10 = 390$$

ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸೇರಿಸಿ ಓದಿದರೆ

$$\begin{aligned} 298 \times 195 &= (300 - 2) \times 195 \\ &= (300 \times 195) - (2 \times 195) \\ &= 58500 - 390 \end{aligned}$$

58500 ರಿಂದ 390ನ್ನು ಕಳೆಯಲಿರುವ ಸುಲಭದ ದಾರಿ 400ನ್ನು ಕಳೆದು 10ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು.

ಅಂದರೆ

$$58500 - 390 = 58500 - 400 + 10 = 58\,110$$

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಕಳೆಯುವುದು ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

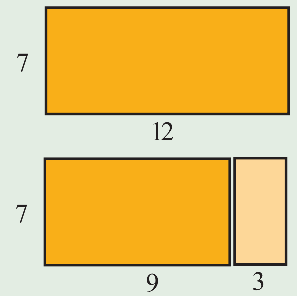
ಇದೇ ರೀತಿ 397ನ್ನು 199ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ನೋಡುವ:

$$\begin{aligned} 397 \times 199 &= (400 - 3) \times 199 \\ &= (400 \times 199) - (3 \times 199) \\ 400 \times 199 &= 400 \times (200 - 1) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 1) \\ &= 80000 - 400 \\ &= 79600 \\ 3 \times 199 &= 3 \times (200 - 1) \\ &= 600 - 3 \\ &= 597 \end{aligned}$$

ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಓದಿದರೋ?

ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ

12 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದವೂ 7 ಸೆ.ಮೀ. ಅಗಲವೂ ಇರುವ ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಸೆ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಸಣ್ಣ ಆಯತವನ್ನಾಗಿಸಿದರೋ?

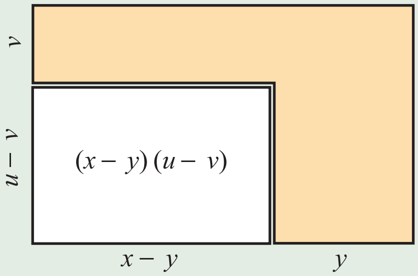


ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತು? ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಕ್ರಿಯೆ ಯಾವುದು?

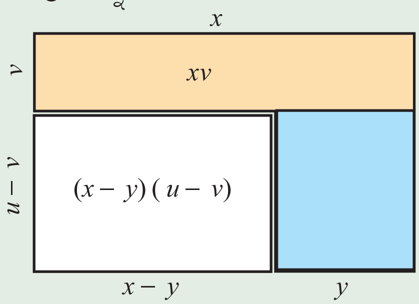
$$(12 - 3) \times 7 = (12 \times 7) - (3 \times 7)$$

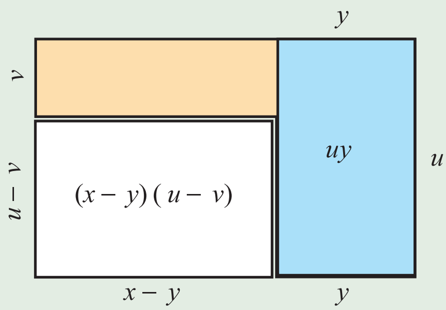
ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗುಣಾಕಾರ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮೂಲಕ

ಒಂದು ಆಯತದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಕಿರಿದಾಗಿಸಿದ ಆಯತದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

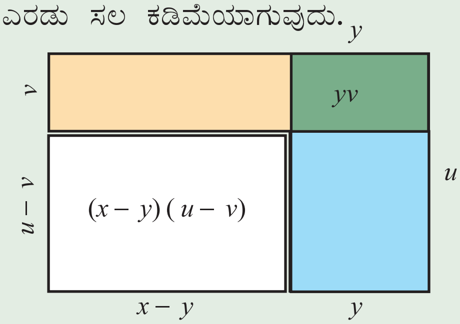


ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಎರಡು ಆಯತಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಮೇಲಿನ ಬಲಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಆಯತ ಎರಡು ಸಲ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.



ಇದನ್ನು ಸರಿ ಮಾಡಲು ಈ ಆಯತವನ್ನು ಒಂದು ಸಲ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$$(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$$

$$397 \times 199 = 79600 - 597$$

597 ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರ ಬದಲು 600ನ್ನು ಕಳೆದು 3ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು ಸುಲಭ.

ಆಗ $397 \times 199 = 79600 - 600 + 3 = 79003$

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಬರೆದು ನೋಡುವ.

$$397 \times 199 = 80000 - 400 - 600 + 3$$

ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$397 \times 199 = (400 \times 200) - (400 \times 1) - (3 \times 200) + (3 \times 1)$$

ಇದೇ ರೀತಿ

$$\begin{aligned} 398 \times 197 &= (400 - 2) \times (200 - 3) \\ &= (400 \times 200) - (400 \times 3) - (2 \times 200) + (2 \times 3) \\ &= 80000 - 1200 - 400 + 6 \\ &= 78400 + 6 \\ &= 78406 \end{aligned}$$

ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಸಾಧಾರಣ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಕಷ್ಟವಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಾದರೋ?

$x > y$, $u > v$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= (x - y) \times (x - y) \\ &= (x \times x) - (x \times y) - (y \times x) + (y \times y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 \end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು x^2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ xy ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ನಂತರ ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಅದನ್ನೇ ಕಳೆಯಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದರ ನಂತರ ಇನ್ನೊಂದು ಕಳೆಯುವ ಬದಲು, $xy + xy = 2xy$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ. (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠ, **ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಅಂದರೆ,

$$x^2 - xy - xy = x^2 - (xy + xy) = x^2 - 2xy$$

ಇನ್ನು ಈ ಮೊದಲು ನಿಲ್ಲಿಸಿದ ಹಂತದಿಂದ ಮುಂದುವರಿಯುವ,

$$(x - y)^2 = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$x > y$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು,

ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವು, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - (2 \times 100 \times 1) + 1^2$$

$$= 10000 - 200 + 1 = 9800 + 1 = 9801$$

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡುವ :

$$2\,(2^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$

$$2\,(3^2 + 2^2) = 26 = 5^2 + 1^2$$

$$2\,(5^2 + 1^2) = 52 = 6^2 + 4^2$$

$$2\,(4^2 + 6^2) = 104 = 10^2 + 2^2$$

ಅನೇಕ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಒಂದು ಜೊತೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ಆರಂಭದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಜೋಡಿಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಜೋಡಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ನೋಡಿರಿ.

ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ. ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ಜೋಡಿ x, y ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗವು

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗ

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಕೂಡಿಸಿದರೋ? x^2, y^2 ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರುವುದು; $2xy$ ಯನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ಕೂಡಿಸಿ ಅನಂತರ ಕಳೆದುದರಿಂದ ಅದು ಇಲ್ಲದಾಯಿತು. ಅಂದರೆ,

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

ಇದನ್ನೇ $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮುಂದುವರಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗೆ ದಾರಿಯಾಯಿತು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನೇ ಕೂಡಿಸಿದುದರ ಎರಡು ಮಡಿ ಸಿಗುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು.

ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗದಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಳೆದರೋ?

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 - 2xy)$$

ಅಂದರೆ, $x^2 + y^2, 2xy$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಅದು $2xy$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ? (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ, **ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಅಂದರೆ,

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2 \times 2xy = 4xy$$

ಇದನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$8 = 4 \times 2 \times 1 = 3^2 - 1^2$$
$$12 = 4 \times 3 \times 1 = 4^2 - 2^2$$
$$16 = 4 \times 4 \times 1 = 5^2 - 3^2$$
$$20 = 4 \times 5 \times 1 = 6^2 - 4^2$$

ಈ ರೀತಿ 8ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ತ್ರಯಗಳು

ಮೂರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದರೆ ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ತ್ರಯ ಎಂದು ಹೇಳುವರು ಎಂಬುದನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ಆದುದರಿಂದ, 3, 4, 5 ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ತ್ರಯವಾಗಿದೆ. ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ. ಎರಡುಸಾವಿರದಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಟದ ಮಣ್ಣಿನ ಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ತ್ರಯಗಳ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೀಡಿದ್ದರು. ಈ ರೀತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. m, n ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿರಿ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ x, y, z ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

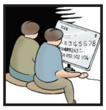
ಆಗ,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟವೇನಿಲ್ಲ.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= z^2 \end{aligned}$$

ಸುಮಾರು ಬಿ.ಸಿ. ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಗ್ರೀಸ್‌ನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನವು ತಿಳಿದಿತ್ತು.



(1) ಕೆಳಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 49 ii) 98 iii) $7\frac{3}{4}$ iv) 9.25

(2) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{2} \qquad 2 = 2 \times 1^2$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 8\frac{1}{2} \qquad 8 = 2 \times 2^2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 18\frac{1}{2} \qquad 18 = 2 \times 3^2$$

ಇಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(3) ಕೆಲವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

$$24 = 7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2$$

$$32 = 9^2 - 7^2 = 6^2 - 2^2$$

$$40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$$

i) 24 ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ 8 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಹೀಗೆ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಿರಿ.

ii) 48 ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ 16 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು?

ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳಾಗಿಯೂ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿಯೂ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರಲ್ಲವೆ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$203 \times 302 = (200 + 3) \times (300 + 2) = 60000 + 400 + 900 + 6 = 61306$$

$$197 \times 298 = (200 - 3) \times (300 - 2) = 60000 - 400 - 900 + 6 = 58706$$

ಎಂಬೆಲ್ಲಾ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

203×298 ನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ಅನುಕೂಲಕರ?

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times (300 - 2)$$

ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 203ನ್ನು ಮಾತ್ರ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆಯುವ,

$$203 \times 298 = (200 + 3) \times 298 = (200 \times 298) + (3 \times 298)$$

ಇನ್ನು 298 ನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದು, ಈ ಎರಡೂ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮಾಡುವ

$$200 \times 298 = 200 \times (300 - 2) = 60000 - 400 = 59600$$

$$3 \times 298 = 3 \times (300 - 2) = 900 - 6 = 894$$

ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$\begin{aligned} 203 \times 298 &= (200 + 3) \times 298 \\ &= (200 \times 298) + (3 \times 298) \\ &= 59600 + 894 \\ &= 60494 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು, ಮಾಡಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವ:

$$203 \times 298 = 60000 - 400 + 900 - 6$$

ವಿಂಗಡಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$(200 + 3) \times (300 - 2) = (200 \times 300) - (200 \times 2) + (3 \times 300) - (3 \times 2)$$

ಹೀಗೆಯೇ

$$\begin{aligned} 105 \times 197 &= (100 + 5) \times (200 - 3) \\ &= (100 \times 200) - (100 \times 3) + (5 \times 200) - (5 \times 3) \\ &= 20000 - 300 + 1000 - 15 \\ &= 20000 + 700 - 15 \\ &= 20685 \end{aligned}$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

x, y, u, v ಎಂಬೀ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $u > v$ ಆದರೆ

$$(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಗುಣಿಸಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ:

$$\begin{aligned} (x + y)(x - y) &= (x \times x) - (x \times y) + (y \times x) - (y \times y) \\ &= x^2 - xy + yx - y^2 \\ &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$x > y$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$205 \times 195 = (200+5)\times(200-5) = 200^2 - 5^2 = 40000 - 25 = 39975$$

$$9\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = \left(9+\frac{1}{2}\right)\times\left(9-\frac{1}{2}\right) = 9^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 81 - \left(\frac{1}{4}\right) = 80\ \frac{3}{4}$$

ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$168^2 - 162^2 = (168+162)\times(168-162) = 330\times 6 = 1980$$

ಕೆಲವು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದಿವಲ್ಲವೆ. ಹಾಗೆ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 45ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ. $x^2 - y^2 = 45$ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ x, y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$$45 = (x+y)(x-y)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ $(x+y), (x-y)$ ಗಳು 45ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಬೇಕು. 45ನ್ನು ಅದರ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$45 = 45 \times 1$$

$$45 = 15 \times 3$$

$$45 = 9 \times 5$$

ಎಂಬೆಲ್ಲಾ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 45, 1 ಎಂಬೀ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು

$$x + y = 45$$

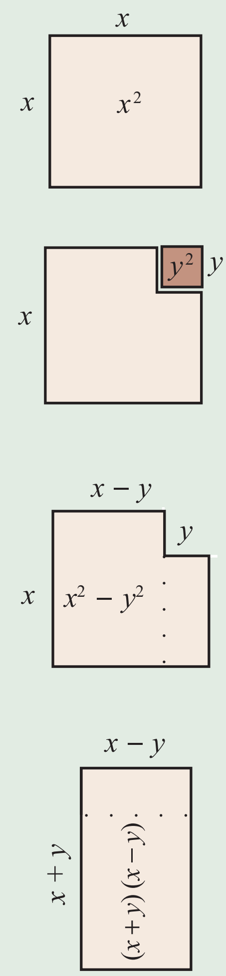
$$x - y = 1$$

ಎಂದು ಬರೆದು ನೋಡುವ, ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಗೊತ್ತಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. (**ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಮೊತ್ತವೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

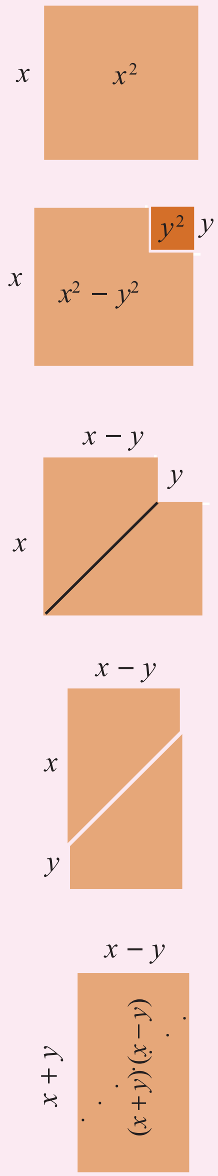
ಆಗ 45, 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ x; ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ y ಆಗಿದೆ.

$$x = 23 \qquad y = 22$$

ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ



ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿ



ಆಗ,

$$45 = 23^2 - 22^2$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $45 = 15 \times 3$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ. x ಮತ್ತು y ಇಲ್ಲದೆ ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ?

15, 3 ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ 9; ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ 6

ಆಗ,

$$45 = 9^2 - 6^2$$

ಇನ್ನು $45 = 9 \times 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ?

$$45 = 7^2 - 2^2$$

ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ $10 = 10 \times 1$.

ಅಪವರ್ತನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವು $5\frac{1}{2}$; ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧ $4\frac{1}{2}$; ಎಂದಾದರೆ,

$$10 = \left(5\frac{1}{2}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು; ಆದರೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಅಲ್ಲವಲ್ಲವೆ; ಅಂದರೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಲ್ಲ. $10 = 5 \times 2$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ?

ಯಾವ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರುವುದು?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 26.5×23.5 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

ಮೊತ್ತ 26.5 ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ 23.5 ಆಗುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಲದೆ?

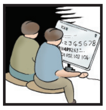
ಅದಕ್ಕಾಗಿ 26.5, 23.5 ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧವನ್ನೂ ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕು.

ಅಂದರೆ, 25 ಮತ್ತು 1.5. ಆಗ

$$26.5 = 25 + 1.5 \qquad 23.5 = 25 - 1.5$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$26.5 \times 23.5 = (25 + 1.5)(25 - 1.5) = 25^2 - 1.5^2 = 625 - 2.25 = 622.75$



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

i) a) $68^2 - 32^2$ b) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2$ c) $3.6^2 - 1.4^2$

ii) a) 201×199 b) $2\frac{1}{3} \times 1\frac{2}{3}$ c) 10.7×9.3

(2) ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲೂ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು ಯಾವುದರಲ್ಲಿ ಎಂದು ಗುಣಿಸಿ ನೋಡದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 25×75, 26×74

ii) 76×24, 74×26

iv) 10.6×9.4, 10.4×9.6

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

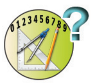
i) $(125 \times 75) - (126 \times 74)$

ii) $(124 \times 76) - (126 \times 74)$

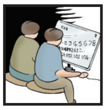
iii) $(224 \times 176) - (226 \times 174)$

iv) $(10.3 \times 9.7) - (10.7 \times 9.3)$

v) $(11.3 \times 10.7) - (11.7 \times 10.3)$



ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಹಲವು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು? ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಸುಲಭ ದಾರಿ ಯಾವುದು?



(1) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಒಂದು ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

4	5
11	12

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಈ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$4^2 + 12^2 = 160 \qquad 11^2 + 5^2 = 146 \qquad 160 - 146 = 14$$

i) ಹೀಗೆಯೇ ಬೇರೆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ.

ii) ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳಲ್ಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 14 ಸಿಗುವುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(2) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದು, ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿರಿ :

3	4	5
10	11	12
17	18	19

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ; ಈ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$3^2 + 19^2 = 370 \qquad 17^2 + 5^2 = 314 \qquad 370 - 314 = 56$$

i) ಹೀಗೆಯೇ ಬೇರೆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿರಿ.

(ii) ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳಲ್ಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 56 ಸಿಗುವುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ. (ಚೌಕದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ. ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ, **ಇನ್ನೊಂದು ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್ ಲೆಕ್ಕ** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)

(3) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದು, ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

3	4	5
10	11	12
17	18	19

ಮೂಲೆಯಿಂದ ಮೂಲೆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿರಿ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$3 \times 19 = 57$ $\qquad$ $17 \times 5 = 85$ $\qquad$ $85 - 57 = 28$

i) ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಬೇರೆ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರಿ.

ii) ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕಗಳಲ್ಲೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 28 ಸಿಗುವುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ. (ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಉತ್ತಮ)

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾ ಸಾಧನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ
• ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಲಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯವಾಗಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಾಗಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.			
• ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುವುದು.			
• ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಗುಣಲಬ್ಧವಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.			
• ಸಂಖ್ಯಾಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳುವುದು.			

5

ಹಣವಿನಿಮಯ

ಬಡ್ಡಿಗೂ ಬಡ್ಡಿ

ಎರಡು ಬ್ಯಾಂಕುಗಳ ಜಾಹಿರಾತು ನೋಡಿರಿ.

10% ಬಡ್ಡಿ
24 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ 1 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಯು
1.20 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು

10% ಬಡ್ಡಿ
24 ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ 1 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಯು
1.21 ಲಕ್ಷ ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು

ಎರಡೂ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲೂ ಬಡ್ಡಿದರ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಸಮಾನ ಮೊತ್ತ, ಸಮಾನ ಕಾಲಾವಧಿಗೆ ಠೇವಣಿಯಿರಿಸಿದರೆ, ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವುಂಟಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗುತ್ತದೆ. ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು 2 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಠೇವಣಿಯಿರಿಸುವರು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿದರ 10%.

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಬಡ್ಡಿ ಸಿಗುವುದು?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವಾ.

10% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಒಂದು ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 15000 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಅನು ಮತ್ತು ಮನು ಠೇವಣಿಯಿರಿಸಿದರು. ಒಂದು ವರ್ಷದ ಬಳಿಕ ಅಸಲು ಮತ್ತು ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅನು ಹಿಂತೆಗೆದಳು. ಹಿಂತೆಗೆದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅದೇ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅನು ಪುನಃ ಠೇವಣಿಯಿರಿಸಿದಳು. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಇಬ್ಬರೂ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಪಡೆದರು. ಹೆಚ್ಚು ಹಣ ದೊರೆತದ್ದು ಯಾರಿಗೆ? ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು?

2 ವರ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಬಡ್ಡಿ ಮನುವಿಗೆ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ;

ಅಂದರೆ, $15000 \times \frac{10}{100} \times 2 = 3000$

ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಮನುವಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಸಿಗುವುದು?

$15000 + 3000 = 18000$ ರೂಪಾಯಿ.

ಅನುವಿಗೊ?

ಒಂದು ವರ್ಷದ ಅನಂತರ ಎಷ್ಟು ಬಡ್ಡಿ ಸಿಕ್ಕಿತು?

$$15000 \times \frac{10}{100} = 1500$$

ಹಾಗಾದರೆ ಹಿಂತೆಗೆದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

$$15000 + 1500 = 16500 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡು ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿ ಎಷ್ಟು?

$$16500 \times \frac{10}{100} = 1650$$

ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು?

$$16500 + 1650 = 18150 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಅನುವಿಗೆ ದೊರೆತದ್ದು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು?

ಒಂದನೇ ವರ್ಷ ಬಡ್ಡಿಯಾಗಿ ದೊರೆತ 1500 ರೂಪಾಯಿಯ ಬಡ್ಡಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಿಕ್ಕಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಹಲವು ಠೇವಣಿ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ (ಮೊತ್ತ ಹಿಂತೆಗೆದು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುವ ರೀತಿಯಲ್ಲದಿದ್ದರೂ) ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, ಮುಂದಿನ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಿದೆ.

ಅಂದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಗೂ ಬಡ್ಡಿ ದೊರೆಯುವುದು.

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲೂ ಅಸಲು ಬದಲಾಗುತ್ತಿರುವುದು; ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ (compound interest) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಅಸಲಿನಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದೆ ಪ್ರತೀ ವರ್ಷ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸರಳಬಡ್ಡಿ (simple interest) ಎನ್ನುವರು.

ಎರಡನೇ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದರೆ ಹೆಚ್ಚು ಹಣ ಸಿಗುವುದು ಯಾಕಾಗಿರಬಹುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೇ?

5% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಸುಮೇಶ್ 10000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದನು. 2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಅವನಿಗೆ ಸಿಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

ಒಂದನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲು $= 10000$ ರೂಪಾಯಿ

ಒಂದನೇ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ $= 10000 \times \frac{5}{100}$

$= 500$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಅಸಲು $= 10000 + 500$

$= 10500$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿ $= 10500 \times \frac{5}{100}$

$= 525$

ಎರಡು ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಸುಮೇಶನಿಗೆ ದೊರೆಯುವ ಮೊತ್ತ

$= 10500 + 525$

$= 11025$ ರೂಪಾಯಿ

(1) 8% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಸಂದೀಪ್ 25000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದನು. ಎರಡು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಸಿಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(2) 12% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಥೋಮಸ್ 15000 ರೂಪಾಯಿ ಸಾಲ ಪಡೆದನು. 2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ 10000ರೂಪಾಯಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದನು. ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(3) 5% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ 2 ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯಾಗಿ 200 ರೂಪಾಯಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಅಷ್ಟೇ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಅಷ್ಟೇ ದರದಲ್ಲಿ 2 ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಿಗುವ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಎಷ್ಟು?

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿ

5% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ, 10000 ರೂಪಾಯಿಯು 2 ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 11025 ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿರಲ್ಲವೆ. ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಯನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ಒಂದನೇ ವರ್ಷ 10000 ರೂಪಾಯಿಯ $\frac{5}{100}$ ಭಾಗ ಬಡ್ಡಿಯಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ 500 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು 10000 ರೂಪಾಯಿಯೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವ 10500 ರೂಪಾಯಿಯ $\frac{5}{100}$ ಭಾಗವು ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಬಡ್ಡಿಯಾಗಿದೆ. ಈ 525 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು 10500 ರೂಪಾಯಿಯೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವಾದ 11025 ರೂಪಾಯಿಯು ಎರಡು ವರ್ಷದ ಬಳಿಕ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಠೇವಣಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ?

ಮೂರು ವರ್ಷದ ಅನಂತರ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಸಿದುವುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು 11025 ರೂಪಾಯಿಯ $\frac{5}{100}$ ಭಾಗವನ್ನು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗಲೂ, ಆಗ ಇರುವ ಮೊತ್ತದ $\frac{5}{100}$ ಭಾಗವನ್ನು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ x ಎಂಬ ಮೊತ್ತದ

$\frac{5}{100}$ ಭಾಗವನ್ನು x ನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

$$x + \frac{5}{100}x = \left(1+\frac{5}{100}\right)x$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ $\frac{5}{100}$ ಭಾಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರ ಬದಲು $1+\frac{5}{100}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಅಂದರೆ,

ಒಂದು ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವುದು $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)$

2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವುದು $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$

3 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವುದು $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

n ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಸಿಗುವುದು $10000\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$.

ಠೇವಣಿ ಇಡುವ ಮೊತ್ತವೋ ಬಡ್ಡಿಯ ದರವೋ ಬದಲಾದರೂ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

p ರೂಪಾಯಿಗೆ r % ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಠೇವಣಿ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ,

n ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವುದು $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

9% ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ನಾನ್ಸಿ 15000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದಳು. 2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಯಾಗುವುದು?

ಈ ಮೊದಲು ತಿಳಿದಂತೆ, ಇದನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$15000\left(1+\frac{9}{100}\right)^2 = 15000\left(\frac{100+9}{100}\right)^2$$

$$= 15000 \times \left(\frac{109}{100}\right)^2 = 15000 \times (1.09)^2$$

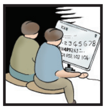
$$= 15000 \times 1.1881$$

$= 17821.5 = 17821$ ರೂಪಾಯಿ 50 ಪೈಸೆ.

$$\begin{aligned} 109 \times 109 &= (100+9)^2 \\ &= 10000+1800+81 \\ &= 11881 \\ 1.09^2 &= 1.1881 \end{aligned}$$

ಹಣ ವಿನಿಮಯದಲ್ಲಿ 50 ಪೈಸೆಯಿಂದ 1 ರೂಪಾಯಿ ವರೆಗೆ ಇರುವವುಗಳನ್ನು 1 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಾಗಿದೆ ಕ್ರಮ. 50 ಪೈಸೆಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಆಗ ನಾನ್ಸಿಗೆ 2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ 17822 ರೂಪಾಯಿ ಸಿಗುವುದು.



(1) 6% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅನಸ್ 20000 ರೂಪಾಯಿ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದನು. 3 ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅನಸ್‌ಗೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

(2) 10% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ದಿಯಾ 8000 ರೂಪಾಯಿ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದಳು. 2 ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ 5000 ರೂಪಾಯಿ ಹಿಂತೆಗೆದಳು. ಮತ್ತೂ ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ದಿಯಾಳ ಠೇವಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು?

(3) 11% ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ವರುಣ್ 25000 ರೂಪಾಯಿ ಸಾಲ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. 2 ವರ್ಷದ ನಂತರ 10000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿದನು. ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಇನ್ನೂ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಬೇಕು?

ಕಾಲ ಬದಲಾಗುವುದು

ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗಲೂ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವ ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರತಿ 6 ತಿಂಗಳು ಕಳೆದಾಗಲೂ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸುವ ರೀತಿಯೂ ಚಾಲ್ತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಸಂಪ್ರದಾಯವನ್ನು ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕ ರೀತಿ ಎನ್ನುವರು.

ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಂಬಿಳಿ 12000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದಳು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯದರ 8% ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ಅಂಬಿಳಿಗೆ ಸಿಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 2 ಸಲ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಒಂದು ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿಯದರ 8% ಆದುದರಿಂದ 6 ತಿಂಗಳುಗಳಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯದರ 4% ಆಗಿದೆ.

ಮೊದಲ 6 ತಿಂಗಳ ಬಡ್ಡಿ $= 12000 \times \frac{4}{100}$

$= 480$ ರೂಪಾಯಿ

ಇದನ್ನು 12000 ದೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿ, ಮುಂದಿನ 6 ತಿಂಗಳಿಗಿರುವ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು.

$$12000 + 480 = 12480$$

ಮುಂದಿನ 6 ತಿಂಗಳ ಬಡ್ಡಿ $= 12480 \times \frac{4}{100}$

$= 499.20$ ರೂಪಾಯಿ $= 499$ ರೂಪಾಯಿ 20 ಪೈಸೆ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅಂಬಿಳಿಗೆ ಸಿಗುವ ಹಣ ಎಷ್ಟು ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಬೇಕಾದರೇ?

ಪ್ರತೀ 6 ತಿಂಗಳೂ $\frac{4}{100}$ ಭಾಗವನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ $1+\frac{4}{100}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಆಗ $1\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಸಿಗುವುದು.

$$12000 \times \left(1+\frac{4}{100}\right)^3 = 12000 \times \left(\frac{104}{100}\right)^3 = 12000 \times (1.04)^3$$

ಎಂದು ನೇರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿದಾಗ 13498.368 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವು 13498 ರೂಪಾಯಿ.

ಹೀಗೆಯೇ ಬೇರೆ ಕಾಲಾವಧಿಗಳಿಗೂ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪ್ರತಿ ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಪದ್ಧತಿಗಳೂ ಇವೆ. ಇದನ್ನು ಕಾಲುವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಎಂದು ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ.

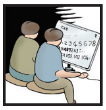
ಕಾಲು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅಂಬಿಳಿ ಹಣ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುವುದಾದರೇ?

ಪ್ರತಿ ಮೂರು ತಿಂಗಳಿಗೆ 2% ಬಡ್ಡಿ ಸಿಗುವುದು.

ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅಂಬಿಳಿಗೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತ

$$12000 \times \left(1+\frac{2}{100}\right)^4 = 12000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^4 = 12000 \times (1.02)^4$$

ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.



(1) 5000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಅರುಣ್ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದನು. 5000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕಾಲುವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಮೋಹನ್ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸಿದನು. ಎರಡೂ ಬ್ಯಾಂಕ್‌ಗಳೂ 6% ವಾರ್ಷಿಕದರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಇಬ್ಬರೂ ಹಣವನ್ನು ಹಿಂತೆಗೆದರು. ಮೋಹನ್‌ಗೆ ಅರುಣನಿಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚು ಸಿಗುವುದು?

(2) ಕಾಲುವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಬ್ಯಾಂಕಿನಿಂದ ಒಬ್ಬನು 16000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಸಾಲ ಪಡೆದನು. ವಾರ್ಷಿಕದರ 10% ಆಗಿದೆ. 9 ತಿಂಗಳ ನಂತರ ಸಾಲ ತೀರಿಸಲು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ಹಣಕಾಸು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಮನುವು 15000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಪ್ರತಿ 3 ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅಸಲಿನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತಾರೆ. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯದರ 8%. ಒಂದು ವರ್ಷದ ನಂತರ ಅವನಿಗೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಸಿಗುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(4) ಜೋನ್ 2500 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಜನವರಿ 1 ರಂದು ಸಹಕಾರಿ ಬ್ಯಾಂಕೊಂದರಲ್ಲಿ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುತ್ತಾನೆ. ಬ್ಯಾಂಕು ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿದರ 6% ಆಗಿದೆ. ಜುಲೈ 1 ನೇ ತಾರೀಕು 2500 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಜೋನ್ ಪುನಃ ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುವನು. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಜೋನ್‌ನ ಠೇವಣಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಣವೆಷ್ಟು?

(5) ಪ್ರತಿ ನಾಲ್ಕು ತಿಂಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಒಂದು ಹಣಕಾಸು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ರಮ್ಲತ್ 30,000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಠೇವಣಿ ಇರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿದರ 9%. ಒಂದು ವರ್ಷ ಕಳೆದಾಗ ರಮ್ಲತ್‌ಳಿಗೆ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

ಕೂಡಿಸಿಯೂ ಕಳೆದೂ

ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆಯು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷವೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದರದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವುದೋ ಕಳೆಯುವುದೋ ಮಾಡುವರು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸುವ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುವರು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಜನರೂ ಮೊಬೈಲ್‌ಫೋನ್ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರಲ್ಲವೆ? ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡಿರಿ.

> ಒಂದು ಮೊಬೈಲ್‌ಫೋನ್ ಕಂಪೆನಿಯು ತನ್ನ ಉತ್ಪಾದನೆಯನ್ನು ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ 20% ದಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿದೆ. 2014 ರಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 7 ಕೋಟಿ ಮೊಬೈಲ್‌ಫೋನ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರುವುದಾದರೆ 2018 ರಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಮೊಬೈಲ್‌ಫೋನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು?

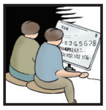
ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ 20% ಹೆಚ್ಚಳವನ್ನು ಉದ್ದೇಶವಿರಿಸಿಕೊಂಡಿರುವುದು.

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಸಹಿತ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಯನ್ನು ನೋಡುವ.

2014 ರಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಫೋನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 7 ಕೋಟಿ

2018 ರಲ್ಲಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಫೋನ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $70000000\left(1+\frac{20}{100}\right)^4$

ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.



(1) ಪ್ರತಿವರ್ಷ 15%ದಷ್ಟು ಇ-ತ್ಯಾಜ್ಯ (e-waste) ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದು ಎಂದು ಕಲಿಕಾ ವರದಿಯಾಗಿದೆ. 2014ರಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 9 ಕೋಟಿ ಟನ್ ಇ-ತ್ಯಾಜ್ಯ ಇದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ 2020 ಆಗುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಟನ್ ಇ-ತ್ಯಾಜ್ಯ ಉಂಟಾಗಲು ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ?

(2) ಒಂದು ಟಿ.ವಿ. ಕಂಪೆನಿಯು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮಾದರಿಯ ಟಿ.ವಿ.ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿವರ್ಷ 5% ದಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದು. ಟಿ.ವಿ.ಯ ಈಗಿನ ಬೆಲೆ 8000 ರೂಪಾಯಿಯಾದರೆ 2 ವರ್ಷದ ನಂತರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ಹುಲಿ ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ವರ್ಷಗಳು ಕಳೆದಂತೆ ಇವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ. ಈಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಂತೆ ವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿ 3% ದಂತೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿದೆ. ಹುಲಿ ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಅಥೋರಿಟಿಯು 2011 ರಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದ ಗಣತಿ ಪ್ರಕಾರ ಭಾರತದಲ್ಲಿ 1700 ಹುಲಿಗಳು ಇದ್ದುವು. ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದರೆ 2016 ರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದಾದ ಹುಲಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪುನರವಲೋಕನ

ಕಲಿಕಾಸಾಧಾನೆಗಳು	ನನಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಟೀಚರ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು	ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.
• ಬಡ್ಡಿಗೂ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಅರ್ಧವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿಯೂ ಕಾಲುವಾರ್ಷಿಕವಾಗಿಯೂ ಇತರ ಕಾಲಾವಾಧಿಗಳಿಗೂ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು.			
• ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಇತರ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದು.			