സ്റ്റാൻഡേർഡ് X

ഗണിതം

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

എണ്ണങ്ങളുടെയും അളവുകളുടെയും കണക്കുകൂട്ടലുകളിലാണ് ഗണിതം ആരംഭിക്കുന്നത്. കാർഷികയുഗത്തിൽ അത് പരപ്പളവുകളുടെ ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങളാകുന്നു: കാലാവസ്ഥാനിർണയത്തിനായി വാനശാസ്ത്രമായി ഉയരുന്നു, ത്രികോണമിതി എന്ന ഗണിതശാഖയായി വളരുന്നു. നവോത്ഥാന യൂറോപ്പിൽ, ത്രികോണമിതി നാവികസഞ്ചാരങ്ങളുടെ അടിത്തറയാകുന്നു; ഇന്നത്തെ ലോകത്തിൽ ഉപഗ്രഹങ്ങളിലൂടെയുള്ള സ്ഥാനനിർണയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമാകുന്നു. പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഗണിതകാരന്മാർ, കേവലസംഖ്യാക്രിയകളായി വികസിപ്പിച്ച സിദ്ധാന്തങ്ങൾ, ഇ-വ്യാപരങ്ങളിലെ സുരക്ഷാസംവിധാനങ്ങൾ നടപ്പിലാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഗണിതത്തിന്റെ അനന്തമായ പ്രയോഗസാധ്യതകൾ തിരിച്ചറിയാനും അതിന്റെ സൈദ്ധാന്തിക താളങ്ങളിൽ ആനന്ദിക്കാനും എല്ലാവർക്കും കഴിയട്ടെ എന്നാശംസിക്കുന്നു.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. പി.എ. ഫാത്തിമ
ഡയറക്ടർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ടി.പി. പ്രകാശൻ
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വാഴക്കാട്
മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം.വി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കുമ്പള
കാസറഗോഡ്

വിജയകുമാർ ടി.കെ.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചെർക്കള
കാസറഗോഡ്

രാമാനുജം ആർ.
എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

അനിൽകുമാർ എം.കെ.
എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കൽപ്പറ്റ, വയനാട്

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.എസ്. അരീക്കോട്
മലപ്പുറം

രമേശൻ എൻ.കെ.
ആർ.ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്. മൊകേരി, കണ്ണൂർ

ജാബിർ കെ.
ജി.വി.എച്ച്.എസ്. മൊഗ്രാൽ, കാസറഗോഡ്

ശ്രീകുമാർ ടി.
ഗവ.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കരമന
തിരുവനന്തപുരം

കെ.ജെ. പ്രകാശ്
ജി.എം.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പട്ടം
തിരുവനന്തപുരം

സി.പി.എ. കരീം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്.എസ്. അരീക്കോട്
മലപ്പുറം

മുഹമ്മദലി പി.പി.
ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കാലിക്കറ്റ് യൂണിവേഴ്സിറ്റി കാമ്പസ്, മലപ്പുറം

പി.പി. പ്രഭാകരൻ
റിട്ട. ടീച്ചർ
പ്രശാന്ത്, പൂനൂർ, കോഴിക്കോട്

കവർ

രാജീവൻ എൻ.ടി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. തരിയോട്, വയനാട്

വിദഗ്ധർ

ഡോ.ഇ. കൃഷ്ണൻ
റിട്ട. പ്രൊഫ. യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്
തിരുവനന്തപുരം

വേണുഗോപാൽ സി.
അസി. പ്രൊഫ., ഗവ. കോളേജ് ഓഫ് ടീച്ചർ
എഡ്യൂക്കേഷൻ, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. രമേഷ് കുമാർ പി.
അസി. പ്രൊഫ., കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി

ഡോ. ശരച്ചന്ദ്രൻ
റിട്ട. ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ ഓഫ്
കോളേജിയേറ്റ് എഡ്യൂക്കേഷൻ, കോട്ടയം

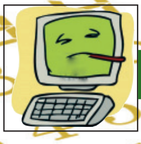
അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ

സുജിത് കുമാർ ജി.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

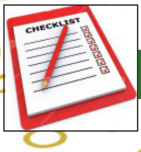
ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.



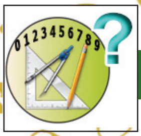
ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

കണക്ക് ചെയ്തു

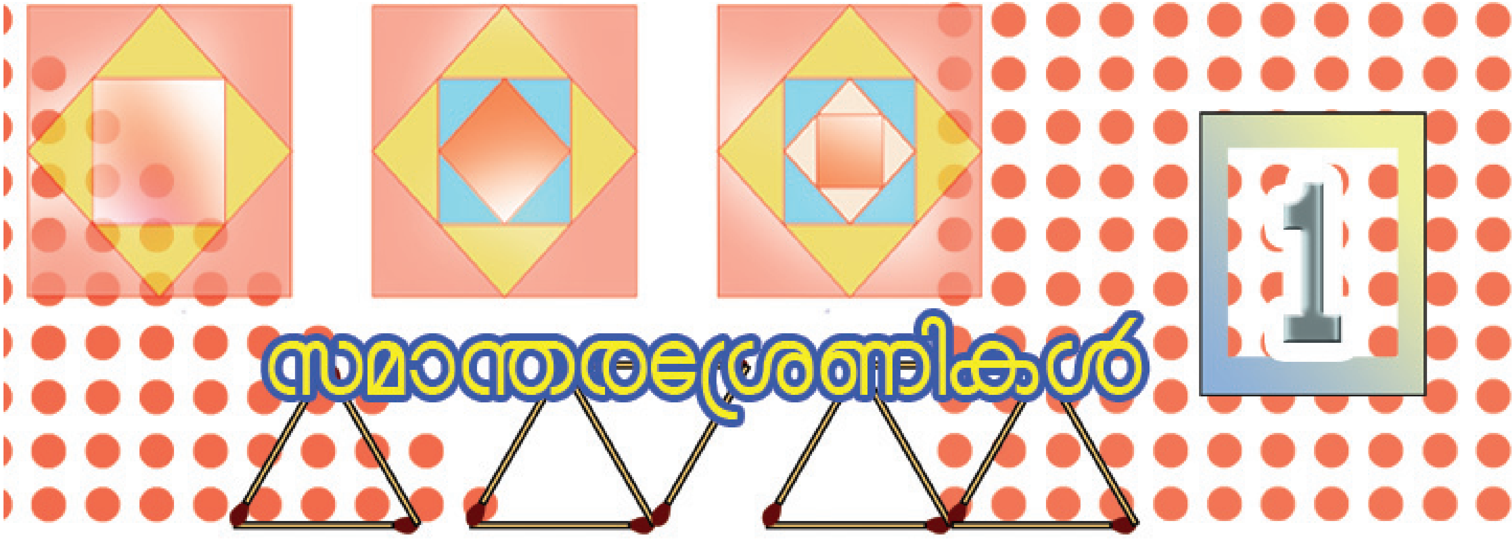
ഗവേഷണം



തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

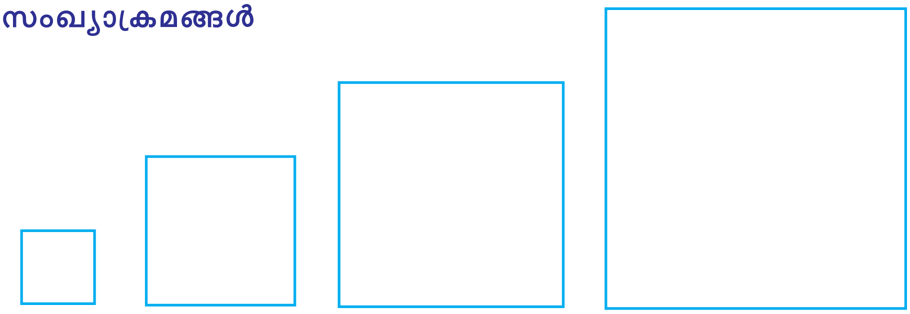


ചർച്ച ചെയ്യാം



1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ



ചിത്രത്തിലെ സമചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ, അവയുടെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്? പരപ്പളവോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., ...

എന്നിങ്ങനെ തുടരുമ്പോൾ, ചുറ്റളവ്

4 സെ.മീ., 8 സെ.മീ., 12 സെ.മീ., 16 സെ.മീ., ...

എന്നു തുടരുന്നു; പരപ്പളവ്

1 ച.സെ.മീ., 4 ച.സെ.മീ., 9 ച.സെ.മീ., 16 ച.സെ.മീ., ...

എന്നും.

സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം

1, 2, 3, 4, ...

എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതുന്നതുതന്നെ. ചുറ്റളവ്

4, 8, 12, 16, ...

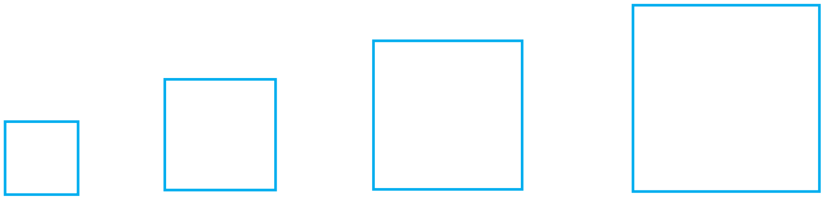
എന്നിങ്ങനെ നാലിന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ക്രമം; പരപ്പളവ്,

1, 4, 9, 16, ...

എന്ന പൂർണവർഗങ്ങളുടെ ക്രമം.

ഇവയുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളമോ? എഴുതിനോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടുന്നതിനുപകരം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാലോ?

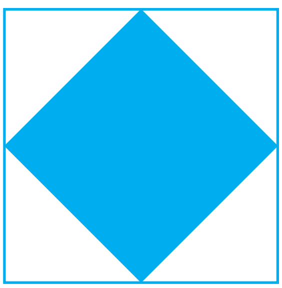


1 സെ.മീ. $1\frac{1}{2}$ സെ.മീ. 2 സെ.മീ. $2\frac{1}{2}$ സെ.മീ.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച് ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, **സംഖ്യാശ്രേണി (number sequence)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സമചതുരങ്ങളുപയോഗിച്ചുതന്നെ മറ്റൊരു ശ്രേണിയുണ്ടാക്കാം; വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരു മീറ്ററായ ഒരു സമചതുരം സങ്കൽപ്പിക്കുക. വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മറ്റൊരു സമചതുരം കിട്ടും.



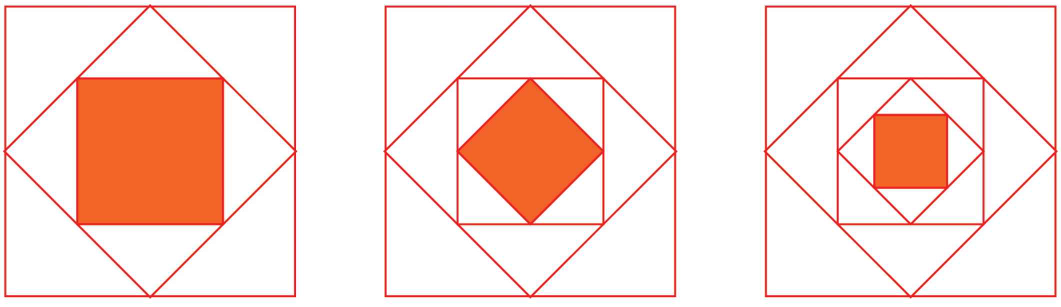
1 മീറ്റർ

ഈ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

അതിന്റെ വികർണം ഒരു മീറ്ററാണ്; സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വികർണത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ചതുർഭുജപ്പരപ്പ്** എന്ന പാഠത്തിൽ, **സമഭുജസാമാന്തരികം** എന്ന ഭാഗം)

അപ്പോൾ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അര ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതു തുടർന്നാൽ



ഓരോ തവണയും പരപ്പളവ് പകുതിയാകും, ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി യെന്താണ്?

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽനിന്നും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം; ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴോട്ടിടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം നിരന്തരം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കുമല്ലോ. t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗം v മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നെടുത്താൽ

$$v = 9.8t$$

എന്നാണ് സമയ-വേഗ സമവാക്യം.

t സെക്കന്റ് സമയംകൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

$$s = 4.9t^2$$

എന്നാണ് സമയ-ദൂര സമവാക്യം.

അപ്പോൾ ഇതുപയോഗിച്ച് രണ്ടു ശ്രേണികളുണ്ടാക്കാം.

സമയം	1,	2,	3,	4,	...
വേഗം	9.8,	19.6,	29.4,	39.2,	...
ദൂരം	4.9,	19.6,	44.1,	78.4,	...

അളവുകളല്ലാതെ കേവലസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ചും ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, അഭാജ്യസംഖ്യകൾ വലുപ്പമനുസരിച്ച് ക്രമമായി എഴുതിയാൽ

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

എന്നു തുടരുന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

$\frac{21}{37}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$5, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 6, 7, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയാകും.

ഇതുതന്നെ π എന്ന സംഖ്യയിലായാൽ

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

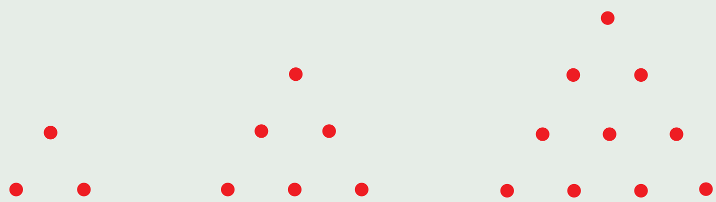
ഒരു ശ്രേണിയെത്തന്നെ പലതരത്തിൽ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി,

1, 11, 21, 31, ...

ഇതിനെത്തന്നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെന്നും പറയാം.

?

(1) പൊട്ടുകളടുക്കി ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം.
ഓരോ ത്രികോണത്തിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം എഴുതുക.



തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(2) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ ശ്രേണിയിൽനിന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുക.

വശങ്ങളുടെ എണ്ണം	3, 4, 5, ...
അകക്കോണുകളുടെ തുക	
പുറംകോണുകളുടെ തുക	
ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്	
ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ്	

(3) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും, 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും ശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(4) 1, 6 എന്നീ അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റു രണ്ടുതരത്തിൽ വിവരിക്കുക.

(5) ഒരു ഘനസെന്റിമീറ്റർ ഇരുമ്പിന്റെ ഭാരം 7.8 ഗ്രാം ആണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., ... എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പു സമചതുരക്കട്ടകളുടെ വ്യാപ്തവും, ഭാരവും ശ്രേണികളായി എഴുതുക.

ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ., 2 സെ.മീ., 3 സെ.മീ., ... എന്നിങ്ങനെയായ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുററളവുകൾ ക്രമമായെടുത്താൽ

4, 8, 12, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ അതിലെ **പദങ്ങൾ (terms)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ 4, 8, 12, ... എന്നിങ്ങനെയാണ്. കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ, ഒന്നാം പദം 4, രണ്ടാം പദം 8, മൂന്നാം പദം 12, ...

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

സ്ഥാനം	1,	2,	3,	...
പദം	4,	8,	12,	...

ഇതിലെ 5-ാം പദം എത്രയാണ്? 20-ാം പദമോ?

ഇവിടെ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദവും, സ്ഥാനത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങാണ്.

അൽപം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം $4n$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ സ്ഥാനക്രമത്തിൽ അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച് എഴുതുന്നത് $x_1, x_2, x_3, \ldots$ അല്ലെങ്കിൽ $y_1, y_2, y_3, \ldots$ എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണീനിയമം വീണ്ടും ചുരുക്കാം.

$$x_n = 4n$$

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നീ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ,

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 8$$
$$x_3 = 12$$
$$\ldots$$

എന്നിങ്ങനെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കിട്ടും.

ശ്രേണിയിലെ 100-ാം പദം

$$x_{100} = 400$$

എന്നു നേരിട്ടു കണക്കാക്കുകയുമാവാം.

ചുറ്റളവിനു പകരം പരപ്പളവെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണി ഇങ്ങനെയാണ്.

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

ഇതിൽ, സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

ഓരോ പദവും സ്ഥാനത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു വര വശമായ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ശ്രേണി വരയ്ക്കാം.

A, B എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം, Input Bar ൽ

Sequence [Polygon [A, B, n], n, 3, 10]

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ മതി. n എന്ന സംഖ്യ, 3 മുതൽ 10 വരെ മാറ്റുക, അതിനൊപ്പം AB ഒരു വശമായി n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഈ നിർദ്ദേശത്തിന്റെ അർഥം.

ബഹുഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നായി വരയ്ക്കാൻ m എന്ന പേരിലൊരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കി, വരയ്ക്കാനുള്ള നിർദ്ദേശം ഇങ്ങനെ മാറ്റുക.

Sequence [Polygon [A, B, n + 2], n, 1, m]

Slider നീക്കി m എന്ന സംഖ്യ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച്, 3, 4, 5, വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഇതിന്റെയർഥം.

ഇതിൽ n + 2 നുപകരം 2n എന്നെഴുതിയാൽ, ഏതുതരം ബഹുഭുജങ്ങളാണ് കിട്ടുക?

2n + 1 ആക്കിയാലോ?

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാലോ?

$$x_n = n^2$$

ഈ സമചതുരങ്ങളുടെ വികർണങ്ങളുടെ നീളവും ഒരു ശ്രേണിയായി എഴുതാമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്? എഴുതി നോക്കൂ.

വശങ്ങളുടെ നീളം അര സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടി ശ്രേണികളുണ്ടാക്കിയത് നോക്കാം.

വശം	1,	$1\frac{1}{2}$,	2,	$2\frac{1}{2}$,	...
ചുറ്റളവ്	4,	6,	8,	10,	...
പരപ്പളവ്	1,	$2\frac{1}{4}$,	4,	$6\frac{1}{4}$,	...
വികർണം	$\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$\frac{5}{2}\sqrt{2}$,	...

വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും? അതിന് ആദ്യം ഈ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ എഴുതിനോക്കാം.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$$

ഇതിൽ പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളുമുണ്ട്. ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ഛേദം 2 ആണ്. പൂർണസംഖ്യകളെയും ഛേദം 2 ആയ ഭിന്നസംഖ്യകളായി എഴുതിയാലോ?

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$$

അംശങ്ങളുടെ ശ്രേണി

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമെന്താണ്? എഴുതിനോക്കൂ.

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ ശ്രേണി, ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എങ്ങനെയെഴുതാം?

n-ാം ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം s_n എന്നെഴുതിയാൽ

$$s_n = \frac{n+1}{2}$$

ഇതുതന്നെ

$$s_n = \frac{1}{2}(n+1)$$

എന്നുമെഴുതാം.

ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമോ?

വശത്തിന്റെ നീളത്തെ നാലുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ ചുറ്റളവ്. അപ്പോൾ ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$p_n = 4 \times \frac{1}{2}\ (n+1) = 2\ (n+1)$$

ഉദാഹരണമായി, ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം

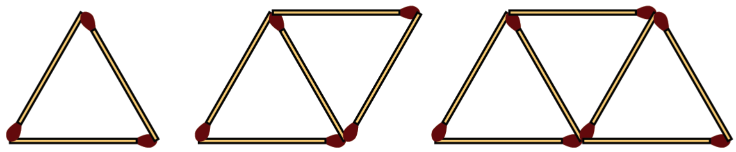
$$s_{25} = \frac{1}{2} \times (25+1) = 13$$

50-ാം സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

$$p_{50} = 2 \times (50+1) = 102$$

ഇതുപോലെ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണിയുടെയും, വികർണങ്ങളുടെ ശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതിനോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:



ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു തീപ്പെട്ടിക്കോല്, രണ്ടെണ്ണമുണ്ടാക്കാൻ അഞ്ചു കോല്, മൂന്നെണ്ണത്തിന് ഏഴു കോല്.

ഇങ്ങനെ നാലു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം? അഞ്ചു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാനോ?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു കോല്, തുടർന്ന് ഓരോ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കാനും രണ്ടുകോല് വീതം മതി. അങ്ങനെ കോലുകളുടെ എണ്ണം

$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

എന്ന ശ്രേണിയായി എഴുതാം.

10 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലുവേണം?

ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്, ബാക്കി 9 ത്രികോണത്തിനു 2 വീതം, $9 \times 2 = 18$ ആകെ $3 + 18 = 21$

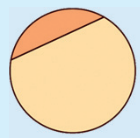
100 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

$3 + (99 \times 2) = 201$

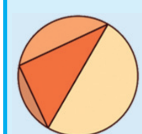
ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

n ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെ എഴുതാം?

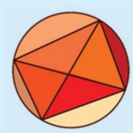
വൃത്തവിഭജനം



ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വര കൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:



നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളേയും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

ആദ്യത്തെ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ 3 കോലും, ബാക്കി $n - 1$ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $2(n - 1) = 2n - 2$ കോലും ;

ആകെ വേണ്ട കോല് $3 + 2n - 2 = 2n + 1$

അതായത്, n ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട കോലുകളുടെ എണ്ണം

$$x_n = 2n + 1$$

ഇതാണ് 3, 5, 7, ... എന്നിങ്ങനെ 3 നോട് 2 കൂട്ടി തുടരുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം. ഇതിൽനിന്ന്, 500 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണമെന്ന് എളുപ്പം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$x_{500} = (2 \times 500) + 1 = 1001$$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, അതിലെ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 1 സെ.മീ, 2 സെ.മീ, 3 സെ.മീ, ... എന്നിങ്ങനെയായ ഇരുമ്പു സമചതുരക്കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായെഴുതുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 7.8n^3$$

ഇത്തരം നൂറു കട്ടകളുടെ ഭാരം ക്രമമായി എഴുതിക്കിട്ടാൻ, പൈഥൻ ഭാഷയിൽ (python 3)

```
for n in range (1,101):
    print (7.8*n**3)
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി. ഇതുതന്നെ weights.py എന്ന പേരിൽ ഒരു പ്രോഗ്രാമായി എഴുതി

```
python3.2 weights.py > weights.txt
```

എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി weights.txt എന്ന file ൽ എഴുതിക്കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

?

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഓരോന്നിന്റെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

ii) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

iii) 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

iv) 1 ലോ 6 ലോ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

(2) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ അകക്കോണുകളുടെ തുക, പുറംകോണുകളുടെ തുക, ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്, ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ് എന്നീ ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(3) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ

ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽനിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

i) ഓരോ ചിത്രത്തിലും എത്ര ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്?

ii) ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1 എന്നെടുത്ത്, ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

iii) ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ ആകെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

iv) ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഈ മൂന്നു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

സമാന്തരശ്രേണികൾ

വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 2, 3, 4, ... ആയ സമചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ

4, 8, 12, 16, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടി. ഇവിടെ വശങ്ങളുടെ നീളം 1 വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് 4 വീതം കൂടുന്നു. വശങ്ങളുടെ നീളം $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \ldots$ എന്നെടുത്താലോ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{1}{2}$ വീതം കൂടുന്നതിനാൽ, ചുറ്റളവ് $4 \times \frac{1}{2} = 2$ വീതം കൂടുന്നു. കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

4, 6, 8, 10, ...

ഇനി തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കിയ കണക്കു നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോല്; തുടർന്നുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിനും 2 വീതം കൂടുന്നു. അങ്ങനെ 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 2 കൂട്ടി

3, 5, 7, 9, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടുന്നു.

ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയ്ക്ക്, സമാന്തരശ്രേണി (arithmetic sequence) എന്നാണ് പേര്.

രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2}, \dots$$

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ. ഇതുമൊരു സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ. 1 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, $\frac{1}{2}$ ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നു.

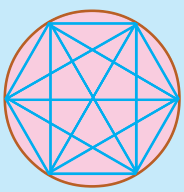
ബഹുഭുജങ്ങളുടെ പുറംകോണുകളുടെ തുകയായി കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

$$360, 360, 360, \dots$$

എന്നാണല്ലോ. ഇതും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. 360 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നു. വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടുന്നു.

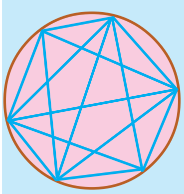
നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തവിഭജനം** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചുനോക്കിയാലോ?



ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം.

ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം.



പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ n ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും 2^{n-1} എന്ന വാചകത്തിലും $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, 1, 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

ഒരു നേർവരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്മേൽ സഞ്ചാരത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ നിശ്ചിതബലം പ്രയോഗിച്ച്, ഓരോ സെക്കന്റിലും 2 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയ്ക്കുന്നു. ഓരോ സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോഴുമുള്ള വേഗം

$$10, 8, 6, \dots$$

എന്ന ശ്രേണിയിലാണല്ലോ.

ഇവിടെ 10 ൽ നിന്ന് 2 തുടരെ കുറച്ചാണ് ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്. ഇതും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയായാണ് കണക്കാക്കുന്നത്. ഇത്തരം ശ്രേണികളെയും ഉൾക്കൊള്ളാൻ, ഒന്നുകിൽ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ നിർവചനത്തിൽ “ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുക” എന്നതിനെ “ഒരേ സംഖ്യ തുടരെ കൂട്ടുകയോ തുടരെ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക” എന്നു മാറ്റാം. അല്ലെങ്കിൽ “2 കുറയ്ക്കുക എന്നാൽ, −2 കൂട്ടുക” എന്ന് ഗണിതഭാഷയിലൂടെ ന്യായീകരിക്കാം.

സമാന്തരശ്രേണികളെ മറ്റൊരുതരത്തിലും വിവരിക്കാം. ഇത്തരമൊരു ശ്രേണിയിൽ, ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടു മുന്നിലുള്ള പദത്തിലെത്താൻ ഒരേ സംഖ്യയാണല്ലോ കൂട്ടേണ്ടത്. അപ്പോൾ ഏതു പദത്തിൽനിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഈ സംഖ്യതന്നെയാണ്.

ഏത് പദത്തിൽനിന്നും തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യതന്നെകിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമാന്തരശ്രേണി.

ഒരു പദത്തിൽനിന്ന് തൊട്ടുപുറകിലെ പദം കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ഈ സ്ഥിരവ്യത്യാസത്തെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ **പൊതുവ്യത്യാസം (common difference)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പലപ്പോഴും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നത്, പദവ്യത്യാസം സ്ഥിരമാണോ എന്നു നോക്കിയാണ്. ഉദാഹരണമായി, 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$3, 6, 9, \ldots$$

3 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 3 തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇത് പൊതുവ്യത്യാസം 3 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ഇനി ഈ ഗുണിതങ്ങളോരോന്നിനോടും 1 കൂട്ടിയാലോ?

$$4,\ 7,\ 10, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഇതും 3 പൊതുവ്യത്യാസമായ സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ.

ഇനി 3 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി നോക്കൂ:

$$3,\ 9,\ 27, \ldots$$

$9 - 3 = 6$ ഉം $27 - 9 = 18$ ഉം; അതായത്, അടുത്തടുത്ത പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരേ സംഖ്യയല്ല.

ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുമല്ല.

ഇനി ഇതുവരെ കണ്ട ശ്രേണികളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കി, അവയിലെ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

?

(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളോരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു തീരുമാനിക്കുക. കാരണം എഴുതണം. സമാന്തരശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, പൊതുവ്യത്യാസവും എഴുതണം.

i) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

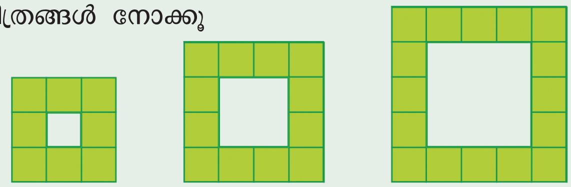
ii) ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

iii) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പകുതിയായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

iv) 2 ന്റെ കൃതികളുടെ ശ്രേണി

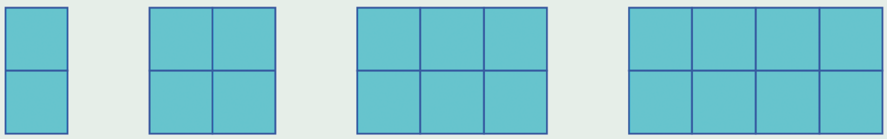
v) എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ ശ്രേണി

(2) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ



ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങളിലെ നിറം കൊടുത്ത ചെറു സമചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.



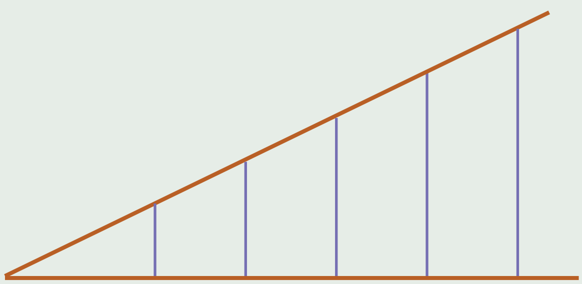
i) ഓരോ ചതുരത്തിലും എത്ര ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

ii) എത്ര വലിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

iii) ആകെ എത്ര സമചതുരങ്ങളുണ്ട്?

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണി യാണോ?

(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് താഴത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത്.



ഇങ്ങനെ തുടരുന്ന ലംബങ്ങളുടെ നീളം സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = n^3 - 6n^2 + 13n - 7$$

ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

സ്ഥാനവും പദവും

1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

എളുപ്പമല്ലേ? 1 ൽ നിന്ന് 11 ൽ എത്താൻ 10 കൂട്ടണം. തുടർന്നും 10 തന്നെ കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ സമാന്തരശ്രേണി ആകും.

1, 11, 21, 31, ...

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം : 1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ?

ഇങ്ങനെയൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ; അതു നമുക്കറിയില്ല. ഒരിക്കൽകൂടി പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയായ 11 കിട്ടണം.

അതായത്, 1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 11 കിട്ടേണ്ടത്.

അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ് 10; പൊതുവ്യത്യാസം 5

ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ.

$$1, 6, 11, 16, 21, \dots$$

3-ാം പദം 37 ഉം, 7-ാം പദം 73 ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയോ?

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 7-ാം പദത്തിലെത്താൻ പൊതുവ്യത്യാസം $7 - 3 = 4$ തവണ കൂട്ടണം. കൂട്ടിയ സംഖ്യ $73 - 37 = 36$

അപ്പോൾ, പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 4 മടങ്ങ്, 36; പൊതുവ്യത്യാസം $36 \div 4 = 9$

ആദ്യപദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് രണ്ടുതവണ പൊതുവ്യത്യാസം കുറയ്ക്കണം, അതായത് $37 - (2 \times 9) = 19$

ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടേയും പൊതുവ്യത്യാസം 2 തന്നെ.

2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (അഥവാ, ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽ സംഖ്യകളാണല്ലോ, ഇരട്ട സംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റസംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തര ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിലോ?

ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഒരു ശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതിനാൽ, ഈ പദങ്ങളെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനി ശ്രേണി ആദ്യം മുതൽ എഴുതാമല്ലോ:

$$19, 28, 37, \dots$$

ഈ ശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

പല വഴികളുണ്ട്

3-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 3) = 22$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$37 + (22 \times 9) = 235$$

2-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 2) = 23$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$28 + (23 \times 9) = 235$$

1-ാം പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ $(25 - 1) = 24$ മടങ്ങ് കൂട്ടാം:

$$19 + (24 \times 9) = 235$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടു പദങ്ങളും അവയുടെ പദസ്ഥാനങ്ങളും അറിഞ്ഞാൽ ശ്രേണി മുഴുവൻ കണക്കാക്കാം. അതിനുപയോഗിക്കുന്ന തത്വം എന്താണ്?

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം, അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങളുടെ വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം:

സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പദവ്യത്യാസം, സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതികസ്ഥിരം പൊതുവ്യത്യാസവും.

ഒരു സംഖ്യ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി നേരത്തെ എഴുതിയ ഒരു ശ്രേണി നോക്കാം;

$$19, \; 28, \; 37, \ldots$$

ഇതിലെ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ. മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയും ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 9 ന്റെ ഗുണിതമായാലോ?

ഉദാഹരണമായി 1000 എന്ന സംഖ്യയും, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 19 ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $1000 - 19 = 981 = 109 \times 9$. ഇത് 9 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. അപ്പോൾ ആദ്യപദമായ 19 ന്റെ കൂടെ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 109 മടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 1000 കിട്ടുന്നത്. അതിനാൽ 1000 ഈ ശ്രേണിയിലെ 110-ാം പദമാണ്.

ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം? കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

ഈ ശ്രേണികൾ നോക്കൂ:

$$x_n = 2n - 1$$
$$x_n = n^2 - n + 1$$
$$x_n = n^3 - 3n^2 + 4n - 1$$

എല്ലാറ്റിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ 1, 3 തന്നെയല്ലേ?

10 ന്റെ ഏതു കൃതിയും 19, 28, 37, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ?

(1) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) 24, 42, ◯, ◯, ... ii) ◯, 24, 42 , ◯, ...

iii) ◯, ◯, 24, 42, ... iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

v) ◯, 24, ◯, 42, ... vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

(2) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുള്ള പദങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചുപദങ്ങൾ എഴുതുക.

i) 3-ാം പദം 34
6-ാം പദം 67

ii) 3-ാം പദം 43
6-ാം പദം 76

iii) 3-ാം പദം 2
5-ാം പദം 3

iv) 4-ാം പദം 2
7-ാം പദം 3

v) 2-ാം പദം 5
5-ാം പദം 2

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 5-ാം പദം 38, 9-ാം പദം 66; 25-ാം പദം എന്താണ്?

(4) 13, 24, 35 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 101 ഒരു പദമാണോ? 1001 ആയാലോ?

(5) 7 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 3 ശിഷ്ടം വരുന്ന മൂന്നക്കസംഖ്യകൾ എത്രയുണ്ട്?

(6) ചുവടെയുള്ള ചതുരത്തിൽ, ഓരോ വരിയിലും ഓരോ നിരയിലും സമാന്തരശ്രേണി ആകുന്നവിധത്തിൽ ഒഴിഞ്ഞ കളങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

1			4
7			28

1, 4, 28, 7 എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് പകരം മറ്റേതെങ്കിലും നാല് സംഖ്യകൾ എഴുതിയാലോ?

(7) പട്ടികയിൽ ചില സമാന്തരശ്രേണികളും, ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും നേരെ രണ്ടുസംഖ്യകളും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകളോരോന്നും അതത് ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ടാകുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ശ്രേണി	സംഖ്യ	ഉണ്ട്/ഇല്ല
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

ഏറ്റവും ലളിതമായ സമാന്തരശ്രേണി, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണ്. ഇതിന്റെ പല സവിശേഷതകളും ഏഴും എട്ടും ക്ലാസുകളിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

$$1 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$$

$$2 + 3 + 4 = 9 = 3 \times 3$$

$$3 + 4 + 5 = 12 = 3 \times 4$$

അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക, നടുവിലത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങ് ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

ഇതു മനസ്സിലാക്കാൻ, അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നടുവിലത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - 1$; മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ $x + 1$. ഇവയുടെ തുക

$$(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$$

ഇത് നടുവിലത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണല്ലോ.

ഇക്കാര്യം തുടർച്ചയായ ഒറ്റ സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകുമോ?

ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്കോ?

ഇനി ഏതെങ്കിലുമൊരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നുപദങ്ങളെടുത്താലോ?

ഉദാഹരണമായി, ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കൂ:

$$2, 7, 12, 17, \ldots$$

ഇതിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളാണ് 37, 42, 47

ഇവയുടെ തുക

$$37 + 42 + 47 = 126$$

ഇത് 42 ന്റെ മൂന്നു മടങ്ങ് തന്നെയല്ലേ?

എല്ലാ സമാന്തരശ്രേണികളിലും ഇത് ശരിയാകുമോ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം:

ഏതെങ്കിലുമൊരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളിൽ നടുവിലെ പദം x എന്നെടുക്കാം.

അപ്പുറത്തുമിപ്പുറത്തുമുള്ള പദങ്ങൾ എഴുതാൻ പൊതുവ്യത്യാസമറിയണം.

പൊതുവ്യത്യാസം y എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x - y$; മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ $x + y$; മൂന്നു സംഖ്യകളുടെയും തുക

$$(x - y) + x + (x + y) = 3x$$

അപ്പോൾ ഇത് എല്ലാ സമാന്തരശ്രേണികളുടെയും ഒരു സവിശേഷതയാണ്:

> ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. ആദ്യപദവും, നടുവിലെ പദവും, മൂന്നാം പദവും കൂട്ടിയപ്പോൾ, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായി, അപ്പോൾ ആദ്യപദവും അവസാനപദവും മാത്രം കൂട്ടിയാൽ നടുവിലെ പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണ്ടേ? (ഒരു സംഖ്യയും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങും ചേർന്നതാണല്ലോ മൂന്നു മടങ്ങ്)

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം:

> ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും അടുത്തടുത്ത മൂന്നു പദങ്ങളെടുത്താൽ ആദ്യപദത്തിന്റെയും അവസാനപദത്തിന്റെയും തുകയുടെ പകുതിയാണ് നടുവിലെ പദം.

ഈ കാര്യങ്ങൾ ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാം.

> x, y, z ഇവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത പദങ്ങളാണെങ്കിൽ
>
> - $x + y + z = 3y$
> - $y = \frac{1}{2}(x + z)$

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത അഞ്ചു പദങ്ങളെടുത്താൽ, അവയുടെ തുകയെക്കുറിച്ചും, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുകയെക്കുറിച്ചും എന്തു പറയാം? ഏഴു പദങ്ങളായാലോ? ഇതിൽനിന്നെല്ലാം കിട്ടുന്ന പൊതുവായ നിഗമനം എന്താണ്?

ഇനി ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം നോക്കാം. ആദ്യം

$$19, 28, 37, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാകാം. ഇതിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദം കണക്കാക്കാൻ, ഒന്നാംസ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം, പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒന്നാംപദമായ 19 നോട് കൂട്ടണം. ഉദാഹരണമായി, ഇതിലെ 15-ാം പദത്തിന് ഒന്നാംസ്ഥാനവുമായുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $15 - 1 = 14$; അപ്പോൾ 15-ാം പദം കണക്കാക്കാൻ ആദ്യപദമായ 19 നോട് പൊതുവ്യത്യാസമായ 9 ന്റെ 14 മടങ്ങ് കൂട്ടിയാൽ മതി.

$$15\text{-ാം പദം } \; 19 + (14 \times 9) = 145$$

ഇരുപതാം പദമോ?

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ n എന്നെടുത്താലും, n-ാം പദം

$$19 + (n - 1) \times 9 = 9n + 10$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 9n + 10$$

ഇനി

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണി ആയാലോ?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ ആലോചിച്ചാൽ, n-ാം പദം

$$\frac{1}{2} + (n - 1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

അതായത്, ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{1}{4}(n + 1)$$

ആദ്യത്തെ ശ്രേണിയിൽ, സ്ഥാനസംഖ്യയായ n നെ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 10 കൂട്ടുന്നു; രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിൽ, $\frac{1}{4}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $\frac{1}{4}$ കൂട്ടുന്നു.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഈ രൂപത്തിലാണോ?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുത്താൽ, അതിലെ n-ാം പദം

$$f + (n - 1)\, d = dn + (f - d)$$

അതായത്, n നെ d എന്ന സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.

അപ്പോൾ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം, സ്ഥാന സംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ്. അതായത്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

മറിച്ച്, $x_n = an + b$ എന്ന ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാകുമോ?

ഇതിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ടു പദവും $an + b$, $a(n + 1) + b$ എന്നതായിരിക്കുമല്ലോ; ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$a(n + 1) + b - (an + b) = a$$

അതായത്, അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടെയും വ്യത്യാസം a തന്നെ ആണ്.

അതിനാൽ ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ a, b നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണ്. മറിച്ച് ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഏത് ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.

$x_n = an + b$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, പൊതുവ്യത്യാസം a ആണെന്നും കാണാം.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടർച്ചയായി $\frac{1}{3}$ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

ജിയോജിബ്രയിൽ A എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി

Sequence [Circle [A, n], n, 1, 10]

എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ, A കേന്ദ്രവും, ആരം 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ആയ വൃത്തങ്ങൾ കിട്ടും. വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം മാറ്റാൻ, m എന്ന ഒരു integer slider ഉണ്ടാക്കി, നിർദേശം മാറ്റിയാൽ മതി:

Sequence [Circle [A , n], n, 1, m]

ഇനി ഇതിലെ n നു പകരം 2n എന്നോ 2n + 1 എന്നോ മാറ്റി, ആരങ്ങൾ ഇരട്ടസംഖ്യകളോ, ഒറ്റസംഖ്യകളോ മാത്രമാക്കാം.

Min = 0 ആയി a, b എന്ന രണ്ടു Slider ഉണ്ടാക്കി നിർദേശം

Sequence [Circle [A , an + b], n, 1, m]

എന്നാക്കിയാൽ, a, b മാറ്റി, ആരങ്ങൾ പല സമാന്തരശ്രേണിയിലാക്കാം.

ഒരു സമഷഡ്ഭുജം വരച്ച്, അതിന്റെ മൂലകളിലെല്ലാം ഇത്തരം വൃത്തശ്രേണികൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $\frac{1}{3}n + b$ എന്നാണ്. ഇതിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യപദം $\frac{1}{3} + b$ അപ്പോൾ

$$\frac{1}{3} + b = \frac{1}{2}$$

എന്നും അതിൽ നിന്ന്

$$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

എന്നും കാണാം. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

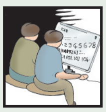
എന്നും കിട്ടും.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം ഭിന്നസംഖ്യയായി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x_n = \frac{2n+1}{6}$$

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റു ചിലകാര്യങ്ങളും മനസ്സിലാക്കാം. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം അംശം ഒറ്റസംഖ്യയും, ഛേദം 6 ഉം ആണ്. ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കൊന്നും 2 ഘടകമല്ല; അതിനാൽ 6 ഉം ഘടകമല്ല. അപ്പോൾ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും എണ്ണൽ സംഖ്യ അല്ല.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിൽ എണ്ണൽ സംഖ്യകളൊന്നുമില്ല.



(1) ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 30 ആകുന്ന മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദം 1 ഉം, ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു പദങ്ങളെടുത്താലും രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക, നടുക്കുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ആയ നാല് സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(5) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 12 ഉം, 12-ാം പദം 8 ഉം ആണ്. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എന്താണ്?

(6) എട്ടാംക്ലാസ്സിലെ പക്ഷിക്കണക്ക് (**സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം) അൽപമൊന്നുമാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കാം.

പക്ഷി പറഞ്ഞു.

"ഞങ്ങളും, ഞങ്ങളോളവും, ഞങ്ങളിൽ പകുതിയും, അതിൽ പകുതിയും ഒന്നും ചേർന്നാൽ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാകും"

പക്ഷികളുടെ എണ്ണമാകാവുന്ന സംഖ്യകൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക. എണ്ണം ഇതിലെ ഓരോ സംഖ്യയാകുമ്പോഴും പക്ഷി പറഞ്ഞ തുകയും ക്രമമായെഴുതുക.

ഈ രണ്ടു ശ്രേണികളുടെയും ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(7) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{6}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(8) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{2}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഇല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

(9) 4, 7, 10, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ ഈ ശ്രേണിയിൽ തന്നെ ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

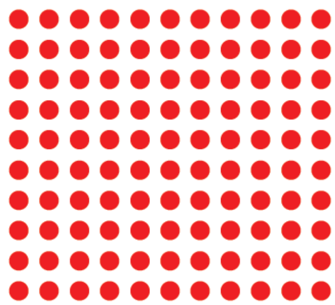
(10) 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂർണവർഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

(11) ഒരു പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്. അതിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിന്റെ വലുപ്പം 36° യിൽ കൂടുതലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(12) $\frac{11}{8}, \frac{14}{8}, \frac{17}{8}, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പൂർണ്ണസംഖ്യാപദങ്ങളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഇത് സമാന്തരശ്രേണി ആണോ?

തുകകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ചിത്രത്തിൽ ആകെ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോന്നായി എണ്ണേണ്ട കാര്യമില്ലല്ലോ. ഓരോ വരിയിലും 11, അങ്ങനെ 10 വരികൾ; ആകെ $10 \times 11 = 110$

ഈ ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോ വരിയായി എണ്ണിയെടുക്കാം:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

ഇതിനും എളുപ്പവഴി വല്ലതുമുണ്ടോ?

ഇതിനെ ചതുരമാക്കിയാലോ?

നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

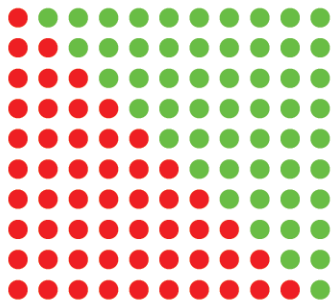
ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു.

എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലേയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ.

അതിന് ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.

ഇത് തലകീഴായി, ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക.



ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടില്ലേ? നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രെ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നുതന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ. ആകെ തുക

$50 \times 101 = 5050$

ഈ ചതുരത്തിൽ, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $10 \times 11 = 110$ പൊട്ടുകളുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണത്തിലോ? 110 ന്റെ പകുതി 55

ചിത്രമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുക്കാം. തുക തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$$

അപ്പോൾ

$$s = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ഇതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും കൂട്ടിയെടുക്കാമല്ലോ

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned} 2s &= \overbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 + 101}^{100 \text{ എണ്ണം}} \\ &= 100 \times 101 \end{aligned}$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 നു പകരം ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്,

ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവസാന സംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം. എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകൾ

$$2, 4, 6, \ \ldots, \ 2n$$

ഇവയുടെ തുക

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n\,(n + 1)$$

ഇതുപോലെ 3 ന്റെ ആദ്യത്തെ n ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാം.

$$x_n = 2n - 1$$

ഇതിൽ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി കിട്ടും. അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$x_1 = (2 \times 1) - 1$$
$$x_2 = (2 \times 2) - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = (2 \times n) - 1$$

ഇവയെല്ലാം മുകളിൽ നിന്ന് താഴോട്ട് കൂട്ടിയാലോ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= 2\,(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ഇതിൽ

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\,(n + 1)$$

എന്നത് ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \times \frac{1}{2}\, n\,(n + 1) - n = n^2$$

എന്നു കാണാം.

അതായത്, 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ഇത് ഏഴാം ക്ലാസ്സിൽ, **വർഗവും വർഗമൂലവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **പൂർണ വർഗങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോളതിന്റെ ഗണിതപരമായ തെളിവുമായി.

ഇതുപോലെ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുക കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നെഴുതി, കൂട്ടാം.

$$x_1 = a + b$$
$$x_2 = 2a + b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = na + b$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \ldots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= a\,(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= a\ \frac{n\,(n+1)}{2} + nb$$

$$= \frac{1}{2}an\,(n + 1) + nb$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

ആണെങ്കിൽ, അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}an\,(n+1) + nb$$

ഉദാഹരണമായി

$$1, 4, 7, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് നോക്കാം. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 3n - 2$$

അപ്പോൾ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 100 \times 101 + \left(100 \times (-2)\right) = 14950$$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 3 \times n\,(n + 1) - 2n = \frac{1}{2}\,(3n^2 - n)$$

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം.

$$\frac{1}{2}an\,(n + 1) + nb = \frac{1}{2}n\,\left(a\,(n + 1) + 2b\right)$$

$$= \frac{1}{2}n\,\left((an + b) + (a + b)\right)$$

ഇതിൽ $an + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ n-ാംപദമായ x_n ഉം, $a + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദമായ x_1 ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ

വർഗങ്ങളുടെ തുക

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നതും ഒരു സർവസമവാക്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ എന്നെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + \frac{3}{2}\,n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\,\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}\,n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)\,(2n+1)$$

എന്നാക്കാം.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2} n (x_n + x_1)$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇതനുസരിച്ച് 1, 4, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം 100-ാം പദം കണക്കാക്കുക.

$$1 + (99 \times 3) = 298$$

ഇനി ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (298 + 1) = 14950$$

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് ഒരു ബീജഗണിതരൂപമുണ്ട്. ഇതു കാണാൻ, തുക ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$\frac{1}{2} an (n + 1) + nb = \frac{1}{2} an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right) n$$

ഇതിൽ $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{2}a + b$ എന്നിവ ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ തുക, n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയതാണ്.

അതായത്, ഏത് സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $pn^2 + qn$ എന്നാണ്.

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ പൈഥൺ ഭാഷയിലെ sum ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ നൂറു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി.

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

i) 11, 22, 33, ... ii) 12, 23, 34, ... iii) 21, 32, 43, ...

iv) 19, 28, 37, ... v) 1, 6, 11, ...

(2) 6, 10, 14, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും അടുത്ത 20 പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

(3) 6, 10, 14, ..., എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും 15, 19, 23, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

(4) ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) $5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times ... \times 5^{2n} = (0.008)^{-30}$ എന്ന സമവാക്യത്തിലെ n കണ്ടുപിടിക്കുക.

(6) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $n^2 + 2n$ ii) $2n^2 + n$ iii) $n^2 - 2n$

iv) $2n^2 - n$ v) $n^2 - n$

(7) ചുവടെയുള്ള സമാന്തരശ്രേണികളുടെ തുകകൾ, മനസിൽ കണക്കാക്കുക.

i) $51 + 52 + 53 + ... + 70$

ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

(8) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങളുടെ തുക 350 ഉം ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(9) 16, 24, 32, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറെ പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാണെന്ന് സമർഥിക്കുക.

(10) 4

7 10

13 16 19

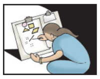
22 25 28 31

....

....

....

മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ട് വരികൾ എഴുതുക. 20-ാം വരിയിലെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

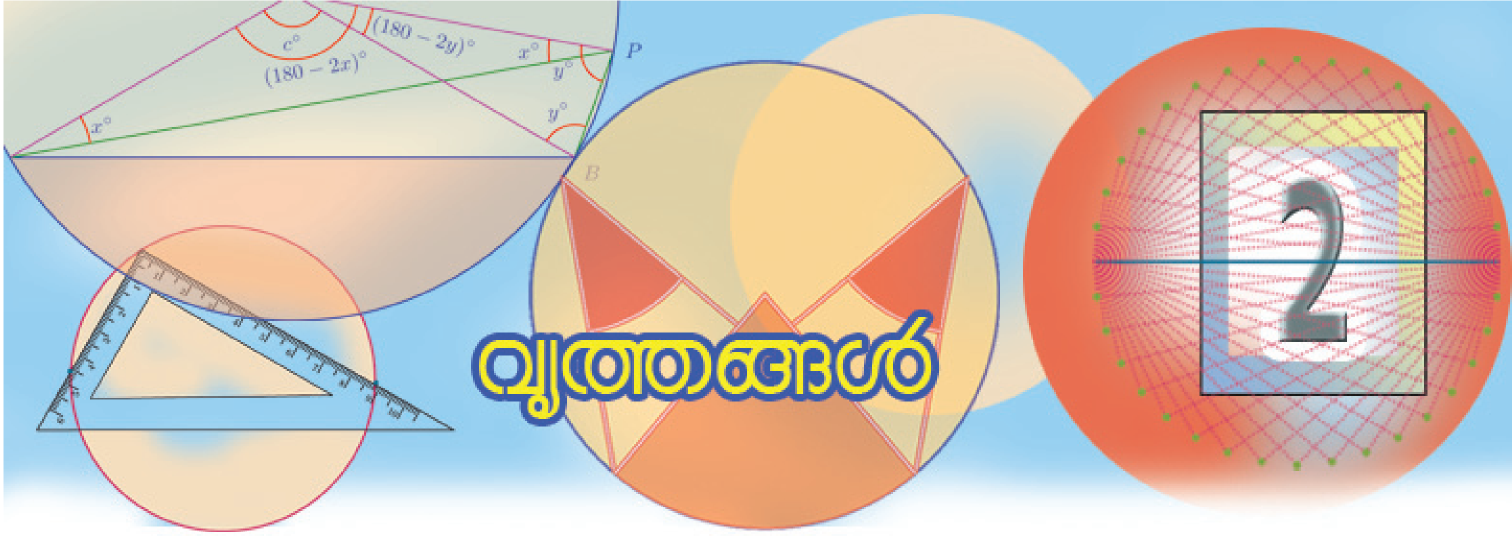


ഗവേഷണം

- ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ കൃതികളെല്ലാം അതിലെതന്നെ പദങ്ങളായ സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ആദ്യത്തെ പദം മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും, പൂർണവർഗങ്ങൾ കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

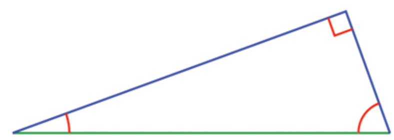
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ശ്രേണികളുടെ നിയമം മനസിലാക്കി അവയുടെ ബിജഗണിതരൂപം എഴുതുന്നു.			
• വിവിധ ശ്രേണികളിൽ നിന്ന് സമാന്തരശ്രേണികളെ തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളും, പദസ്ഥാനങ്ങളും, പൊതുവ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രൂപീകരിക്കുന്നു.			
• സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ മനസിലാക്കുകയും ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			



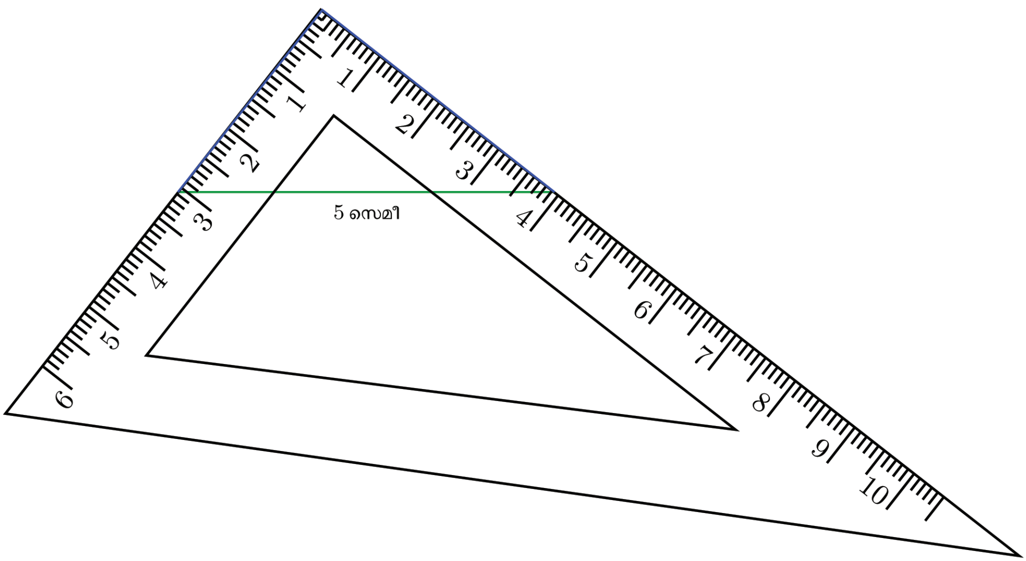
വൃത്തങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കർണം 5 സെന്റിമീറ്റർ വേണം. ലംബവശങ്ങൾ എന്തുമാകാം. എങ്ങനെയെല്ലാം വരയ്ക്കാം?

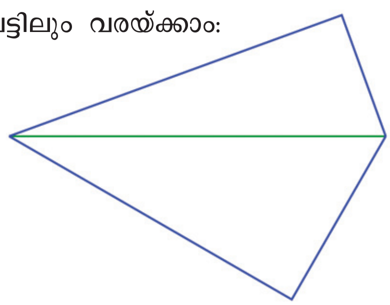
5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഇഷ്ടമുള്ള ഒരു കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത്, 90° യിൽ നിന്നു ഇതു കുറച്ച കോണും വരച്ച്, ത്രികോണമാക്കാം:



മട്ടം ഉപയോഗിച്ചും വരയ്ക്കാം: മട്ടമൂല മുകളിൽ വരുന്നവിധം, അതിന്റെ അരികുകൾ രണ്ടും വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ചേർത്തുവച്ച് ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ:

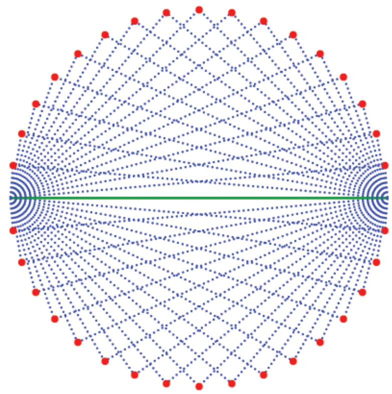


വരയുടെ ചുവട്ടിലും വരയ്ക്കാം:



ഇത്തരം കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ മാത്രം നോക്കൂ:

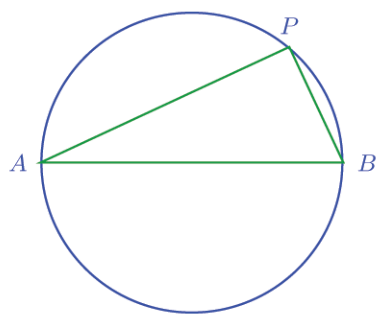
എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായത്? ആലോചിച്ചു നോക്കാം.



മട്ടത്രികോണങ്ങളിലൂടെ വൃത്തമുണ്ടായിവരുന്നത്, ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചു ഭംഗിയായി കാണാം. ആദ്യം Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. ഇനി 0 മുതൽ 180 വരെ 5 ഇട വിട്ട് മാറുന്ന a എന്ന Slider ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച്, വരയുടെ ഇടതറ്റത്ത് a° അളവിൽ counter clockwise ആയും, വലത് $(90 - a)^\circ$ അളവിൽ clockwise ആയും, കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി Line ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ വരകൾക്കും, മുകളിലെ മൂലയ്ക്കും Trace On കൊടുത്ത്, Slider ന് Animation On കൊടുക്കുക.

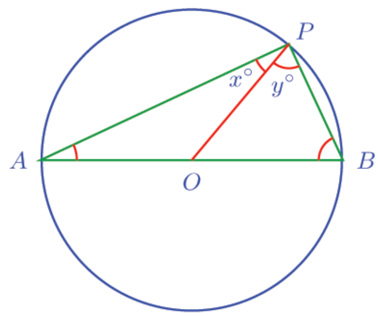
മട്ടവും വൃത്തവും

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച് എട്ടാം ക്ലാസിൽ **തുല്യ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചർച്ച ചെയ്തത് ഓർമയുണ്ടോ?

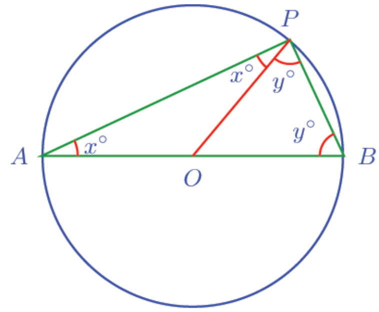


P യിലെ കോൺ മട്ടമാണെന്ന് തെളിയിച്ചത് എങ്ങനെയാണ്?

P യും, വൃത്തകേന്ദ്രം O യും യോജിപ്പിക്കുക. ഇപ്പോൾ P യിലെ കോൺ രണ്ടായി മുറിഞ്ഞു:



ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതുമുള്ള ചെറിയ ത്രികോണങ്ങൾ AOP യും BOP യും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് (കാരണം?). അപ്പോൾ A യിലെ കോൺ x° യും B യിലെ കോൺ y° യും ആണ്.



ABP എന്ന വലിയ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ

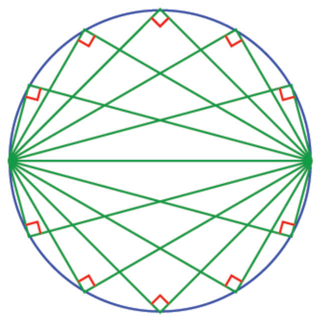
$$x + y + (x + y) = 180$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + y = 90$$

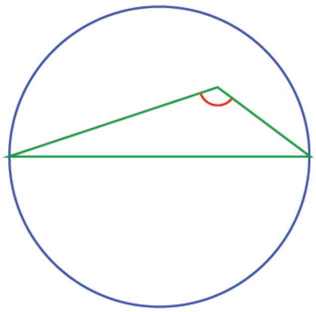
എന്നു കാണാം.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും കിട്ടുന്നത് മട്ടകോണാണ്.



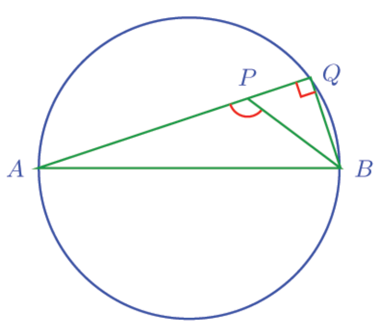
ഇതൽപം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെയും പറയാം:

അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ്.



ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെതന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴാണ് മട്ടകോൺ കിട്ടിയത്. വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ഒരു വര നീട്ടി, വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക; ആ ബിന്ദു, വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

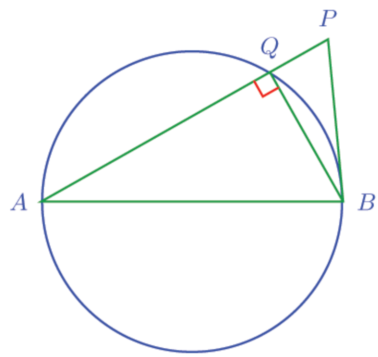


ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ P യിലെ പുറംകോണാണ് APB. ഇത്, ത്രികോണത്തിലെ Q വിലേയും, B യിലേയും അകക്കോണുകളുടെ തുകയാണല്ലോ.

ഇതിൽ Q വിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ?

ഇനി വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു ആയാലോ?

ഇപ്പോൾ ΔPQB യിൽ, $\angle APB$ യാണ് അകക്കോൺ; മട്ടകോണായ AQB പുറംകോണും. അപ്പോൾ $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ ചെറുതാണെന്നു വന്നില്ലേ?



ഇനി, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഏതോ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിനകത്താകില്ല (അകത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലല്ലേ?); വൃത്തത്തിനു പുറത്തുമല്ല (പുറത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ). അതിനാൽ ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് വൃത്തത്തിലായിരിക്കും.

ഇതൽപം മാറ്റി വൃത്തം അവസാനമാക്കാം.

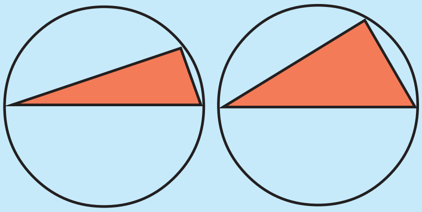
ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്ന് പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകളെല്ലാം ആ വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ചേർത്ത്, ആദ്യം വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടിയത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലേ?

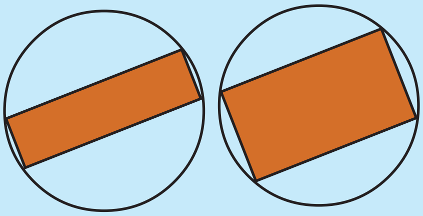
ഇനി വൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ വൃത്തത്തെ മുറിച്ച് കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാകുമോ?

സമചതുരവിശേഷം

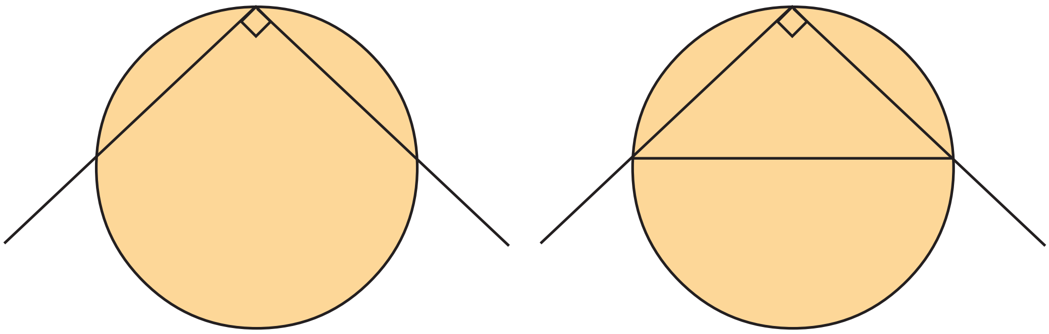
വൃത്തത്തിലെ വിവിധ ബിന്ദുക്കൾ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച്, വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാമല്ലോ:



ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, മുകളിലെ ബിന്ദു ഏതു സ്ഥാനത്തെടുക്കുമ്പോഴാണ്? അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലായ പലപല ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.



ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?



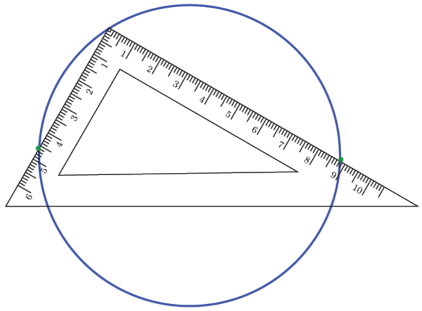
ഇപ്പോൾ ഒരു മട്ടത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമായി. മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം കർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ?

അപ്പോൾ താഴത്തെ വര വ്യാസമാണ്.

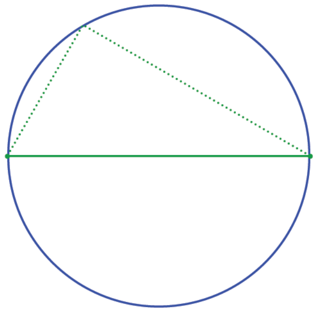
ഇനി, ഈ തത്വങ്ങളുടെ ഒരു പ്രയോഗം നോക്കാം:

വളയോ, പാത്രത്തിന്റെ അടപ്പോ ഉപയോഗിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ?

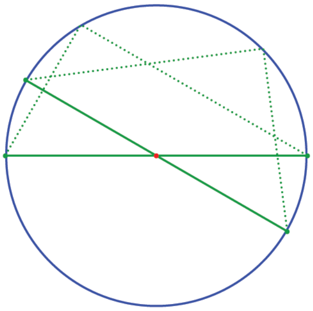
മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. ഒരു മട്ടമൂല വൃത്തത്തിൽ വച്ച്, മട്ടത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണല്ലോ.

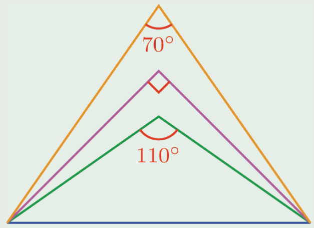


ഇനി വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു സ്ഥാനത്ത് മട്ടം വച്ച്, ഒരു വ്യാസവും കൂടി വരച്ചാൽ, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനമാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം:

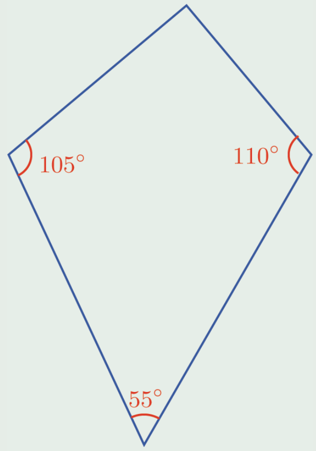


A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Ray ഉപയോഗിച്ച് B യിൽ നിന്ന് C യിലൂടെ ഒരു വര വരയ്ക്കുക. B യിൽ കൂടി BC യ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ വര വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. CD യോജിപ്പിച്ച് നോക്കൂ. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണോ? B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

(1) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങളുടെ താഴത്തെ വശം വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും മേൽമൂല വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

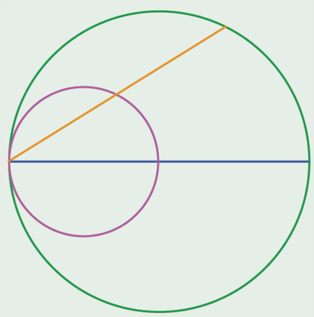


(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഓരോ വികർണവും വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, ആ വികർണത്തിലല്ലാത്ത എതിർമൂലകൾ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.



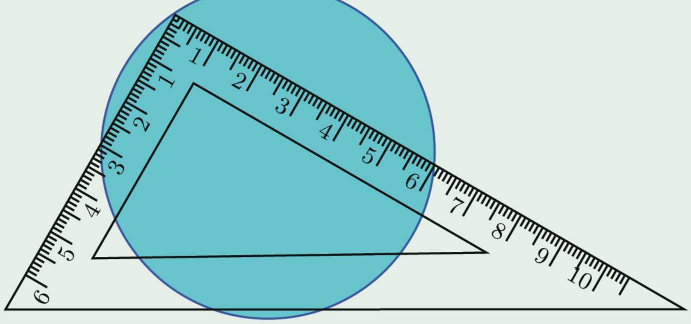
(3) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ ആയ വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ വശവും വ്യാസമായി വൃത്തം വരച്ചാൽ, മൂന്നാംമൂല വൃത്തത്തിന്റെ എവിടെയായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തവും, വരയുടെ പകുതി വ്യാസമായി ഒരു ചെറുവൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വലിയ വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ഏതു ഞാണിനെയും ചെറിയ വൃത്തം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

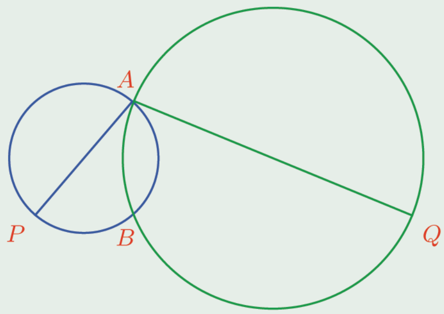


(5) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ വ്യാസങ്ങളായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക.



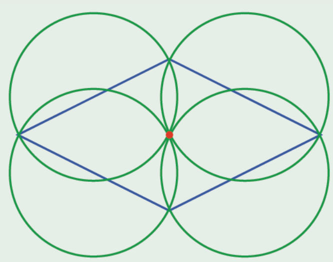
(7) ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങളാണ് A യും, B യും. A യിലൂടെയുള്ള വ്യാസങ്ങളുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങളാണ്, P യും Q വും:



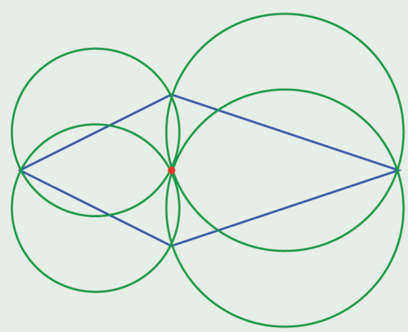
i) P, B, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) PQ എന്ന വര, വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമാണെന്നും, PQ വിന്റെ നീളം, ആ വരയുടെ നീളത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

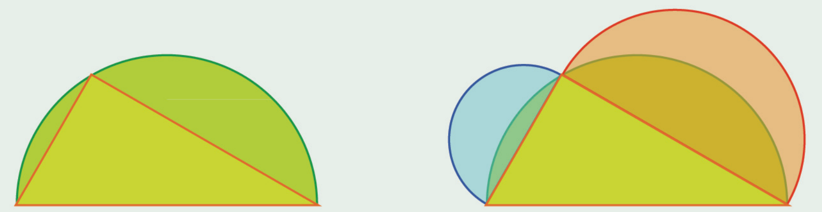
(8) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



ചിത്രത്തിലേതുപോലെ സമീപവശങ്ങൾ തുല്യമായ ഏതു ചതുർഭുജത്തിലും ഇതു ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



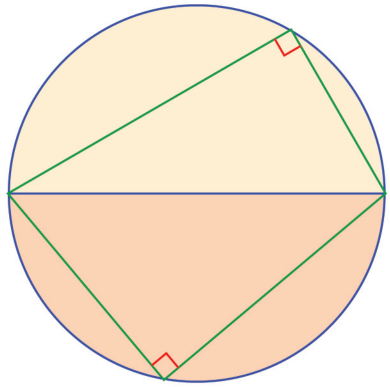
(9) ഒരു അർധവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളും ചേർത്ത് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു. തുടർന്ന്, ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധവൃത്തങ്ങളും വരച്ചു.



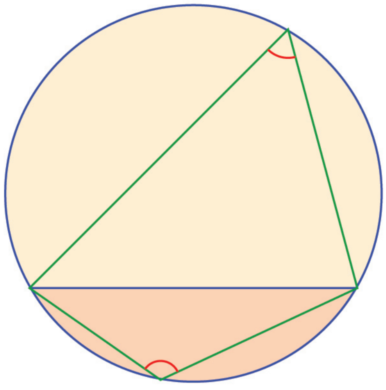
രണ്ടാം ചിത്രത്തിലെ നീലയും ചുവപ്പുമായ ചന്ദ്രക്കലകളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഞാണും കോണും ചാപവും

വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു വ്യാസവും അതിനെ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു; ഏതു ഭാഗത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാലും മട്ടകോൺ കിട്ടുന്നു.

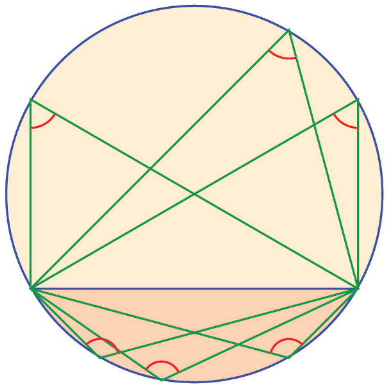


വ്യാസമല്ലാതെ മറ്റേതെങ്കിലും ഞാണായാലോ?

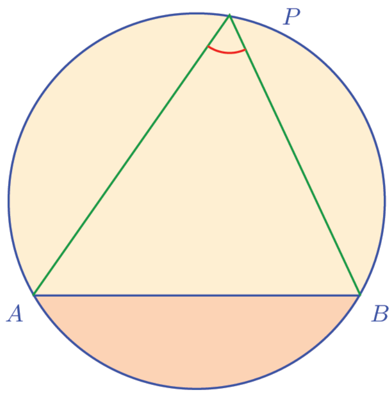


ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമല്ല, കോണുകൾ മട്ടവുമല്ല.

എന്നാൽ ഇവിടെയും ഒരേ ഭാഗത്തുള്ള കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണോ?

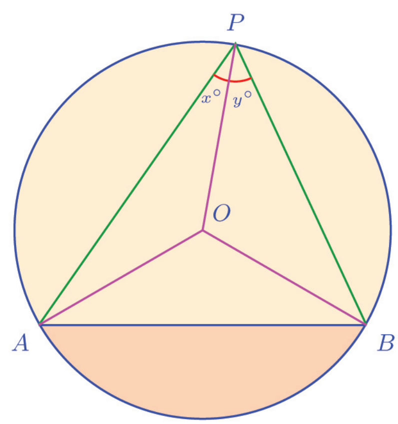


നമുക്ക് നോക്കാം. ആദ്യം മുകളിലെ ഒരു കോൺ പരിശോധിക്കാം:

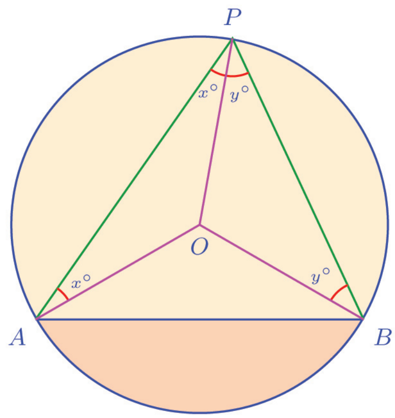


A കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ B, C, D എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. BC, CD, BD ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. ∠D അടയാളപ്പെടുത്തി, D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ. കോണളവിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? B, C ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ∠D എപ്പോഴാണ് മട്ടമാകുന്നത്? മട്ടത്തിനേക്കാൾ കൂടുതലും കുറവും ആകുന്നത് എപ്പോഴെല്ലാം?

വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു P യെ, വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കാം. ഈ വര P യിലെ കോണിനെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ അളവുകൾ x°, y° എന്നെടുക്കാം. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിനകത്തല്ലാത്തതിനാൽ, OA, OB ഇവയും യോജിപ്പിക്കാം.

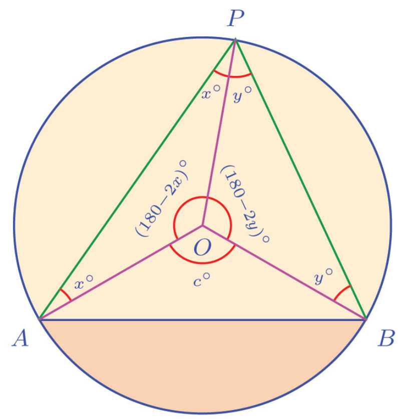


വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇതിലും *OAP*, *OBP* ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണല്ലോ. അപ്പോൾ *A* യിലെയും *B* യിലെയും കോണുകളുടെ ഒരു ഭാഗം എഴുതാം:



ഇവിടെ പണ്ടത്തെപ്പോലെ ഈ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒറ്റ ത്രികോണമാകുന്നില്ല; അതിനാൽ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എടുക്കുന്ന പഴയ സൂത്രം ഫലിക്കില്ല.

പകരം *O* യുടെ ചുറ്റുമുള്ള കോണുകൾ എഴുതി നോക്കാം:



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ $\angle AOB = c^\circ$ എന്നെടുത്താൽ,

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(x + y) = c$$

എന്നും തുടർന്ന്

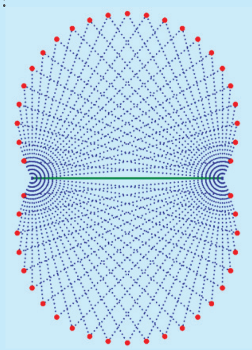
$$\angle APB = (x + y)^\circ = \frac{1}{2}c^\circ$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യം, *A*, *B* ഇവ ഉറപ്പിച്ച ശേഷം, *P* യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റുമ്പോൾ, *x*, *y* ഇവ മാറുമെങ്കിലും, *c* മാറുന്നില്ല.

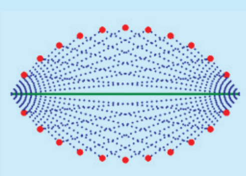
വൃത്തവിദ്യ

ഒരു വരയുടെ മുകളിലും താഴെയും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ വരച്ച ചിത്രം നോക്കൂ:



മുകളിലും താഴെയും 60° എടുത്താണ് ഇവിടെ വരച്ചത്.

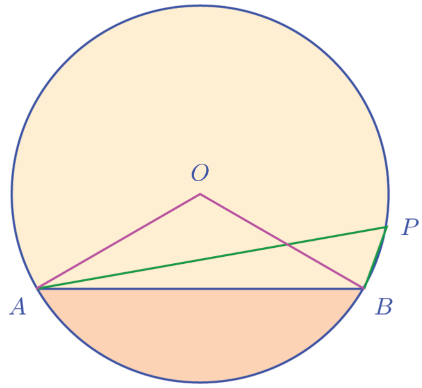
120° എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയും:



മുകളിൽ 60° ഉം, താഴെ 120° എടുത്തു നോക്കൂ. ഒരു മുഴുവൻ വൃത്തം കിട്ടുന്നില്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

മുകളിൽ 30° കോണുകളാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ, മുഴുവൻ വൃത്തമാകാൻ, താഴെ എടുക്കേണ്ട കോൺ എത്രയാണ്?

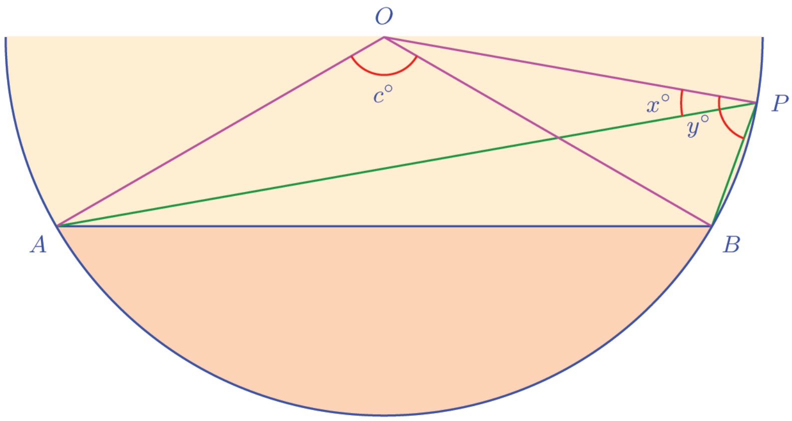
അപ്പോൾ P യുടെ സ്ഥാനം, AB യുടെ മുകളിൽ വൃത്തത്തിൽ എവിടെ ആയാലും $\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$ എന്നുതന്നെ കിട്ടുമോ?



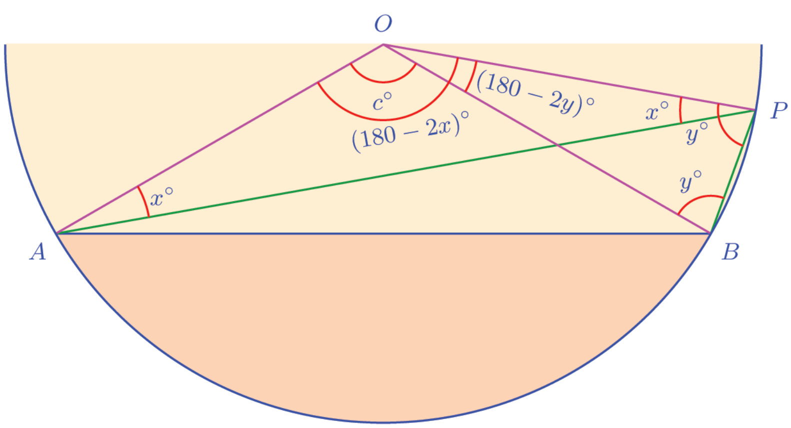
ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $\angle APO = x^\circ$ എന്നും $\angle BPO = y^\circ$ എന്നുമെടുക്കാം

കോണുകൾ വ്യക്തമായി കാണാൻ ചിത്രത്തിന്റെ വേണ്ട ഭാഗം വലുതാക്കാം.



OAP, OBP ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണെന്ന കാര്യം ഉപയോഗിച്ച്, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ മറ്റു കോണുകൾ എഴുതാം.



P യിലെ കോണുകളിൽ നിന്ന്

$$\angle APB = (y - x)^\circ$$

എന്നു കാണാം; O യിലെ കോണുകളിൽ നിന്ന്

$$c = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)$$

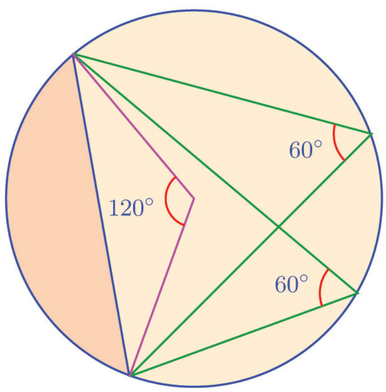
എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ വീണ്ടും

$$\angle APB = \frac{1}{2}c^\circ$$

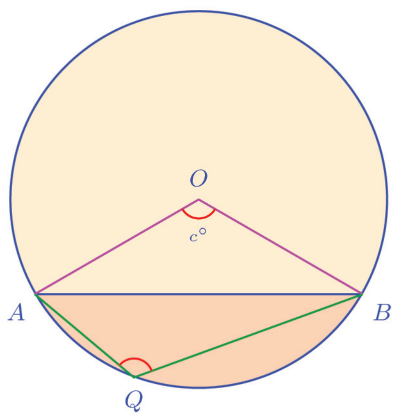
എന്നുതന്നെ കിട്ടും.

അതായത്, വ്യാസമല്ലാത്ത ഒരു ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വലിയ വൃത്തഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, അവ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്:

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ ചെറിയഭാഗത്തെ കോണുകൾ നോക്കാം:



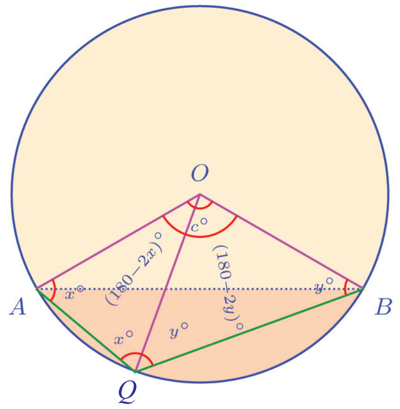
A കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൽ B, C, D എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ A യുമായും D യുമായും യോജിപ്പിക്കുക.

∠BDC, ∠BAC ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ രണ്ട് കോണളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

B, C, D എന്നിവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

OQ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇവിടെയും രണ്ടു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. അപ്പോൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ കോണുകൾ എഴുതാം.



O യിലെ കോണുകൾ നോക്കിയാൽ

$$c = (180 - 2x) + (180 - 2y)$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

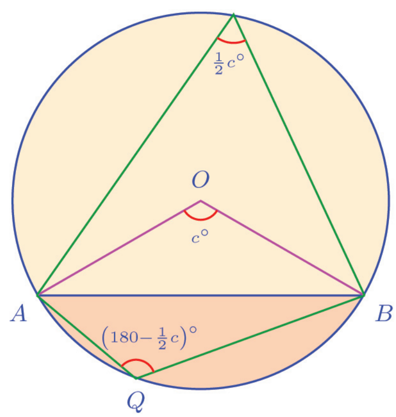
$$2(x + y) = 360 - c$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$\angle AQB = (x + y)^\circ = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ$$

എന്നും കിട്ടും.

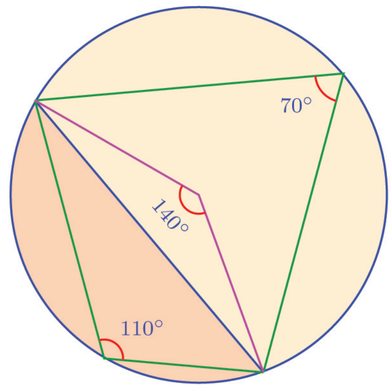
ഇനി വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലെ കോണും, കേന്ദ്രത്തിലെ കോണുമെല്ലാം ഒന്നിച്ചു നോക്കാം:

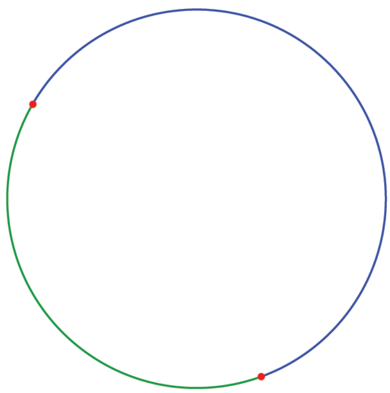


വ്യാസമല്ലാത്ത ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ ഒരു വലിയ ഭാഗവും ഒരു ചെറിയ ഭാഗവുമായി മുറിക്കുന്നു. വലിയ ഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോൺ, അവ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്; ചെറിയ ഭാഗത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും ഞാണിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോൺ, കേന്ദ്രത്തിലെ കോണിന്റെ പകുതി 180° യിൽ നിന്നു കുറച്ചതാണ്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ അറിയാമെങ്കിൽ, ആ ഞാൺ അതിന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രത്തിൽ 140° കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാൺ, വലിയ വൃത്തഭാഗത്തിൽ $\frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$ കോണും, ചെറിയ ഭാഗത്ത് $180^\circ - \left(\frac{1}{2} \times 140^\circ\right) = 110^\circ$ കോണുമാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്:



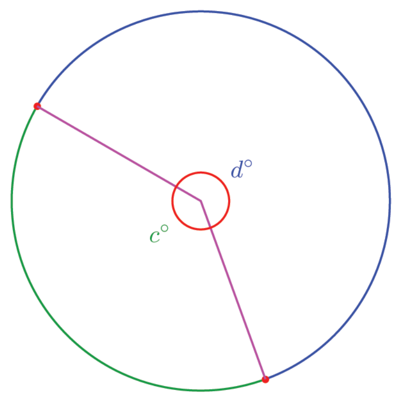


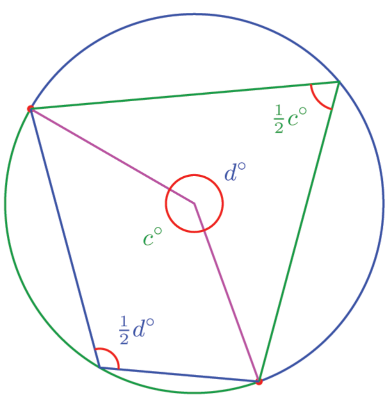
വൃത്തത്തിലെ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണിനെക്കുറിച്ച് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചല്ലോ. അതുപയോഗിച്ചും മുകളിലെഴുതിയ തത്വം പറയാം.

വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

ഇവയിൽ ഓരോ ചാപത്തിനെയും മറ്റേ ചാപത്തിന്റെ **മറുചാപം (alternate arc)** എന്നോ **പൂരകചാപം (complementary arc)** എന്നോ വിളിക്കാം. ഇവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ c°, d° എന്നെടുത്താൽ

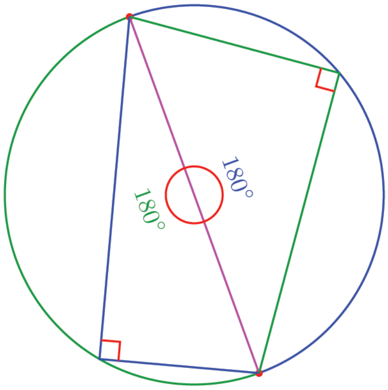
$$c + d = 360$$





ഇനി വൃത്തത്തിൽ ആദ്യമെടുത്ത രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഓരോ ചാപത്തിലെയും ഒരു ബിന്ദുവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ നോക്കാം. നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വലിയ ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $\frac{1}{2}c^\circ$; ചെറിയ ചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

$$\left(180 - \frac{1}{2}c\right)^\circ = \frac{1}{2}(360 - c)^\circ = \frac{1}{2}d^\circ$$



വൃത്തത്തിൽ എടുക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളാണെങ്കിലോ? ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:

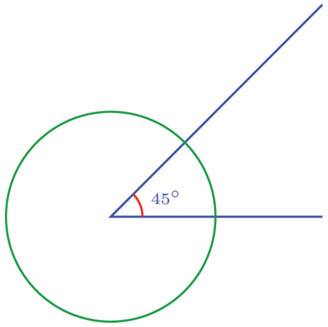
അപ്പോൾ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ചാപത്തെക്കുറിച്ചും ഇങ്ങനെ പറയാം:

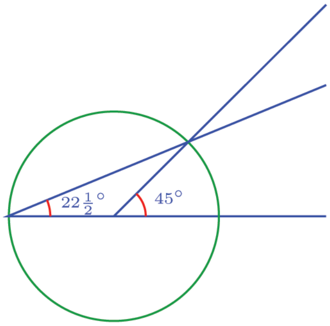
വൃത്തത്തിലെ ഏതു ചാപവും കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ് മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.

ഒരു ചാപം മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെന്നും ഇതിൽനിന്നു കിട്ടുന്നുണ്ട്; കൂടാതെ ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ $\frac{1}{2}d° = \left(180 - \frac{1}{2}c\right)°$ എന്നത് വീണ്ടുമോർത്താൽ, ഇരുചാപങ്ങളിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ എന്നും കാണാം. തുക $180°$ ആയ ഒരു ജോടി കോണുകളെ പൊതുവെ **അനുപൂരകകോണുകൾ** (supplementary angles) എന്നു പറയാറുണ്ട്. അപ്പോൾ ഈ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം, മറുചാപത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്; അതേ ചാപത്തിലും മറുചാപത്തിലുമുണ്ടാക്കുന്ന ഏത് ജോടി കോണുകളും അനുപൂരകമാണ്.

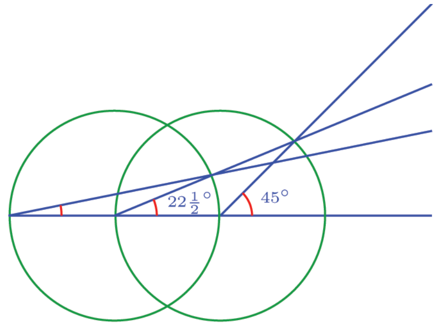
കോണുകൾ പകുതിയാക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ചിത്രം നോക്കൂ:





കോണിന്റെ മൂലയാണ് വൃത്തകേന്ദ്രം. ഇനി കോണിന്റെ താഴത്തെ വര നീട്ടി വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും, കോണിന്റെ മുകളിലെ വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചാൽ പകുതിക്കോണായി.

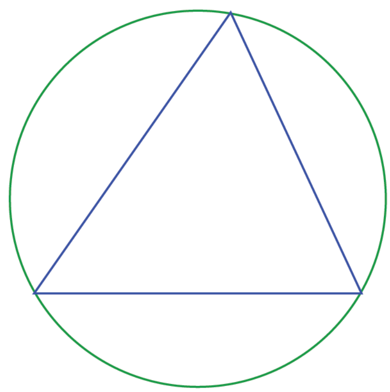
ഇങ്ങനെതന്നെ വീണ്ടും വരച്ചാലോ?

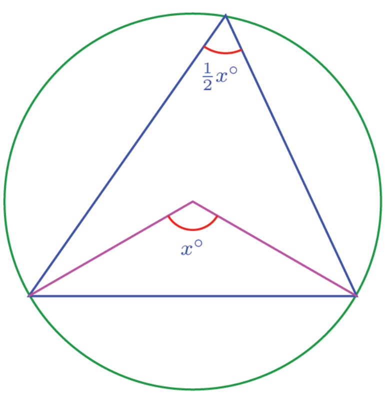


ചിത്രത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കോണിന്റെ അളവെത്രയാണ്?

നിശ്ചിത കോണുകളും, നിശ്ചിത പരിവൃത്തവുമുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, കോണുകൾ $30°$, $70°$, $80°$ എന്നിവയും, പരിവൃത്ത ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

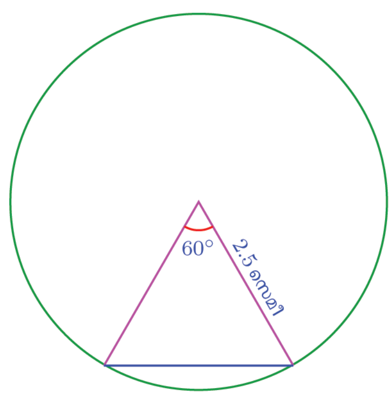
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളും പരിവൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാണല്ലോ.



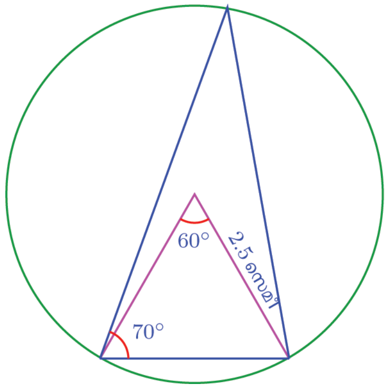


അപ്പോൾ ഓരോ വശവും പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്, ത്രികോണത്തിൽ ആ വശത്തിനെതിരെയുള്ള കോൺ.

അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരച്ച്, അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ $60°$ കോൺ വരയ്ക്കുക; അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ $30°$ കോണിനെതിരെയുള്ള വശമായി.



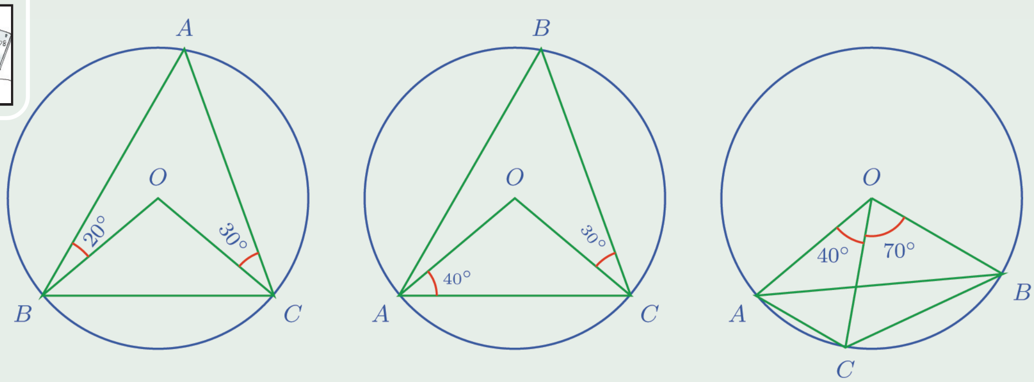
ഇനി ഈ വശത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 70° കോൺ വരച്ച്, അതിന്റെ മുകൾവശം വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക. ഈ ബിന്ദു ആദ്യവശത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉദ്ദേശിച്ച ത്രികോണമായി.



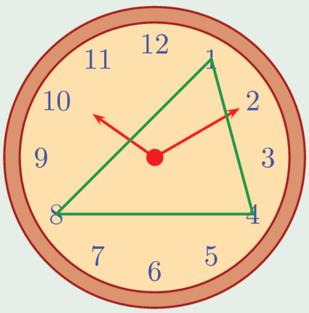
ഈ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ 30° യും 80° തന്നെയല്ലേ? (കാരണം?)

ഇതിൽനിന്ന് ഒരു കാര്യം മനസിലാക്കാം: ഒരേ കോണുകളുള്ള അനേകം ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവുംകൂടി നിശ്ചയിച്ചാൽ, ത്രികോണ നിശ്ചയം മുഴുവനായി.

(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലെല്ലാം O വൃത്തകേന്ദ്രവും A, B, C വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. ഓരോന്നിലും ABC, OBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.



(2) ഒരു ക്ലോക്കിലെ 1, 4, 8 എന്നീ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.



ഈ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

ക്ലോക്കിലെ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് എത്ര സമഭുജത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം?

(3) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ കണക്കിലും ഒരു വൃത്തവും അതിലൊരു ചാപവും വരച്ച് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കണം. ഭാഗങ്ങൾ ചോദ്യത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പോലെയാകണം:

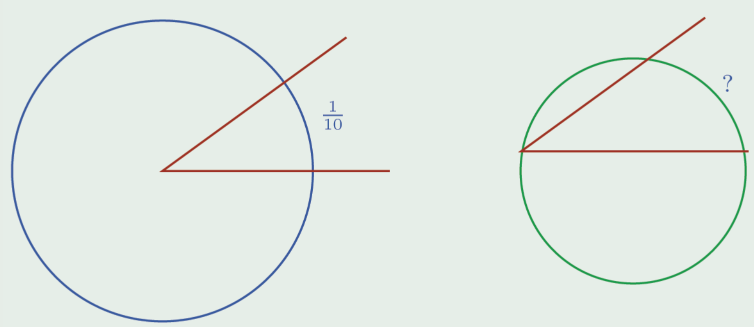
i) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം 80°

ii) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം 110°

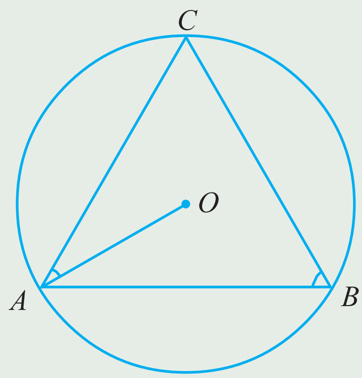
iii) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ പകുതി

iv) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ ഒന്നര മടങ്ങ്

(4) ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മടക്കി, അതിന്റെ മൂല ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ വച്ചപ്പോൾ, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗം അതിനുള്ളിൽപ്പെട്ടു: ഇതേ കമ്പിയുടെ മൂല, ഏതെങ്കിലും വൃത്തത്തിൽ ചേർത്തുവച്ചാൽ, ആ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലുണ്ടാകുക?

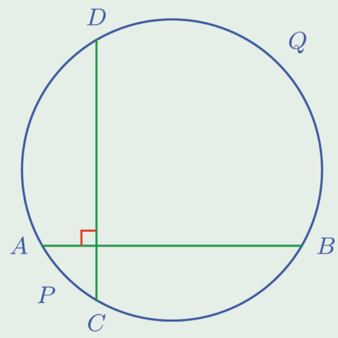


(5) ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും A, B, C അതിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. $\angle OAC + \angle ABC = 90°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

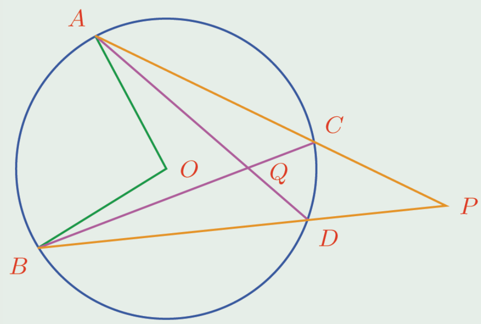


(6) പരിവൃത്ത ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, രണ്ടു കോണുകൾ $32\frac{1}{2}^{\circ}$, $37\frac{1}{2}^{\circ}$ യുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ, AB, CD ഇവ പരസ്പരം ലംബമായ ഞാണുകളാണ്. APC, BQD എന്നീ ചാപങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയാകും എന്നു തെളിയിക്കുക.

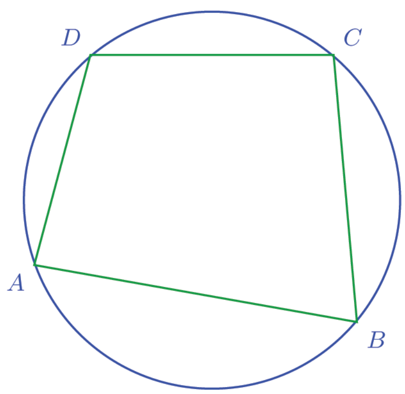


(8) ചിത്രത്തിൽ A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ, O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലാണ്. AC, BD എന്നീ വരകൾ നീട്ടിയത്, P യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു; AD, BC എന്നീ വരകൾ Q വിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. AB എന്ന ചെറിയ ചാപം O യിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, P യിലും Q വിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളുടെ തുകയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



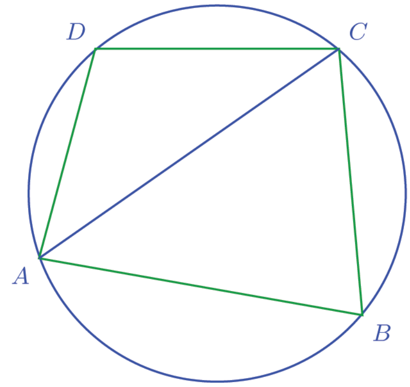
വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



A, B, C, D എന്നീ മൂലകളിലെ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

AC യോജിപ്പിച്ചുനോക്കൂ:



ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. (Polygon ഉപയോഗിക്കുക) Angle ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇപ്പോൾ B യിലേയും D യിലേയും കോണുകൾ, AC എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലുമുള്ള കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവ അനുപൂരകവുമാണ്.

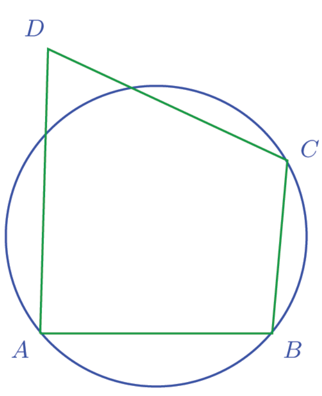
ഇതുപോലെ, BD വരച്ചുനോക്കിയാൽ A യിലേയും C യിലേയും കോണുകൾ അനുപൂരകമാണെന്നും കിട്ടും.

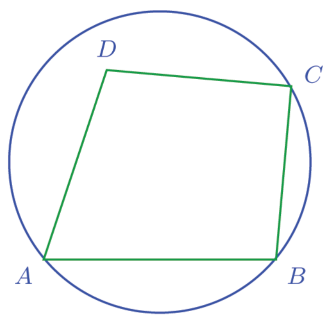
അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം?

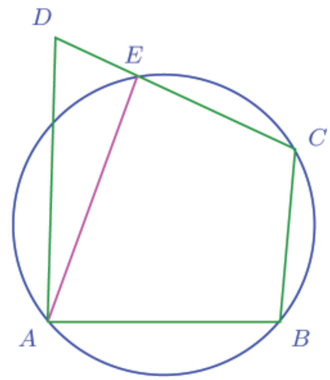
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.

മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? ഇതിന് ഉത്തരം പറയാൻ, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ എന്നു പ്രായോഗികമായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഏതായാലും വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. (ഒരു വരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയില്ലേ?) ഇനി നാലാമത്തെ മൂല, അത് ഈ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഈ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാം. അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിനകത്താകാം.







ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം CD യെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു E യും A യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, വൃത്തത്തിനകത്തൊരു ചതുർഭുജമായി:

ഇപ്പോൾ A, B, C, E ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

(1) $$\angle B + \angle AEC = 180°$$

ഇനി **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്തിൽ, വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തുമുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചുള്ള ചർച്ചയിലേതുപോലെ,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

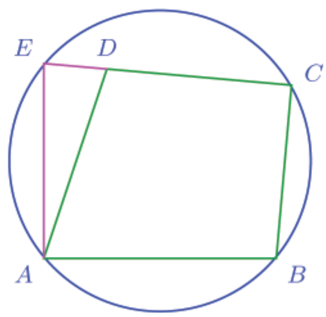
എന്നും, അതിനാൽ

(2) $$\angle D < \angle AEC$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബന്ധങ്ങളുടെ അർഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$$\angle B + \angle D < 180°$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, CD നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവും A യും യോജിപ്പിക്കാം:



ഇതിൽ

(3) $$\angle B + \angle E = 180°$$

എന്നു കാണാം. കൂടാതെ ΔEAD യിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

(4) $$\angle ADC > \angle E$$

(3), (4) എന്നീ ബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഒരു വൃത്തത്തിൽ A, B, C എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. വൃത്തത്തിന് പുറത്ത് D എന്ന ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ഉപയോഗിച്ച് ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരച്ച് എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിലാകുമ്പോൾ ∠D, ∠B ഇവയുടെ തുക 180° ആകുമെന്ന് കണ്ടല്ലോ. D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിന് പുറത്താകുമ്പോഴോ? D യുടെ സ്ഥാനം വൃത്തത്തിൽനിന്ന് അകലുന്തോറും ഈ തുകയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? D വൃത്തത്തിനകത്താകുമ്പോഴോ?

അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലും.

(നാലാമത്തെ മൂല വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ, ഈ തുക 180° തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ)

ഇനി $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A, B, C ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

D വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ? പുറത്താണെങ്കിൽ, $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

D അകത്താണോ? അകത്താണെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, D വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

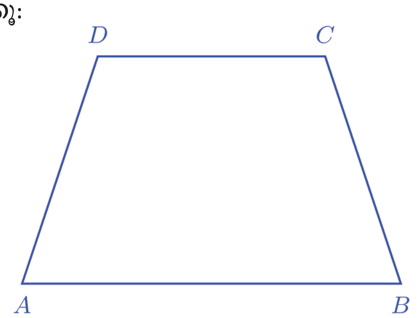
അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

നാലുമൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി **ചക്രീയചതുർഭുജം** (cyclic quadrilateral) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമായ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ. സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ തന്നെ.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

മാത്രമല്ല, AB യും CD യും സമാന്തരമായതിനാൽ

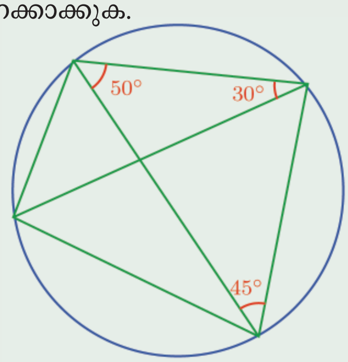
$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

എന്നു കാണുമല്ലോ. അതായത് $ABCD$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളും, വികർണങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കുക.

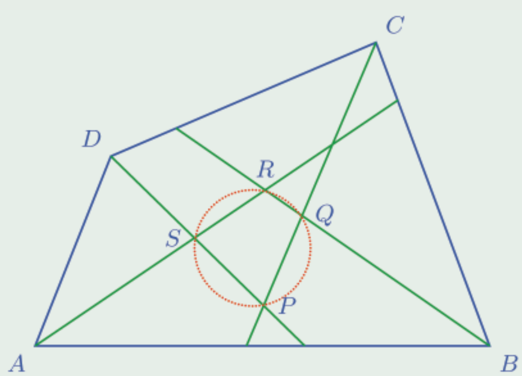


(2) ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലെയും പുറംകോൺ എതിർമൂലയിലെ അകക്കോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

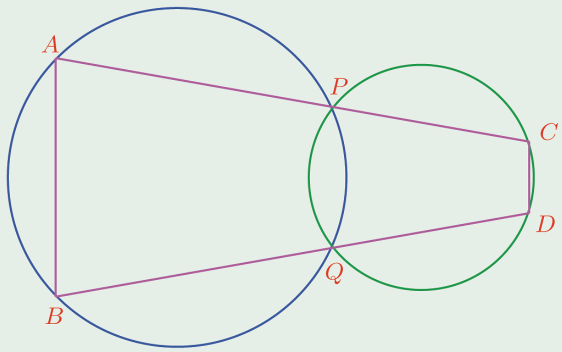
(5) ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R, S



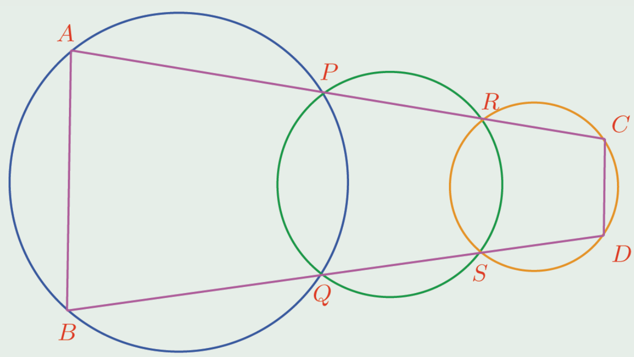
$PQRS$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ച് അതിന്റെ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ വരയ്ക്കുക. അടുത്തടുത്തുള്ള കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ച് കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഈ ചതുർഭുജം ചക്രിയമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇതിനായി Circle through 3 Points ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്ന് മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക; അത് നാലാമത്തെ മൂലയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ എന്ന് നോക്കിയാൽ മതി. ആദ്യം വരച്ച ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി അതിനെ സമാന്തരികം, ചതുരം, സമചതുരം, സമപാർശ്വലംബകം എന്നീ രൂപങ്ങളാക്കി, ഉള്ളിൽ വരുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത നോക്കൂ. (ഇതിനായി Grid ഉപയോഗിക്കാം).

(6) i) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തങ്ങൾ, P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള രണ്ട് വരകൾ, വൃത്തങ്ങളുമായി A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. AC, BD എന്നീ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ, $ABDC$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

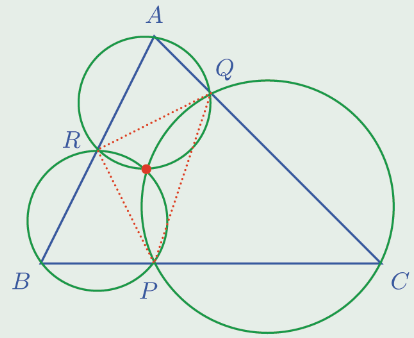


ii) ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങൾ നടുവിലെ വൃത്തത്തിനെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R, S; ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങളുമായി A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. $ABDC$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

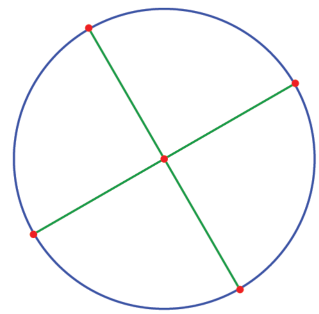


(7) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളിൽ P, Q, R അടയാളപ്പെടുത്തി, AQR, BRP, CPQ എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരിവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ മൂന്നു വൃത്തങ്ങളും പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



രണ്ടു ഞാണുകൾ

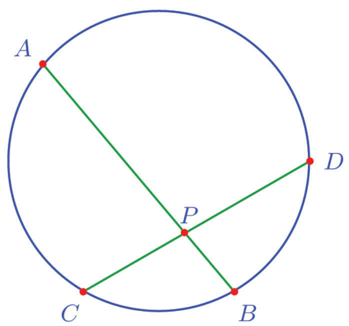


വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു വ്യാസവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു.

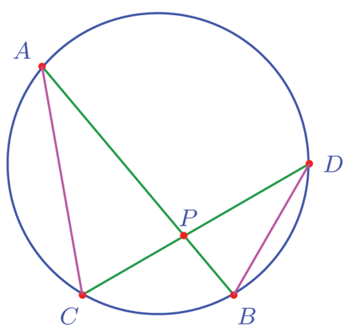
മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന നാലുഭാഗങ്ങളുടെയും നീളം ആരത്തിനു തുല്യവുമാണ്.

വ്യാസമല്ലാത്ത രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുമ്പോഴോ?

ചിത്രം നോക്കൂ.



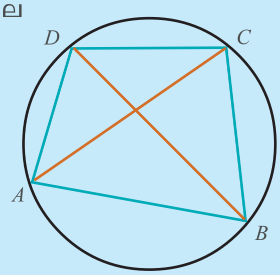
ഭാഗങ്ങളൊന്നും തുല്യമല്ല. എങ്കിലും അവ തമ്മിൽ ചില ബന്ധങ്ങളുണ്ട്. അതു കാണാൻ AC യും BD യും യോജിപ്പിക്കാം.



ഇപ്പോൾ BC എന്ന ചെറുചാപം, മറുചാപത്തിലെ A യിലും D യിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്; അതുപോലെ AD എന്ന ചെറുചാപം, മറുചാപത്തിലെ B യിലും C യിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

ടോളമി സിദ്ധാന്തം

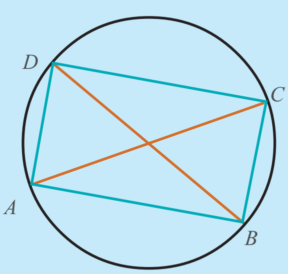
ചക്രീയചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശ ജോടികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ് എന്നു കാണാം. അതായത് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെങ്കിൽ



$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$

മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ചതുർഭുജത്തിൽ ഇതു ശരിയാണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്. ടോളമി സിദ്ധാന്തം (Ptolemy's Theorem) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്.

ചതുരം ചക്രീയമാണല്ലോ. ചതുരത്തിൽ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവുമാണ്; വികർണങ്ങളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ $ABCD$ ചതുരമാണെങ്കിൽ, ഈ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്



$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ഇത് പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമല്ലേ?

അതായത് PAC, PDB എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്; അതിനാൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

ഇത് ഗുണനരൂപത്തിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം

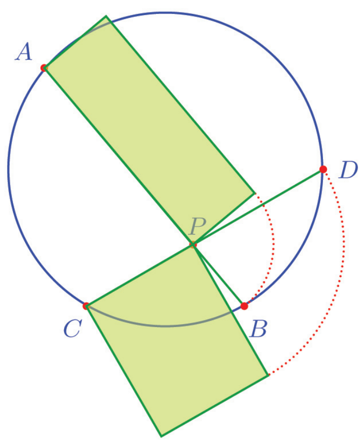
$$PA \times PB = PC \times PD$$

ഇതിൽ PA, PB ഇവ AB എന്ന ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളും PC, PD ഇവ CD എന്ന ഞാണിന്റെ ഭാഗങ്ങളുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം:

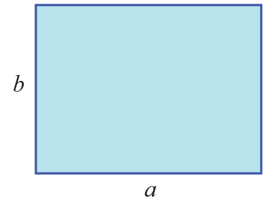
ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, രണ്ടു ഞാണുകളുടെയും ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം തുല്യമാണ്.

രണ്ടു നീളങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെ പരപ്പളവായി പറയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ തത്വത്തെ ജ്യാമിതീയമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

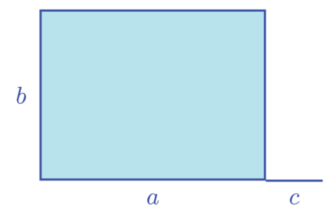
ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഞാണിന്റെയും ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരങ്ങൾക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്.



പരപ്പളവിനെ സംബന്ധിക്കുന്ന ചില കണക്കുകൾ ഇതുപയോഗിച്ച് ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരം നോക്കുക:



ഇതിന്റെ നീളം അൽപം കൂട്ടി, പരപ്പളവ് മാറാതെ മറ്റൊരു ചതുരം വരയ്ക്കണം.

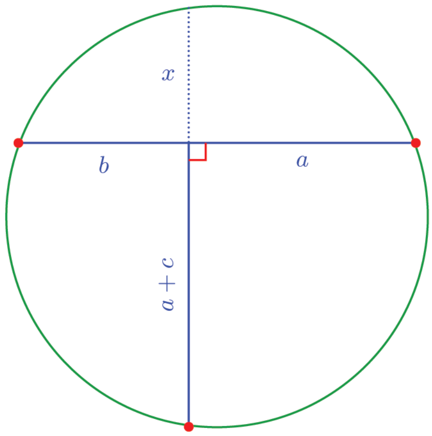


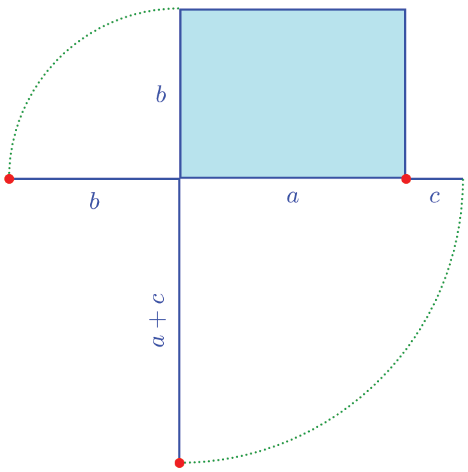
ഈ പ്രശ്നം, ബീജഗണിതഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെ പറയാം.

$(a + c)\, x = ab$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കുക.

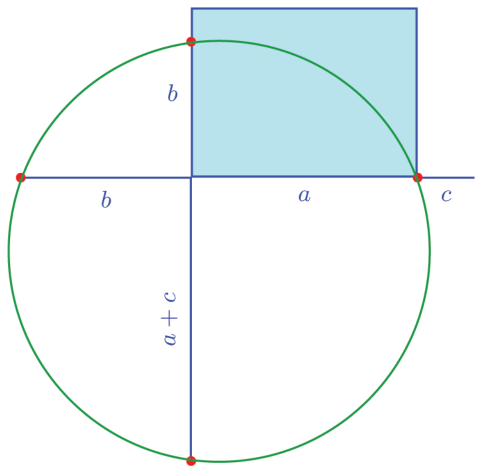
മുകളിലെഴുതിയ ജ്യാമിതീയതത്വം ഉപയോഗിച്ചാലോ?

ഇത്തരമൊരു ചിത്രം വരച്ചാൽ മതി.



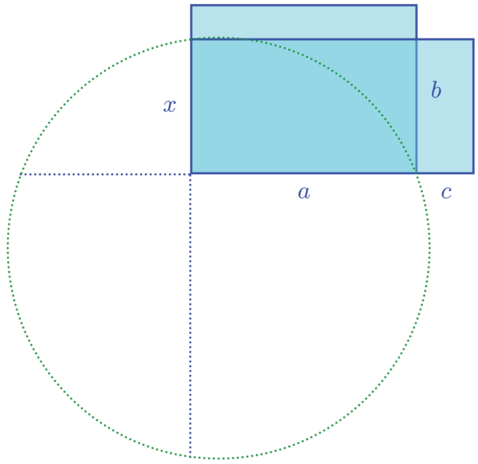


അപ്പോൾ ആദ്യം, ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം b നീളം ഇടത്തോട്ടും, ഇടത്തെ വശം $a + c$ നീളം താഴോട്ടും നീട്ടുക.



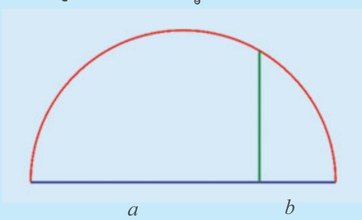
ഇനി ചിത്രത്തിലെ മൂന്നു ചുവന്ന കുത്തുകളിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. (ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ?)

ഈ വൃത്തം ചതുരത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന ഭാഗമാണ് പുതിയ ചതുരത്തിന്റെ വീതി.



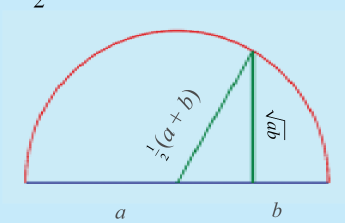
ജ്യാമിതി, ബീജഗണിതം, സംഖ്യകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് x എന്നെടുത്താൽ $ab = x^2$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = \sqrt{ab}$ എന്നും കാണാം.

ഈ അർധവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്? വ്യാസം $a + b$ ആയതിനാൽ, ആരം $\frac{1}{2}(a+b)$



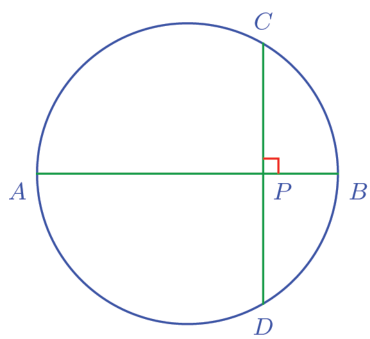
ചിത്രത്തിൽ, ആരം ലംബത്തെക്കാൾ വലുതാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമാകുന്ന സന്ദർഭമുണ്ടോ?

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ a, b എടുത്താലും

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

ഞാണുകളുടെ ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വത്തിന്റെ ഒരു സവിശേഷ സന്ദർഭവും ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, AB വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, CD അതിനു ലംബമായ ഞാണുമാണ്.



വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ, ഇവിടെ $PC = PD$ ആണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം ഇങ്ങിനെയാകും.

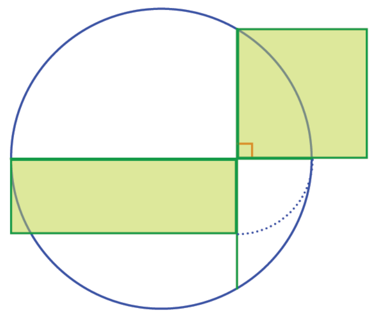
$$PA \times PB = PC^2$$

അതായത്,

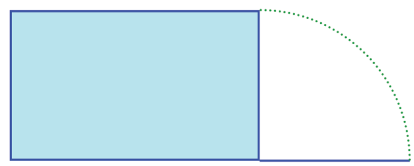
വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിയ്ക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഞാണിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണ്.

ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാലോ?

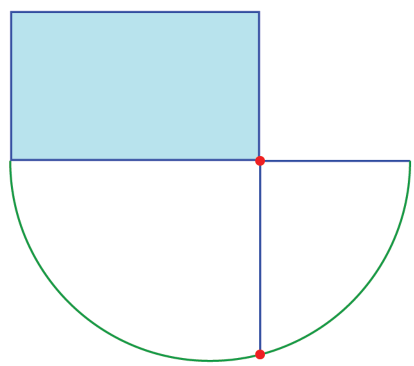
വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിനെ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാൺ മുറിയ്ക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ഞാണിന്റെ പകുതി വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനു തുല്യമാണ്.



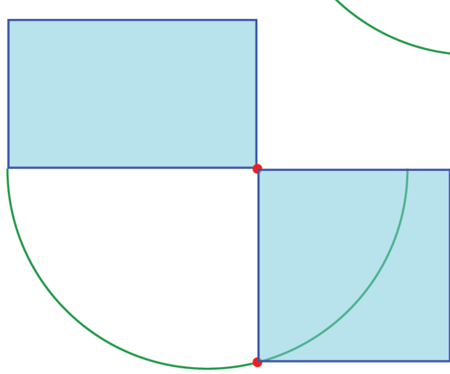
ഒരു ചതുരത്തിനെ അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമാക്കാൻ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചതുരം നോക്കുക.



ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, വലതു വശം കൂടി കൂട്ടി നീട്ടുക.



ഇനി താഴത്തെ വര വ്യാസമായി ഒരു അർധവൃത്തം താഴെ വരയ്ക്കുക; ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം താഴോട്ട് നീട്ടി, അർധവൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക.



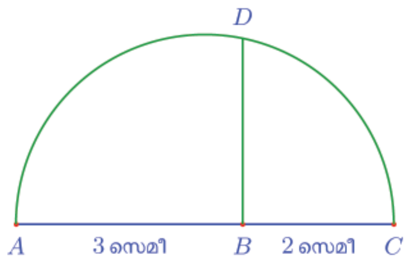
ഈ വരയാണ് സമചതുരത്തിന്റെ വശം (കാരണം?)

നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാനും ഈ മാർഗം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

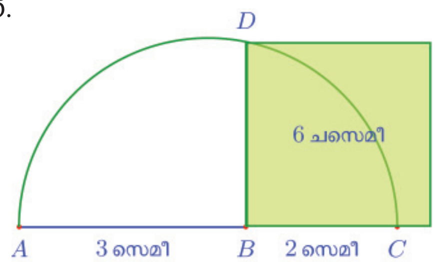
$6 = 3 \times 2$ ആയതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി. അതിന് ഈ ചതുരം വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ഈ നീളത്തിൽ വരകൾ വരച്ചാൽ മതി.

ഇനി AC വ്യാസമായി അർധവൃത്തം വരച്ച് B യിൽ കൂടി AC ക്ക് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര ഈ അർധവൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക.



നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് $BD^2 = AB \times BC = 6$ ആയതിനാൽ

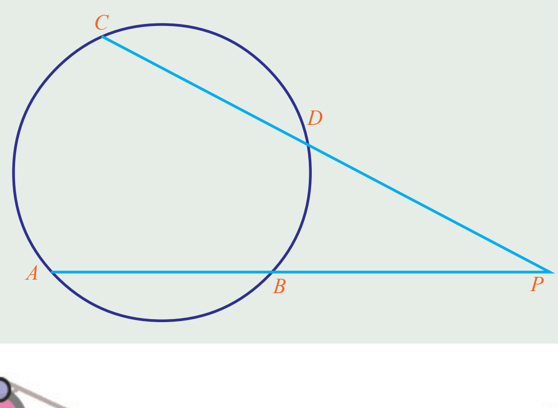
BD വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 6 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ ആണ്.



ഇവിടെ BD യുടെ നീളം $\sqrt{6}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ അഭിന്നക നീളമുള്ള ചില വരകൾ വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ നീട്ടി P എന്ന ബിന്ദുവിൽ മുട്ടിച്ചിരിക്കുന്നു.



i) AC, BD ഇവ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന APC, PBD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) $PA \times PB = PC \times PD$ എന്നു തെളിയിക്കുക

iii) $PB = PD$ ആണെങ്കിൽ $ABDC$ എന്ന ചതുർഭുജം സമപാർശ്വലംബകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 4 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കുക.

i) ഇതേ പരപ്പളവും, നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

ii) ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(3) 15 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(4) 5 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം മൂന്നു വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ നിർമിക്കുക.

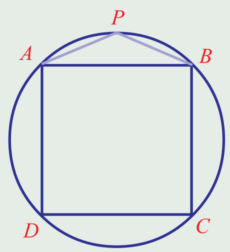
(പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം ഓർക്കുക)

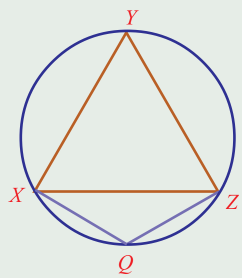
(5) വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

(6) 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരമുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(7) കർണം 4 സെന്റിമീറ്ററായ സമപാർശ്വമട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(8) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലായ സമചതുരമാണ് $ABCD$. അത്തരമൊരു സമഭുജത്രികോണമാണ് XYZ. വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q.





i) $\angle APB$ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

ii) $\angle XQZ$ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

ഗവേഷണം

- മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലും, വശങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യയുമായ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും, വൃത്തത്തിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസിലാക്കുന്നു.			
• ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിക്കുന്ന രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലെയും കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെന്നും, മറുഭാഗങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണെന്നും മനസിലാക്കുന്നു.			
• പരിവൃത്തമുള്ള ചതുർഭുജങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• വൃത്തത്തിലെ ഞാണുകൾ മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോഴുള്ള ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം മനസിലാക്കുന്നു.			
• പരപ്പളവ് മാറാതെ ഒരു ചതുരത്തെ മറ്റൊരു ചതുരമാക്കാനും, സമചതുരമാക്കാനും കഴിയുന്നു.			

3 സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്, ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും, ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ എട്ടു കറുത്ത മുത്തും, രണ്ടു വെളുത്ത മുത്തും, ഇതിൽ നിന്ന് നോക്കാതെ ഒരെണ്ണമെടുത്താലോ?

അപ്പോഴും എടുക്കുന്ന മുത്ത് മിക്കവാറും കറുത്തതുതന്നെയാകാനാണ് വഴി. മൂന്നാമതൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്തതും അഞ്ചു വെളുത്തതും. ഇതിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുത്താലോ? കറുത്തതാകാം, വെളുത്തതാകാം എന്നല്ലാതെ കൂടുതലൊന്നും പറയാനില്ല, അല്ലേ?

ഇതെല്ലാം മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം; ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും കറുത്തത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത, മൂന്നാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നാണെങ്കിൽ, കറുപ്പാകാനും വെളുപ്പാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

ചെപ്പും മുത്തും വച്ചൊരു കളിയാകാം; ഒരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും; മറ്റൊന്നിൽ ആറു കറുത്ത മുത്തും നാലു വെളുത്ത മുത്തും. ഏതെങ്കിലുമൊരു ചെപ്പിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുക്കണം. കറുത്തതായാൽ കളി ജയിച്ചു. ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തുകൾ കൂടുതലുള്ളത്, അപ്പോൾ അതിലല്ലേ കറുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ?

രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നൊരു കറുത്ത മുത്തെടുത്ത് ഒന്നാം ചെപ്പിലിട്ടാലോ? ചെപ്പുകൾക്കുള്ളിലെ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും.

ഒന്നാം ചെപ്പ്	:	6 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്
രണ്ടാം ചെപ്പ്	:	5 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

ഇനി കളിയിൽ ജയിക്കാൻ ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?

ഇപ്പോൾ ഒന്നാംചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തു കൂടുതൽ, കറുപ്പു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയും ഇതിലാണോ?

മൊത്തമായി ആലോചിച്ചുനോക്കാം; ഒന്നാംചെപ്പിൽ മൊത്തം 11 മുത്ത്, അതിൽ 6 കറുത്തത്. അതായത്, മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{6}{11}$ ഭാഗം കറുത്തത്.

രണ്ടാം ചെപ്പിലോ? മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{5}{9}$ ഭാഗമാണ് കറുത്തത്.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ ഇവയിലേതാണു വലുത്?

$\frac{5}{9}$ അല്ലേ?

അതായത്, രണ്ടാം ചെപ്പിലാണ് കൂടുതൽ ഭാഗം കറുത്തത്, അപ്പോൾ രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെ എടുക്കുന്നതല്ലേ ഇപ്പോഴും നല്ലത്?

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യത, അൽപംകൂടി കടന്ന്, ഒന്നാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{6}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{5}{9}$ എന്നെല്ലാം പറയാം.

വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഒന്നാം ചെപ്പിൽ നിന്ന് $\frac{5}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് $\frac{4}{9}$; ഇതിൽ വലുതേതാണ്? അപ്പോൾ വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടിയാലാണ് ജയമെങ്കിൽ, ഏതു ചെപ്പിൽനിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്? ഈ കണക്കിലെ സാധ്യതകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം.

		ഒന്നാം ചെപ്പ്		രണ്ടാം ചെപ്പ്	
		കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്
ആദ്യം	എണ്ണം	5	5	6	4
	സാധ്യത	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
പിന്നീട്	എണ്ണം	6	5	5	4
	സാധ്യത	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ഒരു ചോദ്യവുമാകാം. തുടക്കത്തിലും, മുത്തു മാറ്റിയിട്ടതിനു ശേഷവും രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നുതന്നെയാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയെന്നു കണ്ടു.

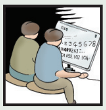
ഈ സാധ്യതതന്നെ ആദ്യമോ പിന്നീടോ കൂടുതൽ?

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഒരോ കടലാസു കഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. കടലാസിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ആകെയുള്ള 25 സംഖ്യകളിൽ 13 എണ്ണം ഒറ്റയും, 12 എണ്ണം ഇരട്ടയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഇരട്ടസംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{12}{25}$

ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? ഈ പെട്ടിയിൽനിന്നുതന്നെ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ആറിന്റെ ഗുണിതമോ?



(1) ഒരു പെട്ടിയിൽ 6 കറുത്ത പന്തും, 4 വെളുത്ത പന്തും. ഇതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അത് കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വെളുത്തതാകാനോ?

(2) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 8 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തും.

i) ആദ്യത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ii) രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നെടുത്താലോ?

iii) രണ്ടു സഞ്ചിയിലെയും പന്തുകൾ ഒരു സഞ്ചിയിലാക്കി അതിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

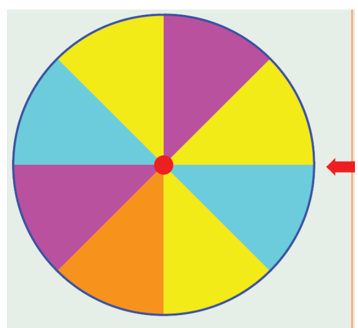
(3) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. പറയുന്ന സംഖ്യ പൂർണവർഗമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(4) ഒന്നു മുതൽ അമ്പതു വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണങ്ങളിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നൊരു കടലാസെടുക്കണം. അതിനുമുമ്പ്, കിട്ടാൻ പോകുന്ന സംഖ്യയെക്കുറിച്ച് അഭാജ്യസംഖ്യ എന്നോ അഞ്ചിന്റെ ഗുണിതം എന്നോ ഒരു ഊഹവും പറയണം. ഏത് ഊഹം പറയുന്നതാണ് നല്ലത്? എന്തുകൊണ്ട്?

(5) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന മുത്തുകളും 7 പച്ച മുത്തുകളുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ ചുവന്ന മുത്തുകളും പച്ച മുത്തുകളും ഓരോന്ന് കൂടുതലാണ്. ചുവന്ന മുത്ത് കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ ഏത് സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ്?

ജ്യാമിതീയ സാധ്യത

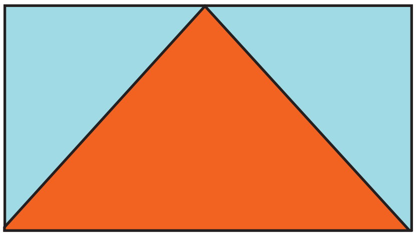
പല നിറങ്ങളുള്ള ഒരു വട്ടം കറങ്ങാൻ പാകത്തിൽ ഒരു പലകയിൽ തറച്ചിരിക്കുന്നു.



വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, പലകയിലെ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ മഞ്ഞനിറം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ വട്ടത്തിന്റെ എട്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഏതും വരാം. അതിൽ മൂന്നെണ്ണമാണ് മഞ്ഞ. അപ്പോൾ, മഞ്ഞ വരാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{8}$.

ഇതുപോലെ മറ്റു നിറങ്ങൾ ഓരോന്നും വരാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കി നോക്കൂ.



മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം: കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും, എതിർവശത്തിന്റെ മൂലകളും ചേർത്തൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.

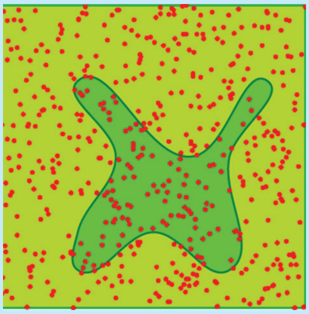
ഈ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ത്രികോണത്തിനും ചതുരത്തിനും ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമല്ലേ? അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണം.

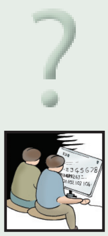
അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

പരപ്പളവും സാധ്യതയും

സങ്കീർണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.

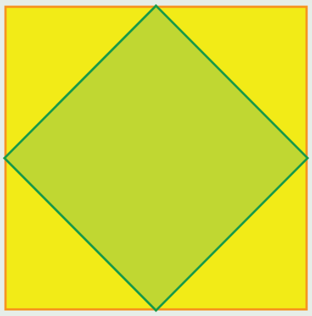


നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. മോണ്ടി കാർലോ രീതി (Monte Carlo method) എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

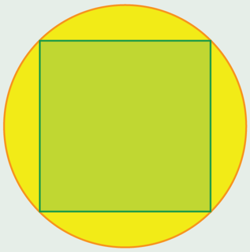


ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വിശദീകരണം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് പച്ചഭാഗത്തിലാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

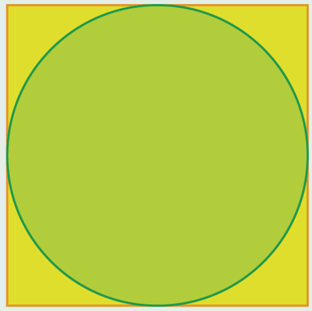
(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച സമചതുരം.



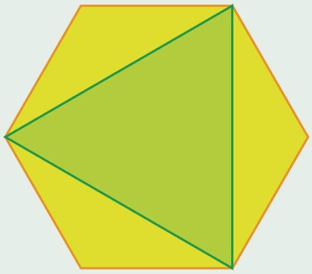
(2) മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായി വരച്ച സമചതുരം.



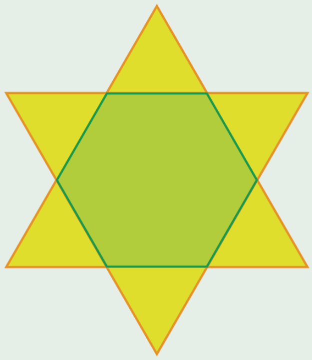
(3) ഒരു സമചതുരത്തിനകത്ത് കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം.



(4) സമഷഡ്ഭുജത്തിലെ ഒന്നിടവിട്ട മൂലകൾ ചേർത്തു വരച്ച ത്രികോണം.

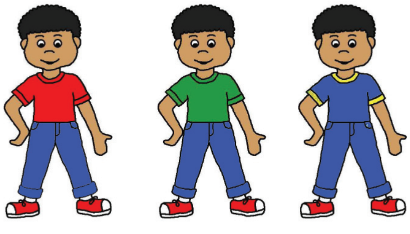


(5) രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങൾക്കിടയിൽ രൂപപ്പെടുന്ന സമഷഡ്ഭുജം.

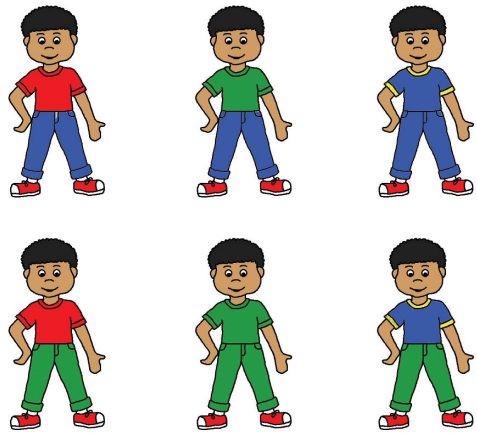


ജോടികൾ

അലക്കിത്തേച്ചതെല്ലാം നോക്കിയപ്പോൾ, ജോണിക്ക് ഒരു നീലപ്പാന്റ്സും, ചുവപ്പും പച്ചയും നീലയുമായി മൂന്നു ഷർട്ടും കിട്ടി. എങ്ങനെയെല്ലാം ഒരുങ്ങാം, ജോണി ആലോചിച്ചു.



ഒന്നുകൂടി തിരഞ്ഞപ്പോൾ ഒരു പച്ചപ്പാന്റ്സും കിട്ടി. അപ്പോളിനി ഇത് ഓരോ ഷർട്ടിന്റെ കൂടെയുമിട്ട്, മൂന്നുതരത്തിൽ കൂടി ആകാമല്ലോ, ജോണി കണക്കു കൂട്ടി.



അങ്ങനെ ആറു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ജോണിക്ക് ഒരുങ്ങാം. ഇതിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് പാന്റ്സും ഷർട്ടും ഒരേ നിറമാകുന്നത്?

അപ്പോൾ ജോണി, ഒരേ നിറത്തിലുള്ള ഷർട്ടും പാന്റ്സും ഇടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ അല്ലേ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാല് കടലാസുകഷണങ്ങളും; മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളും. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്തു കിട്ടുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഏതൊക്കെയാകാം?

ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് 1 എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1, 2 ഇവ ഓരോന്നും ചേർത്ത് രണ്ടു ജോടികൾ, ഇവയെ (1, 1), (1, 2) എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് ഓരോ സംഖ്യകളുമെടുത്ത്, കിട്ടാവുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം എഴുതിയാലോ?

(1, 1),	(1, 2)
(2, 1),	(2, 2)
(3, 1),	(3, 2)
(4, 1),	(4, 2)

ആകെ 8 ജോടികൾ

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	1+2+6	1+3+6
2.	1+3+5	1+4+5
3.	1+4+4	2+2+6
4.	2+2+5	2+3+5
5.	2+3+4	2+4+4
6.	3+3+3	3+3+4

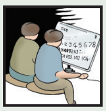
എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക, ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും ഗലീലിയോ വ്യക്തമാക്കുന്നു. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

ഇതിൽ എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നത്?

(1, 1), (3, 1) എന്ന രണ്ടു ജോടികളിൽ മാത്രമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു പെട്ടികളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ഇതുപോലെ രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കാമോ? ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ? രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യതയോ?



(1) രജനിക്ക് പച്ച, നീല, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിൽ കല്ലുമാലയും കമ്മലുമുണ്ട്. എത്ര രീതികളിൽ രജനിക്ക് മാലയും കമ്മലുമണിയാം? ഒരു ദിവസം രജനി ഒരേ നിറമുള്ള മാലയും കമ്മലും അണിയാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? വ്യത്യസ്ത നിറമുള്ളതോ?

(2) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(3) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഗുണനഫലം ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

(4) അക്കങ്ങൾ രണ്ടും 1, 2, 3 ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ആയ രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഒരെണ്ണമെടുത്താൽ,

i) രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ii) അക്കങ്ങളുടെ തുക 4 ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(5) രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ഓരോരുത്തരും ഒറ്റസംഖ്യവേണോ, ഇരട്ടസംഖ്യവേണോ എന്ന് ആദ്യം തീരുമാനിക്കണം. രണ്ടുപേരും ഒരു കൈയിലെ കുറെ വിരലുകൾ ഒരുമിച്ചുയർത്തുന്നു. ആകെ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അത് ആദ്യമേ എടുത്തയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതെടുത്തയാളും. ഈ കളിയിൽ ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ, ഇരട്ടസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ നല്ലത്?

കൂടുതൽ ജോടികൾ

വീണ്ടും രണ്ടു പെട്ടികൾ, ഒന്നിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ പത്തു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, രണ്ടാമത്തേതിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ അഞ്ചു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, പതിവുപോലെ രണ്ടിൽനിന്നും ഓരോ കടലാസെടുക്കുന്നു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വഴി എളുപ്പമാണ്, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികൾ സാധ്യമാണെന്നു കണക്കാക്കുക, അവയിൽ എത്രയെണ്ണം നമുക്കു വേണ്ട രീതിയിൽ രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നു നോക്കുക, രണ്ടാമത് കിട്ടിയ സംഖ്യയെ ആദ്യം കിട്ടിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സാധ്യതയായി.

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറേ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ (Head or Tail) വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിതരീതികൾ, സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

പറയുന്നതുപോലെ എളുപ്പമാണോ ചെയ്യുന്നത്? എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളും എഴുതി എണ്ണുക അത്ര രസമുള്ള കാര്യമല്ലല്ലോ.

ചിന്തിച്ചുനോക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ പത്തെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാകാം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ അഞ്ചെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നും, അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്ന ജോടികളോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ മാറ്റി 5 ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യതന്നെ 10 തരത്തിലാകാം. അപ്പോൾ മൊത്തം സംഖ്യാജോടികളെ ഇങ്ങനെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

5 എണ്ണം (columns); 10 എണ്ണം (rows)

(1, 1)	(1, 2)	…	(1, 5)
(2, 1)	(2, 2)	…	(2, 5)
…	…	…	…
…	…	…	…
(10, 1)	(10, 2)	…	(10, 5)

ഈ 50 ജോടികളിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാവുന്നത്? അതിന്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ 5 എണ്ണത്തിലൊന്നാകണം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 എന്നീ 3 എണ്ണത്തിലൊന്നും. ആദ്യത്തെ 5 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും രണ്ടാമത്തെ 3 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നു ചേർത്ത് ആകെ എത്ര ജോടികളുണ്ടാക്കാം?

5×3 അല്ലേ? (വേണമെങ്കിൽ വരിയും നിരയുമായി സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ) അപ്പോൾ ഈ പെട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$. ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒന്ന് ഒറ്റയും മറ്റേത് ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഒരു കണക്കു കൂടി, ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്, അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല, മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങയുണ്ട്, 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ, രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്തരീതികളിൽ എടുക്കാം? (വേണമെങ്കിൽ, ഓരോ കുട്ടയിലേയും മാങ്ങകൾ ഓരോ വരിയിൽ നിരത്തി വച്ചിരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം, ഇവയിലെല്ലാം ഓരോ സംഖ്യ എഴുതിയിരിക്കുന്നതായും സങ്കൽപ്പിക്കാം)

അപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു മാങ്ങകളെടുക്കുന്നത് $50 \times 40 = 2000$ രീതികളിലാവാം. ഇതിലെത്ര ജോടികൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകും? ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്.

ആദ്യത്തെ കുട്ടയിലെ ഓരോ പഴുത്ത മാങ്ങയും, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിലെ ഒരോ പഴുത്ത മാങ്ങയുമായി ജോടിയാക്കിയാൽ ആകെ $30 \times 25 = 750$ ജോടി. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$. ഇതുപോലെ രണ്ടും പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം എന്നാൽ ഒരു പഴുത്തതും ഒരു പച്ചയും; അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും പഴുത്തത്, ഇതിൽ ഒരെണ്ണം പഴുത്തത് എന്നത് തന്നെ രണ്ട് രീതിയിൽ കിട്ടും;

ഒന്നാമത്തേത് പഴുത്തത്, രണ്ടാമത്തേത് പച്ച.

അല്ലെങ്കിൽ

ഒന്നാമത്തേത് പച്ച, രണ്ടാമത്തേത് പഴുത്തത്.

അതായത്, ഒന്ന് മാത്രം പഴുത്ത ജോടികൾ ആകെ

$$\begin{aligned}(30 \times 15) + (20 \times 25) &= 450 + 500 \\ &= 950\end{aligned}$$

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

ഓരോ ദിവസവും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കലണ്ടറിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.

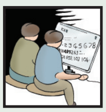
രണ്ടും പഴുത്തത് 750 ജോടി എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ടും കൂടി എടുത്താൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതുള്ള ജോടികൾ ആകെ

$$950 + 750 = 1700$$

അതിനാൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകുക എന്നാൽ രണ്ടും പച്ചയാകാൻ പറ്റില്ല. ആകെ സാധ്യമാകുന്ന 2000 ജോടികളിൽ, രണ്ടും പച്ചയായത് $20 \times 15 = 300$ ആണല്ലോ.

മിച്ചമുള്ള $2000 - 300 = 1700$ ജോടികളിലെല്ലാം ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം. അതായത്, ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$.



(1) 10 A ക്ലാസിൽ 30 ആൺകുട്ടികളും, 20 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. 10 B ക്ലാസിൽ 15 ആൺകുട്ടികളും, 25 പെൺകുട്ടികളും. ഓരോ ക്ലാസിൽനിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കണം.

i) രണ്ടും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ii) രണ്ടും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

iii) ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയുമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

iv) ഒരാൺകുട്ടിയെങ്കിലും ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(2) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.

i) ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

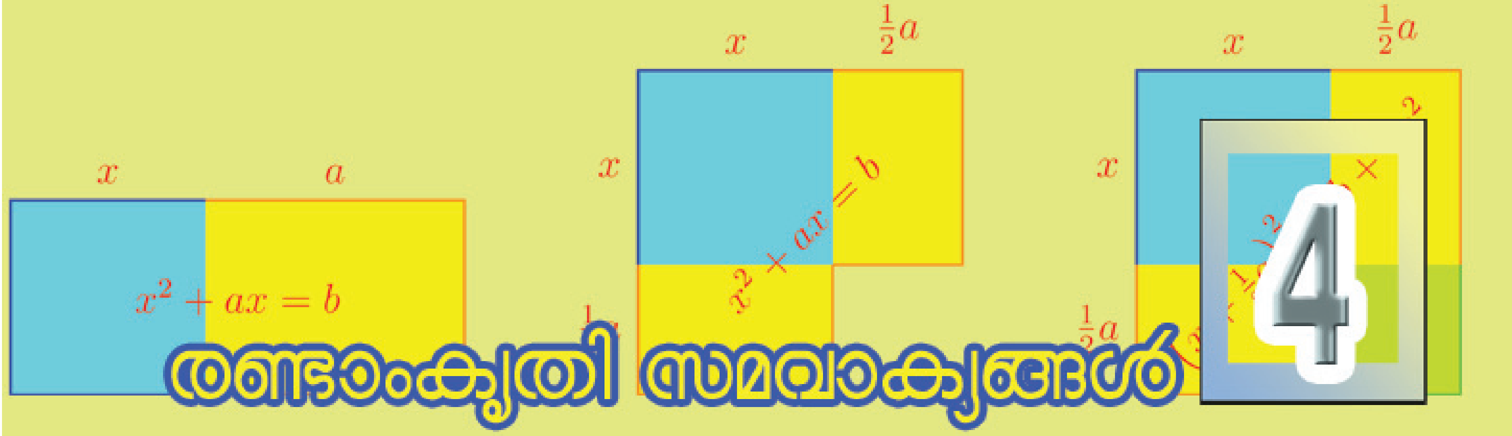
ii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

iii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

(3) 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ള രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യതയുള്ള തുക എന്താണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സാധ്യതയെ സംഖ്യയായി വിശദീകരിക്കുന്നു. • വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളിൽ സാധ്യത കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു. • പ്രായോഗിക സന്ദർഭങ്ങളിൽ സാധ്യതയെ സംഖ്യാപരമായി വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന്റെ ആവശ്യകത സമർഥിക്കുന്നു.			



രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

വർഗപ്രശ്നങ്ങൾ

ഒരു കണക്കിൽനിന്നു തുടങ്ങാം:

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 മീറ്റർ ആയി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $36 \div 4 = 9$ മീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $9 - 1 = 8$ മീറ്റർ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായാലോ?

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു?

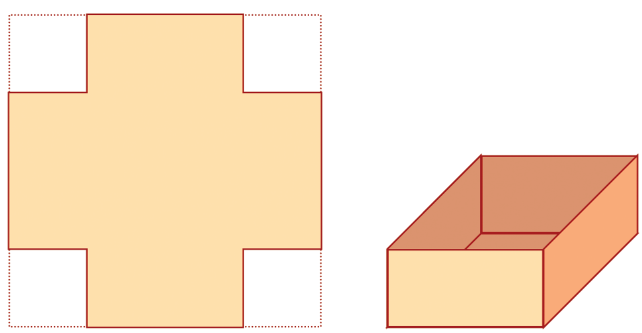
പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

$\sqrt{36} = 6$ മീറ്റർ, അല്ലേ?

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 1 = 5$ മീറ്റർ

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

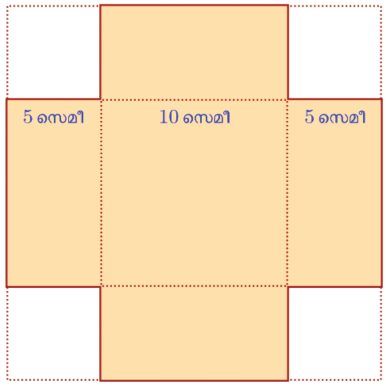
സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള കട്ടിക്കടലാസിന്റെ നാലു മൂലകളിൽനിന്നും ഓരോ ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റി, മേലോട്ടു മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കണം. പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററും വേണം.



ആദ്യം എടുക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ്, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണല്ലോ. ഈ കണക്കിൽ, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ലിറ്ററാണ്. അതായത്, 500 ഘനസെന്റിമീറ്റർ. ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ.

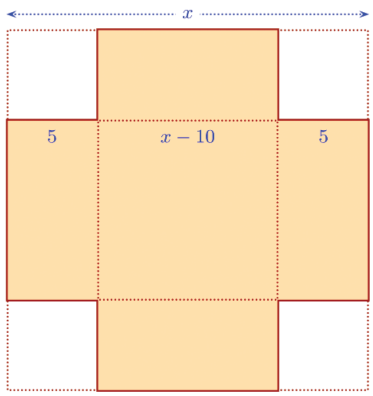
അപ്പോൾ പെട്ടിയുടെ പാദപരപ്പളവ് $500 \div 5 = 100$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. പാദം ഒരു സമചതുരമായതിനാൽ (കാരണം?) അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ.



ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിൽ നിന്നും $2 \times 5 = 10$ സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചാണ് ഈ സമചതുരം കിട്ടിയത്.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശം $10 + 10 = 20$ സെന്റിമീറ്റർ.

ഇങ്ങനെ പുറകോട്ട് ആലോചിക്കുന്നതിനുപകരം, ആദ്യം നേരേ ആലോചിച്ച് പ്രശ്നം ബീജഗണിത രൂപത്തിലാക്കാം. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, പെട്ടിയുടെ പാദം $(x - 10)$ സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരമാണെന്നു കാണാം.



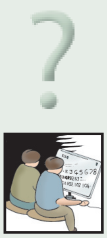
പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉള്ളളവ് $5(x - 10)^2$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയാകും:

$5(x - 10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

തുടർന്ന് ഇങ്ങനെ പുറകോട്ടാലോചിക്കാം:

- $5(x-10)^2 = 500$ ആകണമെങ്കിൽ, $(x-10)^2 = 500 \div 5 = 100$ ആകണം.
- $(x-10)^2 = 100$ ആകണമെങ്കിൽ, $x - 10 = \sqrt{100} = 10$ ആകണം.
- $x - 10 = 10$ ആകണമെങ്കിൽ, $x = 10 + 10 = 20$ ആകണം.



ഈ കണക്കുകൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയോ അല്ലാതെയോ ചെയ്യുക.

(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ കുറച്ച് ചെറുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 49 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര മീറ്ററായിരുന്നു?

(2) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) 2, 5, 8, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗമാണ് 2500?

(4) വാർഷികമായി കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു പദ്ധതിയിൽ 2000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. രണ്ടു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 2205 രൂപയായി. പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്?

വർഗത്തികവ്

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

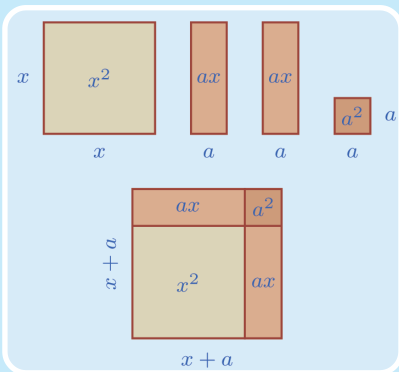
പച്ച നിറത്തിലൊരു സമചതുരവും, അതേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു ചുവന്ന ചതുരങ്ങളും, മഞ്ഞ നിറത്തിലൊരു ചെറുസമചതുരവും ചേർത്തു വച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടു ചുവന്ന ചതുരങ്ങളുടെ വീതിയും, മഞ്ഞ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവുമെല്ലാം 1 മീറ്ററാണ്; ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

ജ്യാമിതീയ വർഗം

x, a ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

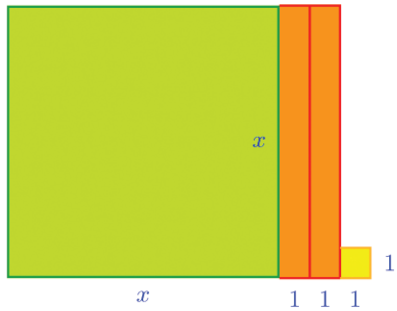
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. x, a അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഇക്കാര്യത്തിന് ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം കൊടുക്കാം:



പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.

നേരിട്ടാലോചിച്ചു കണക്കാക്കാൻ വിഷമമാണ്, അല്ലേ?



ബീജഗണിതം പരീക്ഷിക്കാം. പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം:

ആകെ പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം.

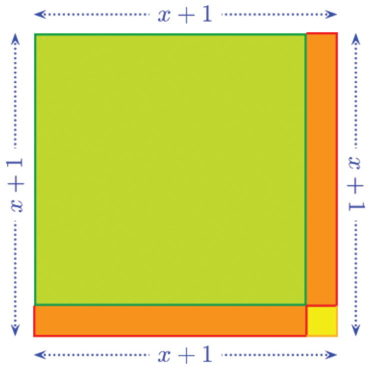
$x^2 + 2x + 1 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x + 1$ എന്ന രൂപം പരിചയമുണ്ടോ?

എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കിയും

ഇതു കാണാം.

അപ്പോൾ പ്രശ്നം മാറ്റിയെഴുതാം:

$(x + 1)^2 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനി, $x + 1 = 10$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = 9$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 9 മീറ്ററാണ്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ആദ്യം പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 2$ മീറ്റർ;

പരപ്പളവ് $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇനി ചതുരപ്രശ്നം, ബീജഗണിതപ്രശ്നമാക്കാം:

$x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ; അതിൽ $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)^2$ എന്നു മാറ്റിയെഴുതിയാണ് മുന്നോട്ട് പോയത്. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 2x$ മാത്രമേയുള്ളൂ.

1 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

- $x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$
- അതായത് $(x + 1)^2 = 225$
- $(x + 1)^2 = 225$ ആണെങ്കിൽ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$
- $x + 1 = 15$ ആണെങ്കിൽ $x = 14$

അങ്ങനെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം 14 മീറ്റർ എന്നു കിട്ടി. അപ്പോൾ വലിയ വശം $14 + 2 = 16$ മീറ്റർ. ഈ ചോദ്യം തന്നെ അൽപമൊന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെ ആക്കിയാലോ?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ മാറും:

$$x^2 + 20x = 224 \text{ ആണെങ്കിൽ } x \text{ എന്താണ്?}$$

ഇവിടെയും 1 കൂട്ടിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ സംഖ്യ $225 = 15^2$ ആകും; പക്ഷേ, ഇടതുവശം $x^2 + 20x + 1$ എന്നാണാകുന്നത്. ഇതിനെ $(x + a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ? $x^2 + 20x$ നെ വർഗരൂപത്തിലാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

a ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിലെ $2ax$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $20x$ ആണ്.

അപ്പോൾ, a ആയി 10 എടുത്തു നോക്കിയാലോ?

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x = 224$ ആണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് 100 കൂട്ടി തുടരാം.

$$x^2 + 20x = 224$$

$$x^2 + 20x + 100 = 324$$

വ്യത്യസ്തമാർഗം

$x(x + 20) = 224$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x + 20$ നെ $(x + 10) + 10$ എന്നും, x നെ $(x + 10) - 10$ എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ

$$x(x + 20) = \big((x + 10) - 10\big)\big((x + 10) + 10\big)$$
$$= (x + 10)^2 - 10^2$$

തുടങ്ങിയ സമവാക്യം

$$(x + 10)^2 - 100 = 224$$

എന്നാകും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x + 10)^2 = 324$$

എന്നെഴുതി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x = 3000$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

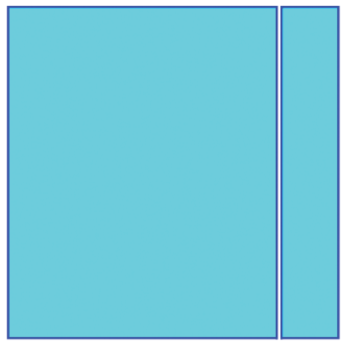
$$(x+10)^2 = 324$$
$$x+10 = \sqrt{324} = 18$$
$$x = 8$$

അങ്ങനെ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും, 28 മീറ്ററുമാണെന്നു കണക്കാക്കാം.

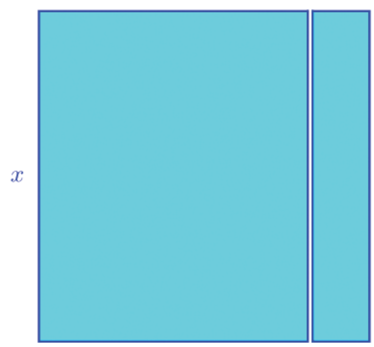
വേറൊരു ചതുരക്കണക്ക്:

> **സമചതുരം വീണ്ടും!**
>
> 20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള പലപല ചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് എന്നറിയാമല്ലോ.
>
> ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം. ഇത്തരത്തിലൊരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്,
>
> $$p(x) = x(10-x) = 10x - x^2 = -(x^2-10x)$$
>
> ഇത്തരം ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഈ ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. വർഗം തികച്ച്,
>
> $$p(x) = -\left((x-5)^2-25\right) = 25-(x-5)^2$$
>
> എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x-5)^2$ ന്യൂനസംഖ്യയാകില്ല; അതിനാൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യ 25 നേക്കാൾ കൂടുതലാകില്ല. $x = 5$ എന്നെടുത്താൽ, $p(x) = 25$ എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

ഒരു സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു കഷണം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു;



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ചതുരശ്രമീറ്റർ. സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?



സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, $(x-2)$ മീറ്റർ എന്നാകും:

അപ്പോൾ മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$x(x-2) = x^2 - 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും:

$x^2 - 2x = 99$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

$x^2 + 2x$ നെപ്പോലെ $x^2 - 2x$ നെയും വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സമവാക്യം ഓർത്തുനോക്കൂ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

ഇനി പ്രശ്നത്തിലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 99 \\ x^2 - 2x + 1 &= 100 \\ (x-1)^2 &= 100 \\ x - 1 &= 10 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 11 മീറ്റർ.

ഈ കണക്കുനോക്കൂ:

> ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ തുക 50 മീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $(50 - x)$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ് $x(50 - x) = 50x - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$50x - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇടതു ഭാഗം $x^2 - 50x$ ആയിരുന്നുവെങ്കിൽ, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ തുടരാമായിരുന്നു. അപ്പോൾ സമവാക്യം അൽപം മാറ്റിയെഴുതാം. $50x$ എന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 525 കിട്ടണമെങ്കിൽ, തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ അതിന്റെ ന്യൂനമായ -525 കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാക്കാം.

> $x^2 - 50x = -525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ഇനി $x^2 - 50x$ നോട് ഒരു സംഖ്യകൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

$$(x - 25)^2 = x^2 - 50x + 625$$

കൂട്ടിയും കുറച്ചും

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും തുക 50 മീറ്റർ ആയതിനാൽ നീളം $(25 + x)$ മീറ്റർ എന്നും വീതി $(25 - x)$ മീറ്റർ എന്നും എടുക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ പരപ്പളവ് $(25 - x)(25 + x) = 625 - x^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇനി x ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം

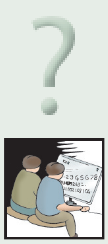
$$625 - x^2 = 525$$
$$x^2 = 100$$
$$x = 10$$

ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ
$25 - 10 = 15$ മീറ്റർ,
$25 + 10 = 35$ മീറ്റർ

ഇനി നമ്മുടെ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 50x &= -525 \\
x^2 - 50x + 625 &= -525 + 625 = 100 \\
(x - 25)^2 &= 100 \\
x - 25 &= 10 \\
x &= 35
\end{aligned}
$$

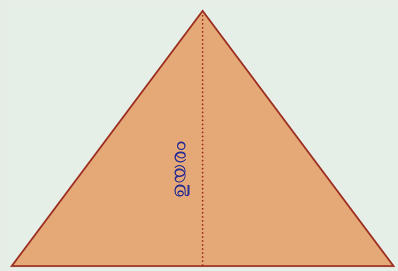
അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 മീറ്ററും 15 മീറ്ററും.



(1) അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 1 കൂട്ടിയാൽ 289 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

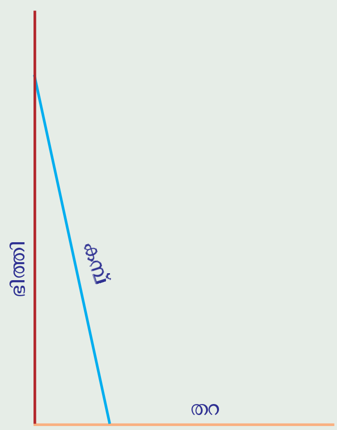
(2) 6 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൂടെ 9 കൂട്ടിയാൽ 729 കിട്ടും. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(3) ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം:



ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര മീറ്ററുമാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

(4) 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ചുവരിൽവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട് ഭിത്തിയിൽനിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കമ്പിന്റെ താഴത്തെ അറ്റം ചുവരിൽനിന്ന് അല്പം മുന്നോട്ടു നീക്കിയപ്പോൾ, മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ താഴോട്ട് നീങ്ങി. എത്ര ദൂരമാണ് മുന്നോട്ട് നീക്കിയത്?



(5) 9, 11, 13, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയും 16 ഉം കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 കിട്ടി. എത്ര പദങ്ങളാണ് കൂട്ടിയത്?

(6) 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള ആദ്യത്തെ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് 140 കിട്ടുക?

(7) ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ മുന്നൂറു കിലോമീറ്റർ യാത്ര ചെയ്ത് സമ്മേളനത്തിനെത്തി. പ്രസംഗത്തിനിടയിൽ പറഞ്ഞു:

"എന്റെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ പത്തു കിലോമീറ്റർ കൂട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ ഒരു മണിക്കൂർ മുമ്പേ എത്താമായിരുന്നു."

ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരുന്നു?

(8) മുപ്പതു മിഠായി കുറേ കുട്ടികൾക്കു വീതിച്ചു കൊടുത്തു. മധുരം നുണഞ്ഞുകൊണ്ടൊരു കൊച്ചുകണക്കുകാരൻ പറഞ്ഞു.

"നമ്മളിൽ ഒരാൾ കുറവായിരുന്നെങ്കിൽ, എല്ലാവർക്കും ഒരു മിഠായികൂടി കിട്ടുമായിരുന്നു."

കൂട്ടത്തിലെത്ര കുട്ടികളുണ്ടായിരുന്നു?

രണ്ട് ഉത്തരം

വേഗവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് ചില കാര്യങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു നേർവരയിലൂടെ ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാൻ, വേഗത്തെ സമയംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി. ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതസമവാക്യമായി എഴുതാം.

u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തു t സെക്കന്റുകൊണ്ട് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

$$s = ut$$

ഇനി വേഗം മാറുന്നുണ്ടെങ്കിലോ? വേഗം നിരന്തരം കൂടുകയാണെങ്കിൽ ഓരോ സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവും കൂടും. വേഗം നിരന്തരം കുറയുകയാണെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവും കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കും. ദൂരം മാറുന്നതിനുമൊരു കണക്കുണ്ട്. u മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടുന്നു എന്നു കരുതുക; t സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും a മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുകയാണു ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ,

$$s = ut - \frac{1}{2} at^2$$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> 40 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം, സെക്കന്റിൽ 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നു. സഞ്ചരിച്ച സമയവും, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

t സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നുള്ള അകലം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യം പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

$$s = 40t - \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 40t - 4t^2$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏതു സമയത്തും തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് വസ്തു എന്നു കണക്കാക്കാം:

സമയം	1	2	3	4	5	6
അകലം	36	64	84	96	100	96

അകലം കുറേനേരം കൂടിയ ശേഷം കുറയുന്നതെന്തുകൊണ്ടാണ്?

40 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നതിനാൽ, 5 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ വേഗം 0 ആകും. തുടർന്നുള്ള സമയം എതിർദിശയിലാണ് സഞ്ചാരം. (വേഗം നിരന്തരം കുറയുന്നതുതന്നെ എതിർദിശയിൽ ഒരു ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ്)

മുകളിലെ പട്ടിക അൽപം കൂടി നീട്ടിയാൽ മടക്കയാത്ര വ്യക്തമാകും:

സമയം	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
അകലം	36	64	84	96	100	96	84	64	36	0	-44

അതായത്, 10 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തുതന്നെ തിരിച്ചെത്തും; 11 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, മറുവശത്ത് 44 മീറ്റർ അകലെയാകും. പട്ടികയിലെ ന്യൂനസംഖ്യ ഇതാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഈ പട്ടികയുപയോഗിച്ച്, ഓരോ സമയത്തെയും അകലം കണ്ടുപിടിക്കാം; മറിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തെത്താനുള്ള സമയം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഉദാഹരണമായി,

> ഏതു സമയത്താണ് തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 99 മീറ്റർ അകലെയായിരിക്കുക?

അതിന് $40t - 4t^2 = 99$ ആകണം. മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഈ സമവാക്യം മാറ്റിയെഴുതാം:

$$4t^2 - 40t = -99$$

ഇതിൽ t^2 ന്റെ ഗുണകം 4 ആണല്ലോ. ആദ്യം അത് 1 ആക്കണം. (ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം അങ്ങനെ ആയിരുന്നുവല്ലോ). അതിന് 4 കൊണ്ടു ഹരിക്കണം:

$$t^2 - 10t = \frac{-99}{4}$$

ഇനി മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ, $t^2 - 10t$ യോട് ഒരു സംഖ്യകൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

$$(t - 5)^2 = t^2 - 10t + 25$$

ഇനി 25 കൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കി തുടരാം

(ഇവിടെ t യുടെ ഗുണകമായ -10 ന്റെ പകുതിയുടെ വർഗമാണല്ലോ 25)

$$t^2 - 10t + 25 = 25 - \frac{99}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(t - 5)^2 = \frac{1}{4}$$

$$t - 5 = \frac{1}{2}$$

$$t = 5\frac{1}{2}$$

അപ്പോൾ $5\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 99 മീറ്റർ അകലെയായിരിക്കും.

പക്ഷേ പട്ടികയിലെ ക്രമം നോക്കിയാൽ 5 സെക്കന്റിന് ഒരേ സമയം പിന്നിലും മുന്നിലും വസ്തു ഒരേ സ്ഥാനത്തു തന്നെയാണെന്നു കാണാം. (മുമ്പോട്ടുള്ള യാത്രയിലും, മടക്കയാത്രയിലും). ഉദാഹരണമായി 4 സെക്കന്റിലും 6 സെക്കന്റിലും 96 മീറ്റർ അകലെയാണ്. അതുപോലെ 3 സെക്കന്റിലും 7 സെക്കന്റിലും 84 മീറ്റർ അകലെയാണ്. അപ്പോൾ 5 സെക്കന്റിന് $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റ് മുമ്പും ശേഷവും വസ്തു ഒരേ സ്ഥാനത്ത് തന്നെയാകണം. $\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിനുശേഷം, അതായത്, $5\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിൽ, വസ്തു 99 മീറ്റർ അകലെയാണെന്ന് കിട്ടി. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് $4\frac{1}{2}$ സെക്കന്റിലും വസ്തു 99 മീറ്റർ അകലെത്തന്നെയായിരിക്കേണ്ടേ?

സമയ-ദൂര സമവാക്യത്തിൽ $t = 4\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ

$$40t - 4t^2 = \left(40 \times 4\frac{1}{2}\right) - 4 \times \left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(40 \times \frac{9}{2}\right) - \left(4 \times \frac{81}{4}\right) = 180 - 81 = 99$$

എന്നുതന്നെ കിട്ടുന്നുമുണ്ട്.

$40t - 4t^2 = 99$ ആകാൻ t എന്താകണമെന്നു കണക്കാക്കിയപ്പോൾ $t = 4\frac{1}{2}$ എന്ന രണ്ടാമത്തെ ഉത്തരം കിട്ടാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

$t = 5\frac{1}{2}$ എന്ന ഉത്തരം കിട്ടിയ വഴികൾ ഒന്നു കൂടി നോക്കാം. അതിലൊരിടത്ത് $(t-5)^2 = \frac{1}{4}$ ആകണമെങ്കിൽ $t - 5 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്തല്ലോ. വർഗം $\frac{1}{4}$ ആകുന്ന സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ മാത്രമാണോ?

$-\frac{1}{2}$ ന്റെ വർഗം എന്താണ്?

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം $\frac{1}{4}$ എന്നു കിട്ടിയാൽ, സംഖ്യ $\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{2}$ എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ.

അതിനാൽ, നമ്മുടെ കണക്കിൽ,

$$(t - 5)^2 = \frac{1}{4}$$

എന്നതിൽ നിന്ന്,

$$t - 5 = \frac{1}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } t - 5 = -\frac{1}{2}$$

എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഇതിൽ $t - 5 = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യം കണ്ടുപിടിച്ചപോലെ $t = 5\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും. $t - 5 = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ രണ്ടാമതു കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ $t = 4\frac{1}{2}$ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ഇങ്ങനെ ന്യൂനവർഗമൂലവും എടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ മറ്റൊരുത്തരം കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നോ?

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത ഒരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും, പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x + 1)^2 = 225$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. തുടർന്ന് $x + 1 = 15$ എന്നെടുത്ത്, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 14 മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ബീജഗണിതം മാത്രം നോക്കിയാൽ $x + 1 = -15$ എന്നും ആകാം;

അതായത്, $x = -16$

പക്ഷേ ഈ കണക്കിൽ x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ അതൊരു അധിസംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $x = -16$ എന്ന ഉത്തരം ചതുരക്കണക്കിനു പറ്റിയതല്ല.

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x - 25)^2 = 100$ എന്നു കണ്ടു. ഇതിൽനിന്ന്, $x - 25 = 10$ എന്നെടുത്ത്, ഒരു വശം 35 മീറ്റർ, മറ്റെ വശം $50 - 35 = 15$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ന്യൂനവർഗമൂലം എടുത്താലോ? $x - 25 = -10$ എന്നും, ഇതിൽ നിന്ന് $x = 15$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ, മറ്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - 15 = 35$ മീറ്റർ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളിൽ ഏതെടുത്താലും ഒരേ ചതുരം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതസമവാക്യമാക്കി, ഗണിതപരമായി മാത്രം ആലോചിക്കുമ്പോൾ, ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉത്തരങ്ങൾ കിട്ടിയെന്നിരിക്കും. ഇവയിൽ ചിലതു മാത്രമോ, എല്ലാം തന്നെയോ, തുടങ്ങിയ പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തിന് യോജിച്ചതല്ലെന്നും വരാം.

അപ്പോൾ സാധാരണയായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, തുടർന്ന് ഇവയിൽ നിന്ന് സന്ദർഭത്തിന് യോജിച്ചവ മാത്രം എടുക്കുകയുമാണ് പതിവ്.

(1) ഒരു സംഖ്യയും, അതിനോടു 2 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചപ്പോൾ 168 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

(2) തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) 99, 97, 95, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 900 കിട്ടുന്നത്?

(4) ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $2\frac{1}{6}$ ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

(5) ഒരു സംഭരണിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കാൻ രണ്ടു കുഴലുകളുണ്ട്. രണ്ടും തുറന്നു വച്ചാൽ, 12 മിനിറ്റുകൊണ്ട് സംഭരണി നിറയും. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയം, വലിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയത്തേക്കാൾ 10 മിനിറ്റു കൂടുതലാണ്. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ എത്ര സമയം കൊണ്ട് സംഭരണി നിറയും?

സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, x ആയി പല സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ആയി പല സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$$p(1) = 4 + 24 + 11 = 39$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(4 \times \frac{1}{4}\right) + \left(24 \times \frac{1}{2}\right) + 11 = 1 + 12 + 11 = 24$$

$$p(-1) = 4 - 24 + 11 = -9$$

മറിച്ച്, $p(x)$ ആയി ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം എന്നും ചോദിക്കാം. ഉദാഹരണമായി,

$p(x) = 4x^2 + 24x + 11$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി ഏത് സംഖ്യ എടുക്കണം?

ഈ ചോദ്യം അൽപംകൂടി ലഘൂകരിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$4x^2 + 24x = -11$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

ഇത്തരം കണക്കുകൾ ധാരാളം ചെയ്തു കഴിഞ്ഞല്ലോ.

x കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ ഘട്ടങ്ങൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക: $x^2 + 6x = -\frac{11}{4}$

xന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ പകുതിയുടെ

$$\text{വർഗം കൂട്ടുക} : x^2 + 6x + 9 = -\frac{11}{4} + 9$$

$$\text{വർഗമായി എഴുതുക} : (x+3)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\text{വർഗമൂലമെടുക്കുക} : x + 3 = \frac{5}{2}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$x + 3 = -\frac{5}{2}$$

$$x \text{ കണക്കാക്കുക} : x = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$x = -\frac{5}{2} - 3 = -5\frac{1}{2}$$

അതായത്, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -\frac{1}{2}$ എന്നോ $x = -5\frac{1}{2}$ എന്നോ എടുക്കണം

ഇനി $p(x) = 1$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിലോ?

$p(x) = 1$ എന്നതിനെ $p(x) - 1 = 0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ; അതായത്,

അൽപം ചരിത്രം

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയ്ക്ക് ഏറെ പഴക്കമുണ്ട്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1500 ൽ തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർ, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രീതി പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം.

എന്നാൽ ഇന്നത്തെപ്പോലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്ന രീതിയൊന്നും അന്നില്ലായിരുന്നു. (ഈ രീതിയ്ക്ക് ഏറിയാൽ അഞ്ഞൂറു വർഷത്തെ പഴക്കമേയുള്ളൂ.) പ്രശ്നങ്ങളും, അവയുടെ പരിഹാരമാർഗങ്ങളുമെല്ലാം സാധാരണ ഭാഷയിലാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്. ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങളാകുമ്പോൾ, പരിഹാരമാർഗങ്ങളും ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽത്തന്നെ ആയിരുന്നു.

അതായത്, ബീജഗണിതരീതികളുടെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായി നാം ഇന്നവതരിപ്പിക്കുന്ന പലതും, ചരിത്രപരമായി നോക്കിയാൽ, ഈ ബീജഗണിതരീതികളുടെ ആദിരൂപമാണ്.

$$4x^2 + 24x + 10 = 0$$

$4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $q(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാകും.

> $q(x) = 4x^2 + 24x + 10$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $q(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ x ആയി എന്തു സംഖ്യ എടുക്കണം?

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ മുന്നോട്ടു പോകാം:

$$\begin{aligned}
4x^2 + 24x + 10 &= 0 \\
4x^2 + 24x &= -10 \\
x^2 + 6x &= -\frac{5}{2} \\
x^2 + 6x + 9 &= 9 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \\
(x+3)^2 &= \frac{13}{2} \\
x + 3 &= \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\sqrt{\frac{13}{2}} \\
x &= -3 + \sqrt{\frac{13}{2}} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -3 - \sqrt{\frac{13}{2}}
\end{aligned}$$

$-3 + \sqrt{\frac{13}{2}}$ അല്ലെങ്കിൽ $-3 - \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിനെ ചുരുക്കി $-3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അതായത് $p(x) = 1$ എന്നു കിട്ടാൻ $x = -3 \pm \sqrt{\frac{13}{2}}$ എന്നതിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ എടുക്കണം.

ഇനി ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് 0 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പൊതുവായ മാർഗം നോക്കാം. ഏതു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിനെയും

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ $p(x) = 0$ ആകുന്ന x കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

- $ax^2 + bx + c = 0$ എന്നതിനെ മാറ്റിയെഴുതുക

$$ax^2 + bx = -c$$

- x^2 ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- x ന്റെ ഗുണകമായ $\frac{b}{a}$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടുക

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമായി എഴുതുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- വർഗമൂലമെടുക്കുക

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- x കണക്കാക്കുക

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

അതായത്

> $p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടാൻ
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> എന്നെടുക്കണം

വികർണക്കണക്ക്

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ മാത്രമല്ല, വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കാണാനും, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി പണ്ടേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

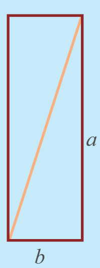
ഉദാഹരണമായി വീതി കുറഞ്ഞ, ഉയരം കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി, പുരാതന ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്, ഇങ്ങനെയാണ്.

വീതിയുടെ വർഗത്തിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, അതിന്റെ പകുതി ഉയരത്തോട് കൂട്ടുക.

ഇത്, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

എന്നാകും.



ഇതിന്റെ യുക്തിയും ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാമോ.

ഇതൽപം ചുരുക്കിയെഴുതാം:

> $ax^2 + bx + c = 0$ ആകണമെങ്കിൽ
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> ആകണം

നേരത്തെ ചെയ്ത പല കണക്കുകളിലും, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള പല ഘട്ടങ്ങളെ ഒരുമിച്ചെടുത്ത് ഒറ്റവരിയിൽ ഉത്തരമെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, **രണ്ട് ഉത്തരം** എന്ന ഭാഗത്തിലെ ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ, തുടങ്ങിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 99 മീറ്റർ അകലെയെത്തുന്ന സമയം കണക്കാക്കാൻ $40t - 4t^2 = 99$ ആകാൻ t എന്തു സംഖ്യ ആയിരിക്കണം എന്നു കണക്കാക്കിയല്ലോ. ഈ പ്രശ്നം തന്നെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$4t^2 - 40t + 99 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെഴുതിയ പൊതുതത്വത്തിൽ a, b, c ആയി $4, -40, 99$ എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ മതി:

$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \times 4 \times 99}}{2 \times 4}$$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 16 \times 99}}{8} = \frac{40 \pm \sqrt{16}}{8}$$

അതായത്,

$$t = \frac{40 \pm 4}{8} = \frac{44}{8} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{36}{8}$$

ഇതിൽ നിന്ന്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലത്തന്നെ $t = 5\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $4\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കുക:

> 30 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഒരു കല്ല് നേരെ മുകളിലോട്ടെറിയുന്നു. t സെക്കന്റിൽ നിലത്തുനിന്നുള്ള ഉയരം s മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, s, t ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം
>
> $$s = 30t - 4.9t^2$$

എന്നാണ്. ഏതു സമയത്താണ് കല്ല് നിലത്തുനിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുന്നത്?

ഇവിടെ $30t - 4.9t^2 = 20$ ആകുന്ന t ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, പ്രശ്നം ഇതാണ്:

$4.9t^2 - 30t + 20 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ t എന്തായിരിക്കണം?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഒറ്റവരിയിൽ

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \times 4.9 \times 20}}{9.8}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതു കണക്കാക്കാൻ കാൽക്കുലേറ്ററോ, കമ്പ്യൂട്ടറോ ഉപയോഗിക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം. അങ്ങനെ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി

$t \approx 5.36$ അല്ലെങ്കിൽ 0.76

എന്നു കണക്കാക്കാം.

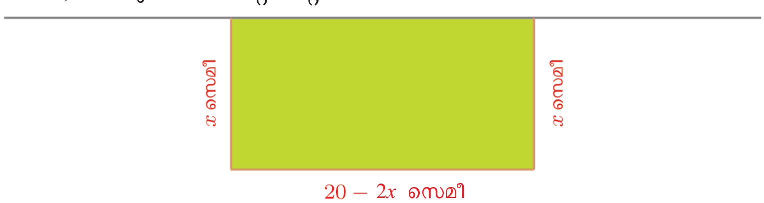
ഇതിൽ 0.76 സെക്കന്റ് എന്നത്, മേലോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവും, 5.36 സെക്കന്റ് എന്നത്, താഴോട്ടുള്ള യാത്രയിൽ 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലെത്തുന്ന സമയവുമാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

20 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയറുകൊണ്ട് നിലത്ത് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം ഒരു മതിലും:

ചതുരത്തിന് 50 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവ് വേണം. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയായിരിക്കണം?

ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നിളം $20 - 2x$ മീറ്റർ, പരപ്പളവ് $x(20 - 2x) = 2x(10 - x)$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.



അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണ്:

$2x(10 - x) = 50$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം?

ആദ്യം സമവാക്യം ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

അതായത്,

$$(x-5)^2 = 0$$

വർഗം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, സംഖ്യയും പൂജ്യംതന്നെ. അതായത്, $x - 5 = 0$, അഥവാ $x = 5$

അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 5 മീറ്ററും, $20 - 10 = 10$ മീറ്ററും

വശങ്ങൾ മാറ്റി പരപ്പളവ് അൽപം കൂട്ടാൻ പറ്റുമോ? 1 ചതുരശ്രമീറ്ററെങ്കിലും?

$$\begin{aligned} 2x(10-x) &= 51 \\ 2x^2 - 20x + 51 &= 0 \end{aligned}$$

ഇതിൽ വർഗം തികച്ച് തുടരുക അത്ര എളുപ്പമല്ലാത്തതിനാൽ, സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കാം:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-408}}{4} = \frac{20 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

എന്താണിതിന്റെയർഥം? ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കൊന്നും വർഗമൂലമില്ലല്ലോ (അധിസംഖ്യയായാലും, ന്യൂനസംഖ്യയായാലും, വർഗം അധിസംഖ്യതന്നെയല്ലേ?)

ഈ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല എന്നാണ് ഇതിന്റെ അർഥം; മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, x ആയി ഏതു സംഖ്യയെടുത്താലും $x^2 - 20x + 51$ എന്ന സംഖ്യ 0 ആവില്ല.

സൂത്രവാക്യം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുപകരം, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയിൽ തുടർന്നിരുന്നെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയാകുമായിരുന്നു:

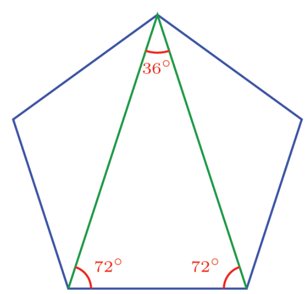
$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 25\frac{1}{2} &= 0 \\ x^2 + 10x + 25 &= -\frac{1}{2} \\ (x-5)^2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ഒരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം ന്യൂനമല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന സംഖ്യയൊന്നുമില്ലെന്ന് ഈ ഘട്ടത്തിൽ തിരിച്ചറിയാം.

ചതുരക്കണക്കിലേക്ക് തിരിച്ചു വരാം. പരപ്പളവ് 51 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നാണ് ഇതുവരെ പറഞ്ഞതിന്റെ ചുരുക്കം. ഇതുപോലെതന്നെ ആലോചിച്ചാൽ, പരപ്പളവ് 50 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററിൽനിന്ന് അൽപംപോലും കൂട്ടാൻ കഴിയില്ല എന്നു കാണാം.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു സമപഞ്ചഭുജത്തിലെ വികർണങ്ങൾ വശങ്ങളുടെ എത്ര മടങ്ങാണ്?

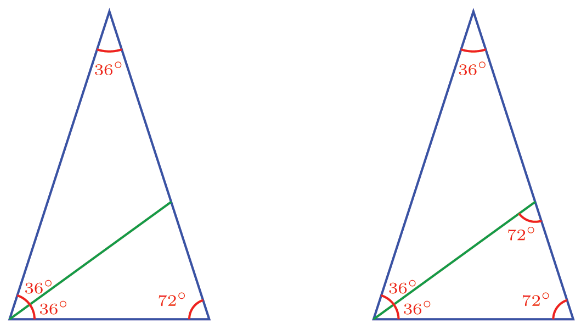


സമപഞ്ചഭുജത്തിലെ ഒരു വശവും രണ്ടു വികർണങ്ങളും ചേർന്നുണ്ടാക്കുന്ന ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ 36°, 72°, 72° എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാകും:

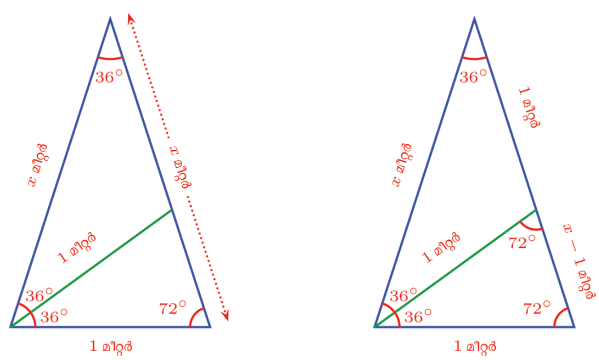
കോണുകൾ 36°, 72°, 72° എന്നിങ്ങനെയായ സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യവശങ്ങൾ, പാദത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്?

ഇത്തരം ത്രികോണത്തിനൊരു സവിശേഷതയുണ്ട്. അതു കാണാൻ, ഒരു പാദകോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ച്, എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടിക്കാം; തുടർന്ന്, അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും കണക്കാക്കാം.



അപ്പോൾ തുടങ്ങിയ വലിയ ത്രികോണത്തിനും, അതിനകത്തുള്ള താഴത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്; അതായത്, അവ സദൃശമാണ് (ഇനി ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു പാദകോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ച്, എതിർവശവുമായി മുട്ടിച്ചാലോ? വീണ്ടും അങ്ങനെ വലതുവശത്തു കിട്ടുന്ന കൊച്ചു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു 72° കോണിന്റെ സമഭാജി... അതവിടെ നിൽക്കട്ടെ).

നമ്മുടെ കണക്കിലേക്ക് വരാം: പാദം 1 മീറ്ററെന്നും തുല്യവശങ്ങളുടെ നീളം x സെന്റിമീറ്ററെന്നും എടുക്കാം; കോൺസമഭാജി മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സമപാർശ്വമായതിനാൽ, മറ്റു ചില നീളങ്ങളും കണക്കാക്കാം:



വലിയ ത്രികോണത്തിലും, താഴത്തെ ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായിരിക്കണം (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യം** എന്ന പാഠം).

ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ തുല്യവശങ്ങൾ 1 മീറ്ററും, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ തുല്യവശങ്ങൾ x മീറ്ററുമാണ്.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശം $x - 1$ മീറ്ററും, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശം 1 മീറ്ററുമാണ്.

ഈ മാറ്റങ്ങൾ ഒരേ തോതിലാണെന്നതിന്റെ സമവാക്യം

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

എതിർഗുണനമുപയോഗിച്ച് (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ഭിന്നസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം) ഇത് മാറ്റിയെഴുതാം.

$$x(x-1) = 1$$

ബഹുപദസമവാക്യമായി ഇങ്ങനെയുമാക്കാം:

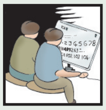
$$x^2 - x - 1 = 0$$

ഇനി സൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച് x കണക്കാക്കാം:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ഈ കണക്കിൽ x അധിസംഖ്യയായതിനാൽ, $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ എന്ന ഉത്തരം ശരിയാകില്ല. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യവശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ മീറ്റർ.

അതായത്, സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വികർണം, വശത്തിന്റെ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ മടങ്ങാണ്.



(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 42 മീറ്ററും, അതിന്റെ വികർണം 15 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

(2) 1 മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എത്ര വരെ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

(3) ഒരു അധിസംഖ്യയിൽനിന്ന് അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം കുറച്ചപ്പോൾ $1\frac{1}{2}$ കിട്ടി. സംഖ്യ എന്താണ്?

(4) ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $1\frac{1}{2}$ ആകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

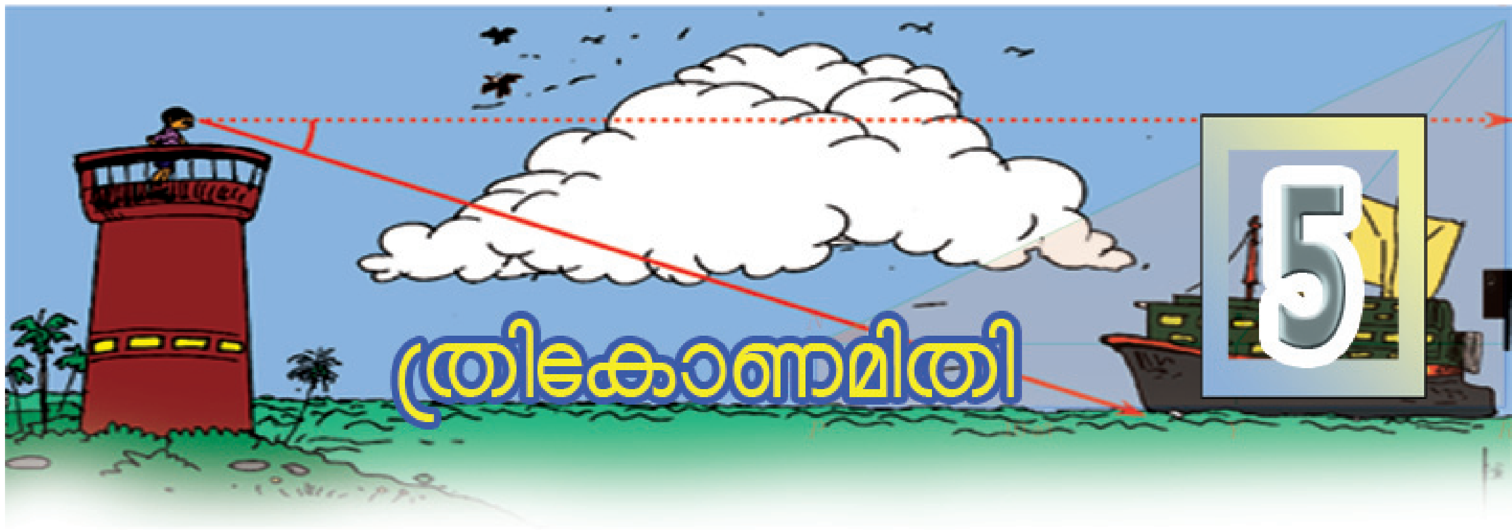
(5) നിശ്ചിത ചുറ്റളവും പരപ്പളവുമുള്ള ചതുരം നിർമിക്കാനുള്ള പ്രശ്നത്തെ സമവാക്യമാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 42 നുപകരം, 24 എന്നു തെറ്റായി

എഴുതിപ്പോയി. ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 10 എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്തു. പ്രശ്നത്തിലെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? ശരിയായ പ്രശ്നത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

(6) ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പകർത്തിയെഴുതിയപ്പോൾ, x ഇല്ലാത്ത സംഖ്യ -24 നുപകരം 24 എന്നെഴുതിപ്പോയി. ഉത്തരം കിട്ടിയത് 4, 6. ശരിയായ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരം എന്തൊക്കെയാണ്?

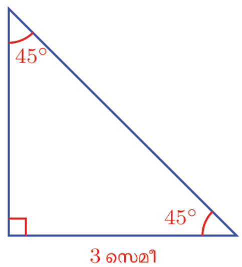
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• പ്രയോഗിക പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കാൻ കഴിയും എന്ന് തിരിച്ചറിയുന്നു. • വർഗം പൂർത്തീകരിച്ച് രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾക്കുള്ള പരിഹാരം കാണുന്ന മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു. • ചില പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളുടെ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങളും കാണുന്നതിനുള്ള മാർഗം വ്യക്തമാക്കുന്നു. • സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം ഭൗതികപ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം ആകുന്നതും ആകാത്തതുമായ സന്ദർഭങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.			



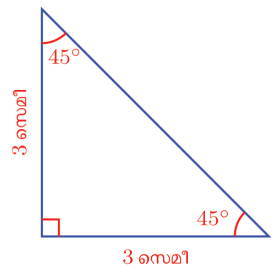
കോണുകളും വശങ്ങളും

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളമെന്താണ്?

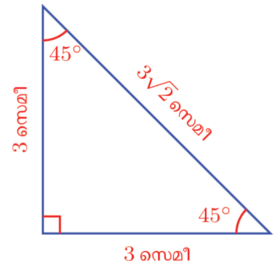
തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്നറിയാം അപ്പോൾ, വലതുവശത്തെ 45° കോണിനെതിരെയുള്ള ലംബവശത്തിന്റെയും നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ.



ഇനി കർണമോ?

പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച്, കർണത്തിന്റെ വർഗം, $3^2 + 3^2 = 18$

അപ്പോൾ കർണം, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ.



(9-ാം ക്ലാസിലെ **പുതിയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം)

ഇനി താഴത്തെ വശം അൽപം കൂട്ടി 5 സെന്റിമീറ്ററാക്കി ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താകും?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു ലംബവശത്തിന്റെ നീളം എന്തായാലും, അതുതന്നെയാണ് മറ്റേ ലംബവശത്തിന്റെയും നീളം; കർണത്തിന്റെ നീളം, ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്.

ഭൂമിയും മാനവും

ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി (trigonometry).

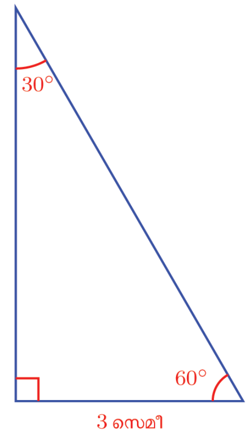
ചരിവിന്റെയും വിരിവിന്റെയും തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്; തിരിവിന്റെ അളവുകൾ, ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കുവേണ്ടിത്തന്നെയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്ര പഠനങ്ങളും നടന്നത്. ഭക്ഷണോല്പാദനം, അതായത് കൃഷി, കാലാവസ്ഥയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കാലാവസ്ഥയെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന ഒരു ഘടകം, സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ കറക്കമാണ്. ഇത് ശരിയായി അറിയണമെങ്കിൽ, മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെയും, നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമായത് ഇതുകൊണ്ടാണ്. അതിനാകട്ടെ ഗണിതം, വിശേഷിച്ചും ജ്യാമിതി, അത്യാവശ്യമാണുതാനും.

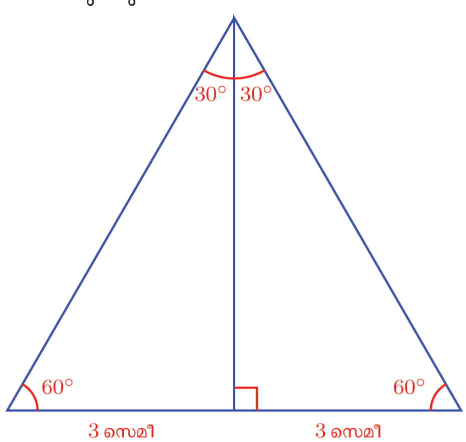
ഇക്കാര്യം അംശബന്ധത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ചുരുക്കിപ്പറയാം:

> കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ $1:1:\sqrt{2}$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

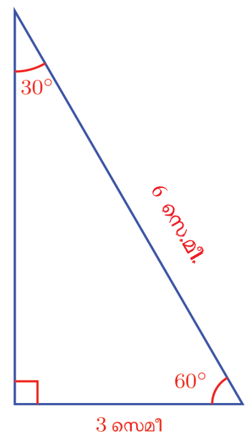
ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിനെ ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പകുതിയായി കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?



ഈ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം 6 സെന്റിമീറ്ററായതിനാൽ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതു തന്നെ. അപ്പോൾ നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ നീളവുമായി:



മൂന്നാമത്തെ വശമോ?

$$\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{(6+3)(6-3)} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ സെ.മീ.}$$

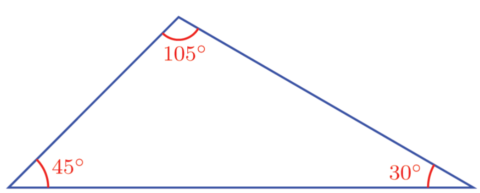
താഴത്തെ വശം 2 സെന്റിമീറ്ററായി കുറച്ച്, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ?

കർണം 4 സെന്റിമീറ്ററാകും; മൂന്നാമത്തെ വശം $2\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും.

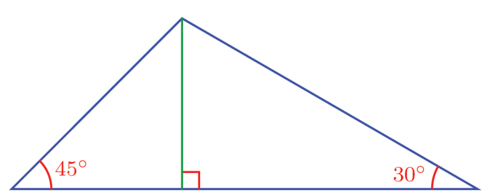
അപ്പോൾ ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം; ഇടത്തരം വശം $\sqrt{3}$ മടങ്ങും,

കോണുകൾ 30^o, 60^o, 90^o ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഈ രണ്ടുതരം ത്രികോണങ്ങളുപയോഗിച്ച്, മട്ടമല്ലാത്ത ചില ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ത്രികോണം നോക്കുക:

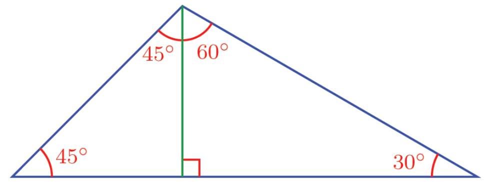


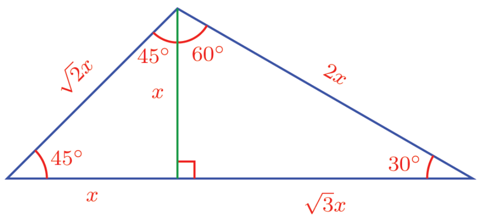
മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വശത്തേക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ, ഇതിനെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണമാക്കാമല്ലോ:



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $1:\sqrt{3}:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ അതിന്റെ കോണുകൾ 30^0, 60^0, 90^o ആയിരിക്കുമോ? ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കാം. ആദ്യം വശങ്ങൾ $1:\sqrt{3}:2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി Min = 0 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ വരയുടെ നീളം a* sqrt (3) എന്ന് നൽകുക ($a\sqrt{3}$ എന്നാണിതിനർഥം). ഈ വരയുടെ ഒരറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം a ആയ ഒരു വൃത്തവും മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം 2a ആയ മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും മൂലകളായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. ഇതേ രീതിയിൽ, വശങ്ങൾ $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് കോണുകൾ അളന്ന് നോക്കൂ.

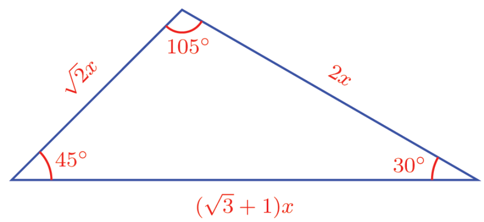
ഈ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മുകളിലെ കോണുകൾ എന്താണ്?





വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാൻ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയും പൊതുവായ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, നേരത്തെ കണ്ട അംശബന്ധങ്ങളുപയോഗിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം xന്റെ മടങ്ങുകളായി എഴുതാം:

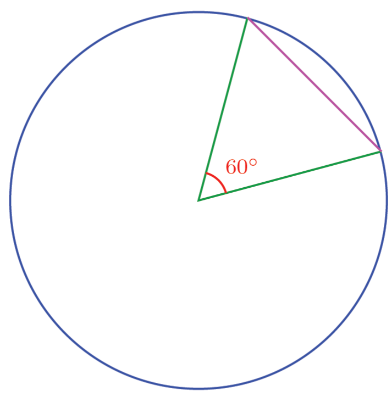
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്:

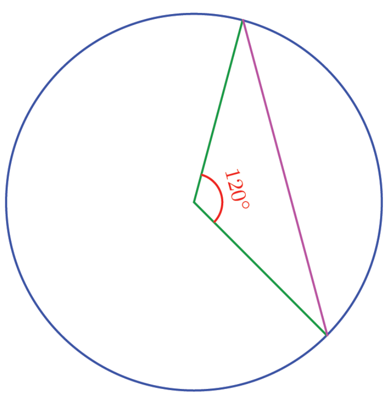


അതായത്,

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3} + 1$

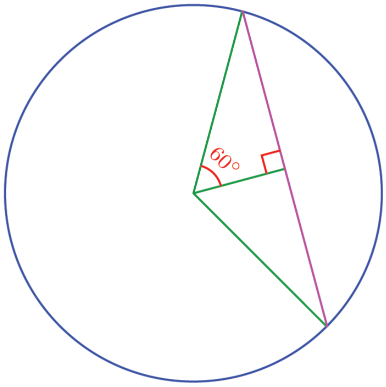
മറ്റു ചില അളവുകൾ കണക്കാക്കാനും ത്രികോണ അംശബന്ധങ്ങൾ സഹായകരമാണ്. ഉദാഹരണമായി ഒരു വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം:



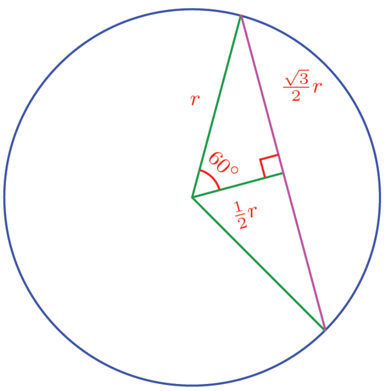


കേന്ദ്രകോൺ $120°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളമോ?

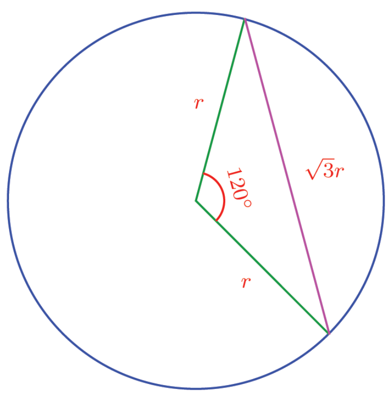
ഇതു കണക്കാക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം; അത് ഞാണിനെയും, കേന്ദ്രകോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം?):



ആരവും അര ഞാണും ലംബവും ചേർന്നുണ്ടാക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ $30°$, $60°$, $90°$. അപ്പോൾ ആരത്തിന്റെ നീളം r എന്നെടുത്താൽ, ലംബത്തിന്റെ നീളം $\frac{1}{2}\ r$ എന്നും, അര ഞാണിന്റെ നീളം $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ എന്നും കാണാം:



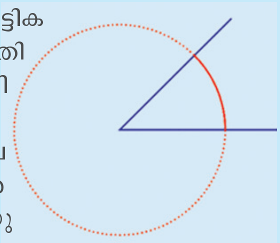
അപ്പോൾ കേന്ദ്രകോൺ $120°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ്:



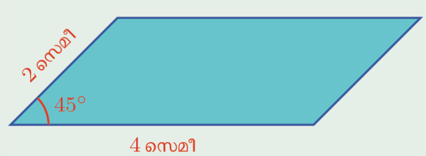
കേന്ദ്രകോൺ ഇരട്ടിക്കുമ്പോൾ ചാപം ഇരട്ടിക്കുമെന്ന് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. പക്ഷേ ഞാൺ ഇരട്ടിക്കുന്നില്ല എന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.

നേർവഴി?

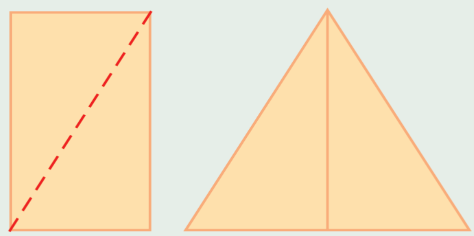
കോണിന്റെ വലുപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളമാണല്ലോ. അതിനുപകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്. വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടുകിട്ടിയിട്ടില്ല. എ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Claudius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}^{\circ}$ ഇടവിട്ട്, $180°$ വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.



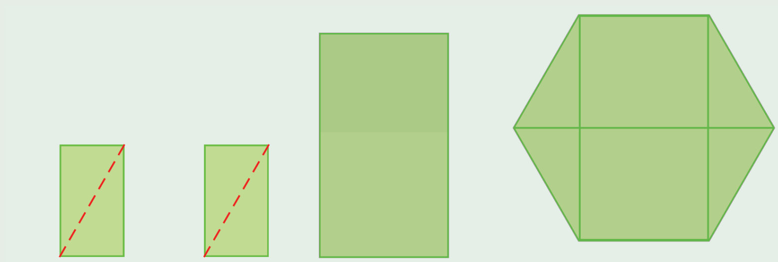
(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക



(2) ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

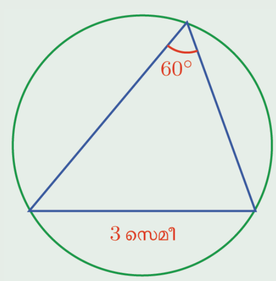


(3) രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:

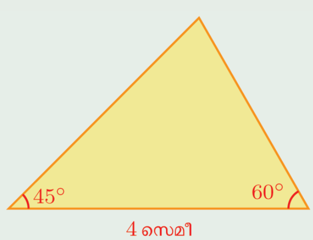


ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

(4) ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?



(5)



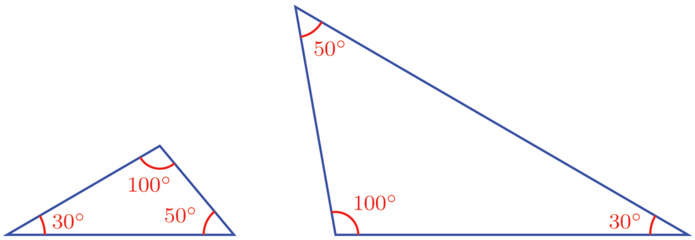
ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(6) വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്ത ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

പുതിയ കോണളവുകൾ

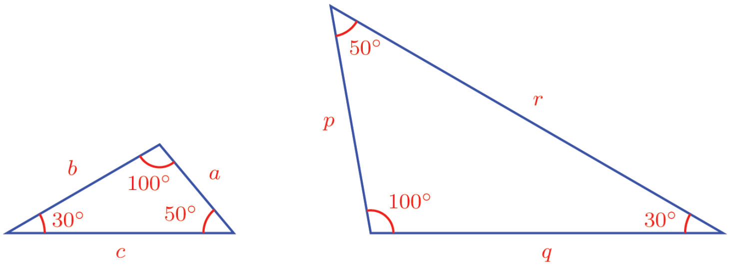
ചില ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകളിൽനിന്ന് അവയുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണക്കാക്കിയല്ലോ. ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഇതുപോലെ കോണുകൾ, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുമോ?

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ചോദ്യം വ്യക്തമാക്കാം; ഈ ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:



രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒരേ കോണുകളാണ്; അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തന്നെയാണോ വലിയ ത്രികോണത്തിലും?

ചെറിയ ത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങളുടെ നീളം, വലുപ്പക്രമത്തിൽ a, b, c എന്നും, വലിയ ത്രികോണത്തിൽ p, q, r എന്നും എഴുതിനോക്കാം:



രണ്ടു ത്രികോണത്തിലെയും തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അതായത് a, b, c എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് p, q, r എന്നീ സംഖ്യകൾ. ഈ മടങ്ങ് k എന്നെടുത്താൽ,

$$p = ak \qquad q = bk \qquad r = ck$$

എന്നു പറയാം; അംശബന്ധത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ

$$a : b : c = p : q : r$$

എന്നും പറയാം.

അതായത്,

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ പല വലുപ്പത്തിൽ വരച്ചാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുമെങ്കിലും അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല.

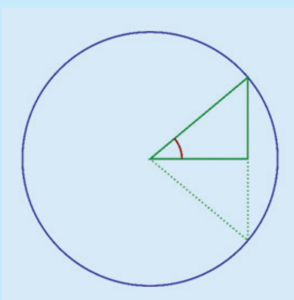
മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ,

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ, അതിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏത് ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. മറ്റു ചില കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കിയല്ലോ.

അര ഞാൺ

ടോളമിയുടെ പട്ടികയുപയോഗിച്ച്, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോണിനെതിരെയുള്ള വശം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുകയും, ഞാണിനെ പകുതിയാക്കുകയും വേണം. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, ഓരോ കോണും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ കോണിന്റെ പകുതി ഞാണും, ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.

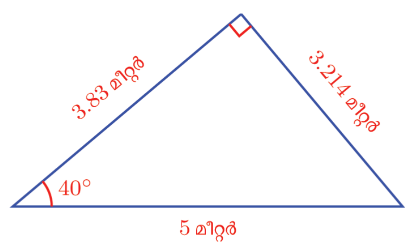


ഏ.ഡി. അഞ്ചാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിൽ രചിക്കപ്പെട്ട *സൂര്യസിദ്ധാന്തം* എന്ന ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇത്തരം ഒരു പട്ടിക കാണാം. ഇക്കാലത്തുതന്നെ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആര്യഭടൻ രചിച്ച *ആര്യഭടീയം* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലും ഇത്തരം പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ കാണാം. ഈ കോണളവിനെ അദ്ദേഹം *അർധജ്യാ* എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഞാണിന്, സംസ്കൃതത്തിൽ *ജ്യാ* എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പൊതുവേ കോണുകളിൽനിന്ന് വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. എന്നാൽ വളരെക്കാലം മുമ്പുതന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ എല്ലാ മട്ടത്രികോണങ്ങളിലും ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും, അങ്ങനെ കണക്കാക്കിയ സംഖ്യകൾ പ്രത്യേക രീതിയിൽ പട്ടികയാക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു കോൺ 40° ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ കർണത്തിന്റെ ഏകദേശം 0.6428 ഭാഗമാണ് ഈ കോണിനെതിരെയുള്ള വശമെന്നും, 0.7660 ഭാഗമാണ് മറ്റേ ലംബവശമെന്നും ഇത്തരം പട്ടികകളിൽ നിന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ കർണം 5 മീറ്ററും ഒരു കോൺ 40° യും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഈ കോണിനെതിരെയുള്ള വശം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ $5 \times 0.6428 = 3.214$ മീറ്റർ എന്നും മൂന്നാമത്തെ വശം $5 \times 0.766 = 3.83$ മീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാം:



ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഇപ്പോൾ കണ്ട കണക്കിൽ 0.6428 എന്ന സംഖ്യ 40° കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചതാണല്ലോ. ഇതിനെ 40° കോണിന്റെ സൈൻ (sine of 40°) എന്നാണ് പറയുന്നത്; $\sin 40^\circ$ എന്നെഴുതും.

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 0.766 എന്നത് 40° കോണിന്റെ ചെറിയ വശത്തെ (ഇതിനെ ഈ കോണിന്റെ സമീപവശം എന്നാണ് പറയുന്നത്) കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ 40° യുടെ കോസൈൻ (cosine of 40°) എന്നു പറയുകയും, $\cos 40^\circ$ എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുകയും ചെയ്യും.

അതായത്,

$$\sin 40^\circ \approx 0.6428$$

$$\cos 40^\circ \approx 0.7660$$

ഇങ്ങനെ 1° ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളുടെയെല്ലാം സൈനും കോസൈനും പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ ചെറിയൊരുഭാഗമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

കോൺ	sin	cos
35°	0.5736	0.8192
36°	0.5878	0.8090
37°	0.6018	0.7986
38°	0.6157	0.7880
39°	0.6293	0.7771
40°	0.6428	0.7660

(മുഴുവൻ പട്ടിക പാഠഭാഗത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിട്ടുണ്ട്)

ഈ പട്ടികയിൽനിന്ന്

$$\sin 35^\circ \approx 0.5736$$

$$\cos 35^\circ \approx 0.8192$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

ഈ സംഖ്യകളെ മറ്റൊരുതരത്തിൽ വിശദീകരിക്കാം:

35° വലുപ്പമുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ഈ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ 0.5736 ഭാഗമാണ് ലംബത്തിന്റെ നീളം; ഈ അകലത്തിന്റെ 0.8192 ഭാഗമാണ്, ലംബത്തിന്റെ ചുവടും കോണിന്റെ മൂലയും തമ്മിലുള്ള അകലം:

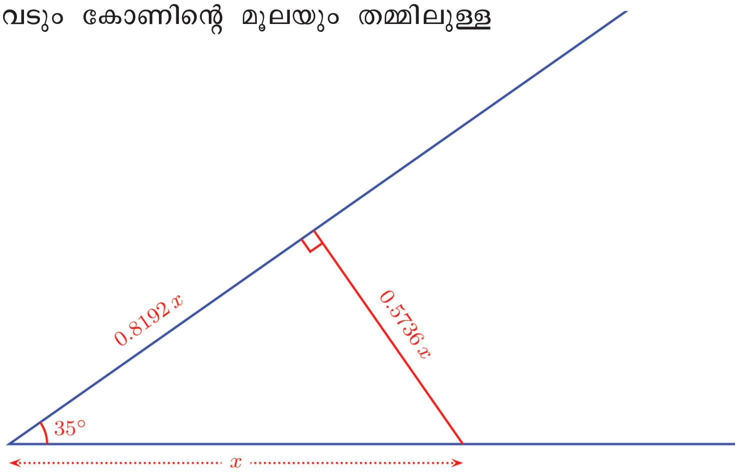
പേരു വന്ന വഴി

ആര്യഭടൻ, കോണിന്റെ *അർധജ്യാ* എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന അളവു തന്നെയാണ് ഇന്നു sin എന്ന പേരിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഈ പേരു വന്നതിന്റെ കഥ ഇങ്ങനെയാണ്.

ആര്യഭടൻ തന്നെ പിൽക്കാലത്ത്, *അർധ* എന്ന വിശേഷണം ഉപേക്ഷിച്ച്, *ജ്യാ* എന്നു മാത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഏ.ഡി ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടുമുതലുള്ള കാലത്ത്, അറബ് രാജ്യങ്ങളിലെ ഭരണാധികാരികൾ, ഗ്രീസിലേയും ഭാരതത്തിലേയും പ്രധാന ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം അറബി ഭാഷയിലേക്ക് പരിഭാഷപ്പെടുത്തുന്നത് പ്രോത്സാഹിപ്പിച്ചിരുന്നു. *ആര്യഭടീയം* വിവർത്തനം ചെയ്തവർ, *ജ്യാ* എന്ന പദം വലിയ മാറ്റമൊന്നും വരുത്താതെ *ജിബ* എന്നുപയോഗിച്ചു. പ്രാചീന അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ സ്വരചിഹ്നങ്ങൾ എഴുതാറില്ലാത്തതിനാൽ, ഇത് എഴുതുന്നത് *ജ്ബ്* എന്നു മാത്രമായിരുന്നു.

പിൽക്കാലത്ത്, ഏ.ഡി. പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടോടെ, ഈ അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം യൂറോപ്പിലെത്തുകയും, ലാറ്റിനിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടുകയുമുണ്ടായി. *ജ്ബ്* എന്ന് അറബിയിൽ എഴുതിയിരുന്നത്, *ജൈബ്* എന്ന വാക്കാണെന്ന് അവർ തെറ്റിദ്ധരിച്ചു. ഈ വാക്കിന് അറബിയിൽ, വളവ്, മടക്ക് എന്നെല്ലാമാണ് അർത്ഥം. ഈ അർത്ഥം വരുന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കായ sinus എന്നു പരിഭാഷപ്പെടുത്തി. കാലക്രമത്തിൽ, ഇതു ലോപിച്ച് sine എന്നു മാത്രമായി.

കോടിജ്യാ എന്നു ആര്യഭടൻ വിളിച്ചിരുന്ന അളവ് cosine എന്നുമായി.



40° കോണാണെങ്കിൽ ഈ നീളങ്ങൾ നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, 0.6428 ഭാഗവും, 0.766 ഭാഗവുമായിരിക്കും.

ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, സൈനും കോസൈനും കോണുകളുടെ വലുപ്പത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണെന്നു കാണാം.

രണ്ടുതരം മട്ടത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ആദ്യം കണ്ട കാര്യങ്ങൾ ഇനി സൈനും കോസൈനുമായി എഴുതാം:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

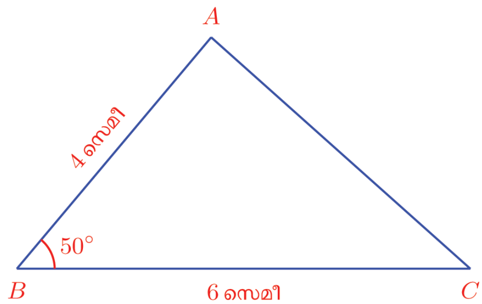
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

സൈനും കോസൈനും ഉപയോഗിച്ചുള്ള ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

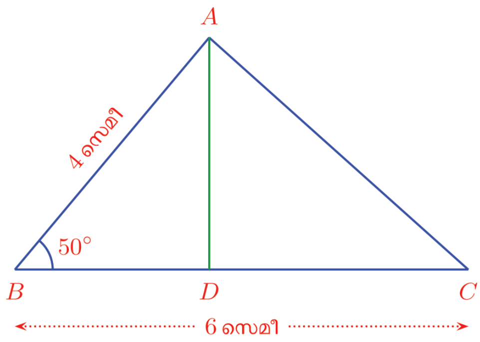
സൈൻ, കോസൈൻ അളവുകൾ

ജിയോജിബ്രയിൽ, നീളം 1 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle സ്ലൈഡർ α ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്ന് കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B′ കിട്ടും. B യിലൂടെ AB′ ന് ലംബം വരച്ച് അത് AB′ മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABC വരച്ചതിനു ശേഷം AB′ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് കാണാമല്ലോ. ഇതിൽ BC യുടെ നീളം കോണളവിന്റെ sin അളവും AC യുടെ നീളം cos അളവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) ഇതുപയോഗിച്ച് sine, cosine അളവുകളുടെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക. sine, cosine സംഖ്യകൾ പരമാവധി എത്രവരെയാകാം?



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കണം

അതിന് A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാം:



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

ഇതിൽ AD എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ചിത്രത്തിലെ ABD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$AD = AB \times \sin 50^\circ = 4 \sin 50^\circ$$

ഇനി പട്ടികയിൽനിന്ന്

$$\sin 50^\circ \approx 0.7660$$

എന്നു കിട്ടും അപ്പോൾ

$$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

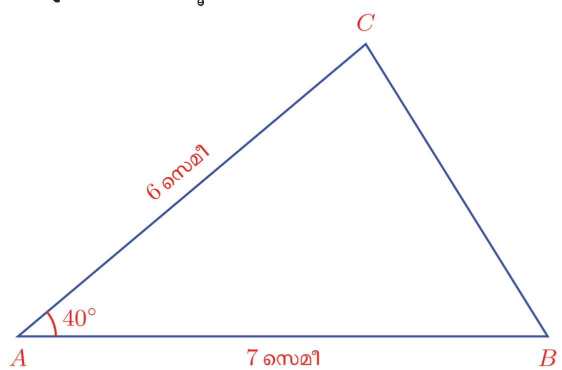
ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

$$3 \times AD = 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

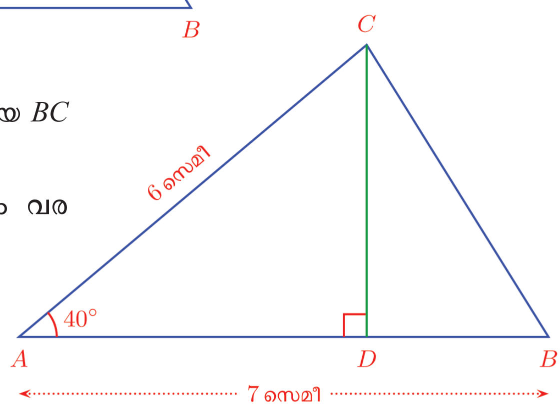
ഈ കണക്കിൽ B യിലെ കോൺ 50° യ്ക്കു പകരം 130° ആണെങ്കിൽ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ വശമായ BC യുടെ നീളം കണക്കാക്കണം.

C യിൽ നിന്ന് AB യിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക എന്നതാണ് സൂത്രം:



ഇപ്പോൾ BCD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

ഇനി BD യും DC യും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ACD എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$DC = AC \sin 40^\circ \approx 6 \times 0.6428 \approx 3.86 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. കൂടാതെ ഇതേ ത്രികോണത്തിൽനിന്നുതന്നെ

$$AD = AC \cos 40^\circ \approx 6 \times 0.766 \approx 4.6 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$BD = AB - AD \approx 7 - 4.6 = 2.4 \text{ സെ.മീ.}$$

ഇനി

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} \approx \sqrt{3.86^2 + 2.4^2} = 4.54 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത് BC യുടെ നീളം ഏകദേശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഈ കണക്കിൽ A യിലെ കോൺ 100° ആണെങ്കിൽ BC യുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

(1) പടം വരയ്ക്കാതെ പട്ടിക നോക്കാതെ

$$\sin 1^\circ, \cos 1^\circ, \sin 2^\circ, \cos 2^\circ$$

എന്നീ സംഖ്യകളെ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, അതിലെ ഒരു കോൺ 100° യുമാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും 12 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ഇവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 50° യും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

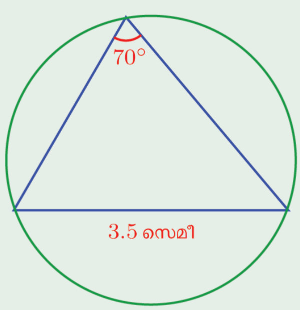
(4) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും 14 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യും. ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

(5) ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ ഒരു കോൺ 40° യും ആയി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. 40° കോണിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആകണം?

(6) ഒരു സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമായ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്. ആ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

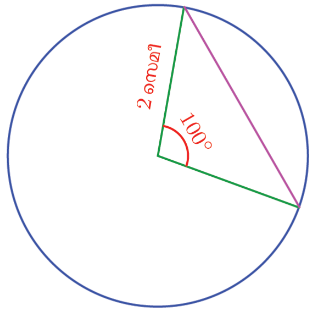
(7) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ, അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 40°. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക. ഇതേ വശങ്ങളും അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 140° യും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

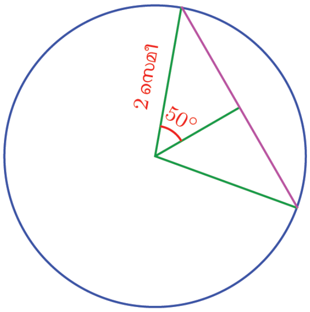
(8) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



ത്രികോണവും വൃത്തവും

ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കണം:





ഇതേപോലൊരു കണക്കിൽ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കു ലംബം വരച്ച് കേന്ദ്രകോണിനെയും ഞാണിനെയും പകുതിയാക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ മുകളിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ കർണത്തിന്റെ $\sin 50°$ ഭാഗമാണല്ലോ എതിർവശം. പട്ടികയിൽനിന്ന്

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി

$$2 \times 0.766 \approx 1.53 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കാണാം; മുഴുവൻ ഞാണിന്റെ നീളം

$$2 \times 1.53 = 3.06 \approx 3.1 \text{ സെ.മീ.}$$

ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കേന്ദ്രകോണിൽനിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എന്തെല്ലാമാണു ചെയ്തത്?

കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി കിട്ടി. അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങെടുത്തപ്പോൾ മുഴുവൻ ഞാണും കിട്ടി.

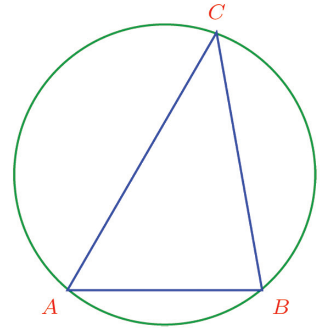
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ

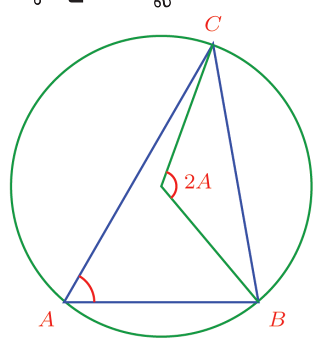
ആരം r ആയ വൃത്തത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ $c°$ ആയ ഞാണിന്റെ നീളം

$$2r \sin \left(\frac{c}{2}\right)^{\circ}$$

ഇനി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ABC എന്ന ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും: ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളായ AB, BC, CA എന്നിവ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാണല്ലോ.



വൃത്തങ്ങൾ എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടതനുസരിച്ച് BC എന്ന ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ ത്രികോണത്തിലെ A യിലെ കോണിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. ത്രികോണത്തിലെ ഈ കോണിന്റെ അളവിനെ A എന്നുതന്നെ എഴുതിയാൽ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $2A$.

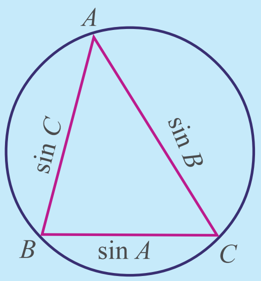
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്, BC യുടെ നീളം $2r \sin A$.

ഇതുപോലെ, CA യുടെ നീളം $2r \sin B$ എന്നും, AB യുടെ നീളം $2r \sin C$ എന്നും കാണാം.

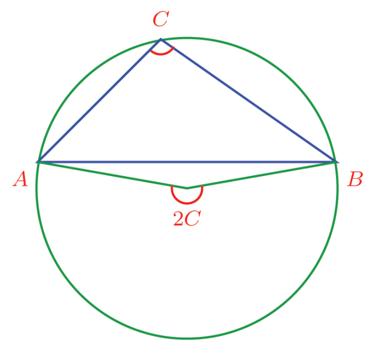
പുതിയ അർഥങ്ങൾ

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവ്യാസം നീളത്തിന്റെ ഏകകമായെടുത്താൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താകും?

$BC = d \sin A = \sin A$. ഇതുപോലെ $CA = \sin B$, $AB = \sin C$. അതായത് ഒരു കോണിന്റെ സൈൻ, വ്യാസം 1 ആയ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഈ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളമാണ്.



എല്ലാ ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഇതു ശരിയാകുമോ? ഏതെങ്കിലുമൊരു കോൺ $90°$ യേക്കാൾ കൂടുതലാണെങ്കിലോ?



ഇതിൽ AB യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $360 - 2C$ ആണല്ലോ, അപ്പോൾ AB യുടെ നീളം $2r \sin (180 - C)$.

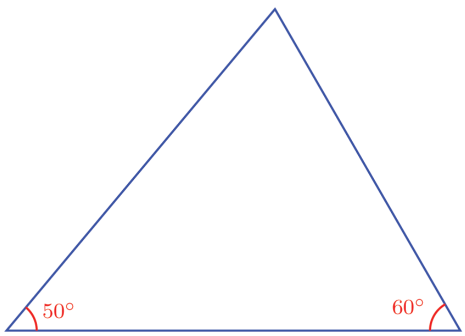
പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം, അതിന്റെ കോണുകളുടെ സൈൻ അളവുകളെ പരിവൃത്തവ്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. ഏതെങ്കിലും കോൺ മട്ടത്തിനേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ അനുപൂരക കോണിന്റെ സൈൻ എടുക്കണം. ഒരു കോൺ മട്ടമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർവശം പരിവൃത്തവ്യാസം തന്നെയാണ്.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെ നിശ്ചയിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് ഇപ്പോൾ മനസിലായല്ലോ.

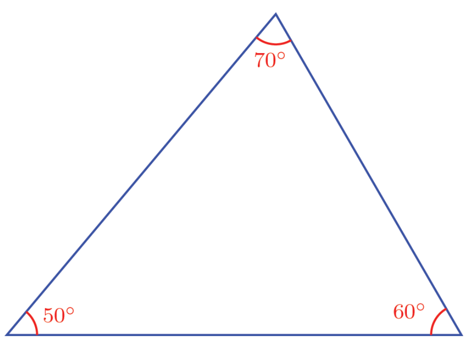
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം, അവയുടെ എതിർകോണുകളുടെ സൈൻ അളവുകളുടെ അംശബന്ധമാണ്. ഏതെങ്കിലും കോൺ മട്ടത്തിനേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ അനുപൂരകകോണിന്റെ സൈൻ എടുക്കണം. ഒരു കോൺ മട്ടമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർവശം 1 ആയി എടുക്കണം.

ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.



ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം.

താഴത്തെ വശത്തിന്റെ എതിരെയുള്ള കോൺ $70°$ ആണല്ലോ.



പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം d എന്നെടുത്താൽ $d \sin 70° = 6$

$$d = \frac{6}{\sin 70^\circ} \approx \frac{6}{0.94} = 6.38$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇനി മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

$$6.38 \times \sin 50^\circ \approx 6.38 \times 0.77 \approx 4.9$$

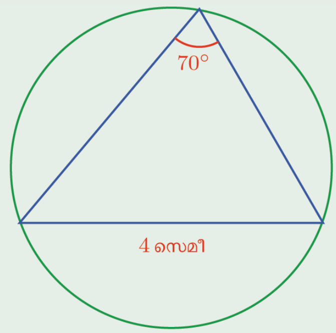
$$6.38 \times \sin 60^\circ \approx 6.38 \times 0.87 \approx 5.5$$

അതായത്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ എകദേശം 4.9 സെന്റിമീറ്ററും 5.5 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്.

സൈൻ, കോസൈൻ പട്ടികകൾ (വേണമെങ്കിൽ കാൽക്കുലേറ്ററും) ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്യുക.

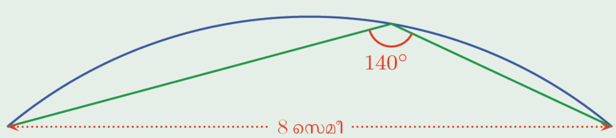
(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.



(2) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം. വരയുടെ ഒരു വശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോൺ 80° ആയിരിക്കുകയും വേണം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയായെടുക്കണം?

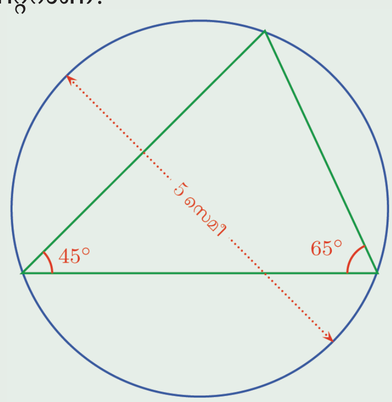
(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



മുഴുവൻ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്?

(4) തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

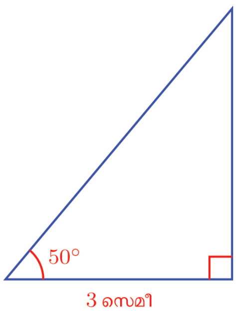
വരച്ചതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.



(5) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ ഒരറ്റത്ത് 50° കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത് 65° കോണും വരച്ച്, ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കി. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

മറ്റൊരളവ്

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ചെറുവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്മേലുള്ള ഒരു കോൺ 50°.



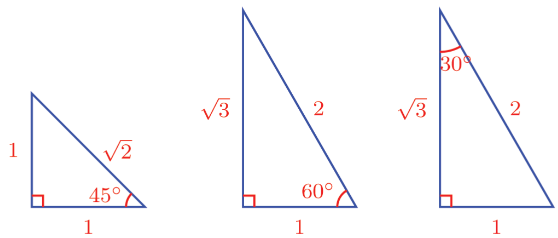
വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ല, അല്ലേ? ഇതിന്റെ രണ്ടാം ചെറുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

പട്ടികനോക്കി $\cos 50^\circ$ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, കർണം കണ്ടുപിടിക്കാം, തുടർന്ന് കർണത്തെ $\sin 50^\circ$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് മൂന്നാം വശവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം. മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ പട്ടിക.

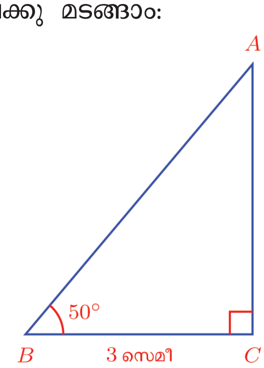
ഈ സംഖ്യയെ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് (tangent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി tan എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി നാം നേരത്തെ കണ്ട ചില ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം.



$\tan 45^\circ = 1$ $\quad$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\quad$ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

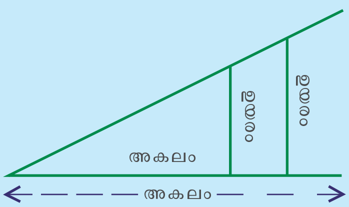
നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിലേക്കു മടങ്ങാം:



ചരിവിന്റെ അളവ്

വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കി കോണളക്കുന്നത് പ്രാചീന ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതിയാണ്. അതിന് വാനശാസ്ത്രവുമായാണ് ബന്ധം. ഏതാണ്ട് ബി.സി മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടുമുതൽ ബാബിലോണിയയിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം. ഇതാണ് ഇന്നത്തെ ഡിഗ്രി അളവ്.

എന്നാൽ ഭൂമിയിലെ നിർമാണങ്ങളിൽ, ചരിവളക്കാൻ മറ്റൊരു രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, കോണിന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ അകലവും ഉയരവും മാറുമെങ്കിലും, ഉയരത്തെ അകലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ. (കാരണം?) ഓരോ കോണിനും, അതിന്റെ വലുപ്പമനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യ മാറുകയും ചെയ്യും. ഈ സംഖ്യയെയാണ്, ചരിവിന്റെ അളവായി എടുത്തിരുന്നത്.

പുരാതന ഈജിപ്റ്റിലെ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിൽ ഇത്തരം ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കാണാം. സമചതുരസ്തൂപികകളിൽ, പാദവും ഒരു മുഖവും തമ്മിലുള്ള ചരിവാണ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

പുരാതന ബാബിലോണിയായിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, പലപല മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, കർണത്തെ മറ്റൊരു വശംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതും കാണാം.

ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

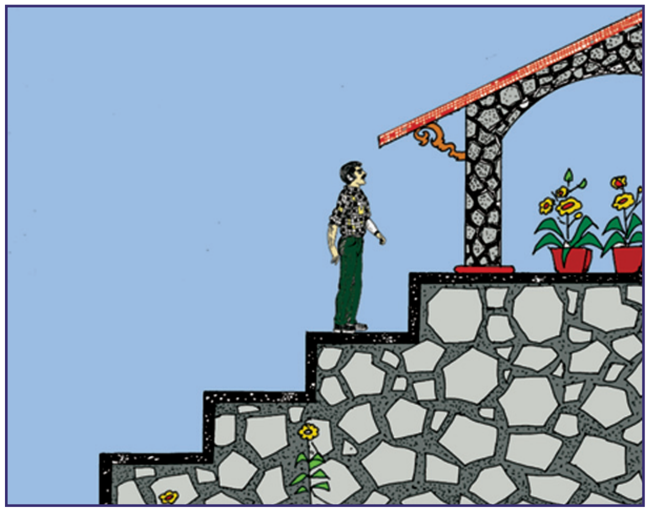
$$\frac{AC}{BC} = \tan 50^\circ$$

ഇനി പടവും പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച് AC കണക്കാക്കാം.

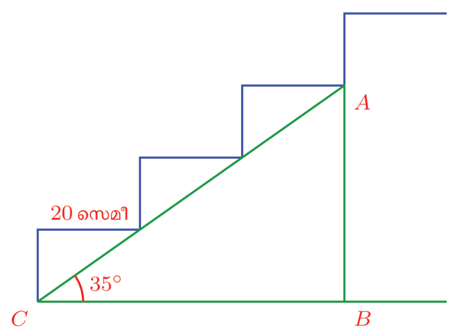
$$AC = BC \times \tan 50^\circ \approx 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6 \text{ സെ.മീ.}$$

കോണിന്റെ tan അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭം നോക്കൂ.

ചിത്രത്തിലെ ആൾ നിൽക്കുന്നത്, എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.



പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഉയരം AB യാണല്ലോ.

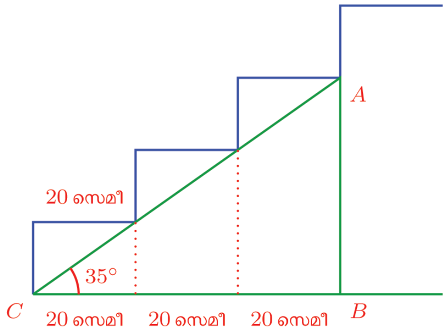
ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$AB = BC \times \tan 35^\circ$$

ഇതിൽ

$$\tan 35^\circ \approx 0.7002$$

എന്ന് പട്ടികയിൽനിന്നു കിട്ടും. BC യുടെ നീളമോ?



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു BC യുടെ നീളം 60 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

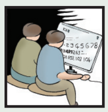
$AB = BC \times \tan 35^\circ \approx 60 \times 0.7002 \approx 42.01$

അതായത്, ഉയരം ഏകദേശം 42 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

മറ്റളവുകൾ

ഒരു കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ചു sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതു കണ്ടു. വശങ്ങൾ തമ്മിൽ വേറെയും ഹരണം ബാക്കിയുണ്ടല്ലോ. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്.

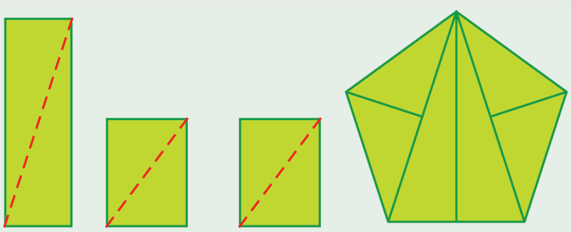
ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക്, കോസീക്കന്റ് (cosecant), സീക്കന്റ് (secant) എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ; tan ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്, കോടാൻജെന്റ് (cotangent) എന്നും. ഇവയെ ചുരുക്കി, cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്.



(1) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 50° ആണ്; വലിയ വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) മതിലിന്മേൽ ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്. ഏണിയും തറയുമായുള്ള കോൺ 40° യും. ഏണിയുടെ മുകളറ്റം, തറയിൽ നിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

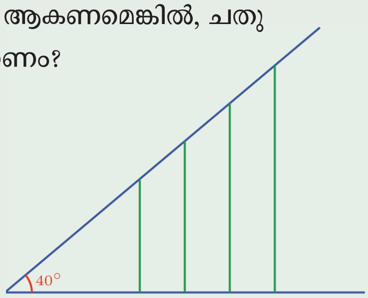
(3) മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തു വച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം.



പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

(4) ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

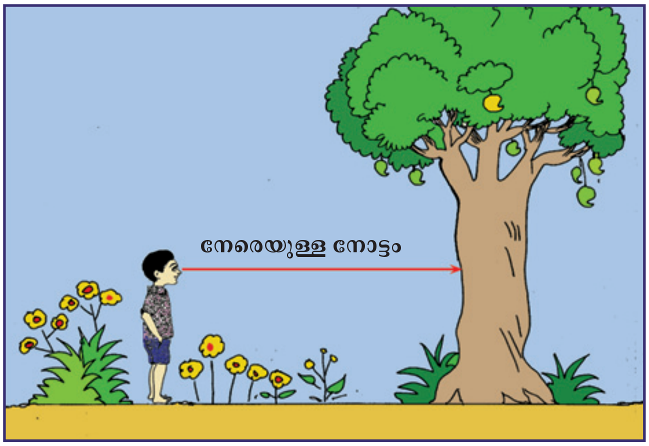
അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

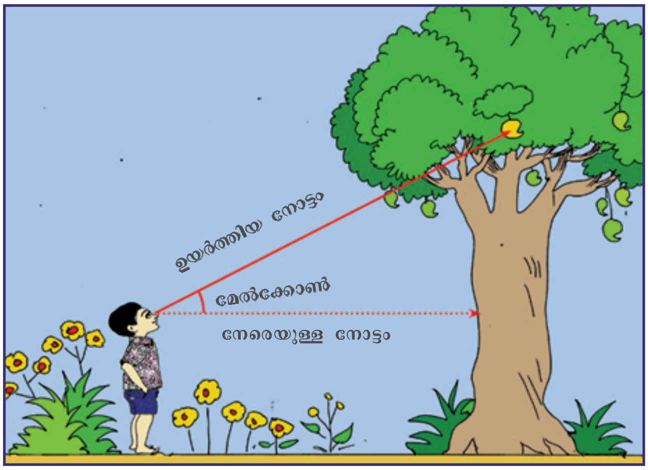


(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും അതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ 40° യും 65° യും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

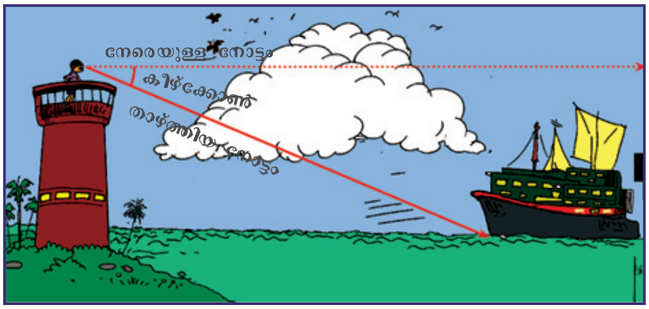
നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അൽപം ഉയർത്തണമല്ലോ. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.





സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്, ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ മേൽക്കോൺ (angle of elevation) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടിവരുമല്ലോ.



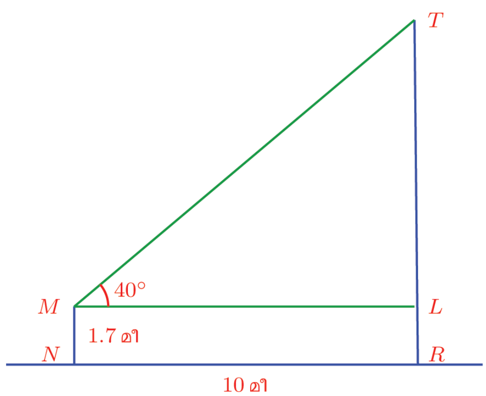
ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ കീഴ്ക്കോൺ (angle of depression) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് ക്ലൈനോമീറ്റർ (clinometer) എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, സൈനും കോസും ടാനും ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

> ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. അയാളുടെ ഉയരം, 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തു പൊക്കമുണ്ട്?

ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനേയും, TR മരത്തിനേയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ടാൻ അളവുകൾ

സൈൻ, കോസൈൻ പോലെ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ടാൻ കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നീളം 1 ആയി AB എന്ന വരയും B യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബവും വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider α ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B′ ലഭിക്കും. A, B′ ഇവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര വരച്ച് അത് B യിൽ വരച്ച ലംബവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകളും ബിന്ദുക്കളും മറച്ച് വയ്ക്കാം. BC യുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് ∠A യുടെ ടാൻ അളവാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) ടാൻ അളവ് എത്രവരെയാകാം?

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$TL = ML \tan 40^\circ \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

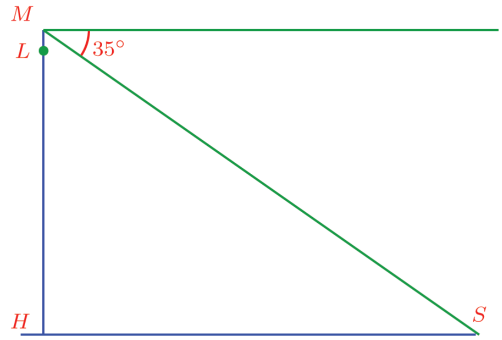
$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.391 + 1.7 = 10.091$$

അതായത്, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

> 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, 35° കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു കപ്പൽ കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ഇതിൽ LH ലൈറ്റ്ഹൗസും, ML അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്നയാളുമാണ് S ആണു കപ്പൽ.

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് HS

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

കൂടാതെ $\angle HMS = 55°$

അപ്പോൾ MHS എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് കപ്പൽ.

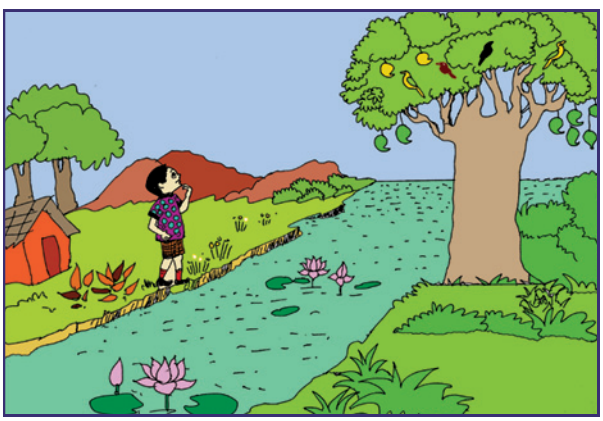
ചരിവും വിരിവും

കോണുകളെ വിരിവിന്റെ അളവുകളായി കാണുന്ന ആവശ്യങ്ങളിൽ നിന്നാണ് sin, cos എന്നീ അളവുകളുണ്ടായതെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ചരിവിന്റെ അളവായി കോണിനെ കാണുന്ന രീതിയെ ഇതുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുമ്പോഴാണ് tan ഉണ്ടാകുന്നത്. (ഉയരത്തെ അകലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചരിവളക്കുന്ന പഴയ രീതി തന്നെയാണല്ലോ അതിന്റെ നിർവചനം)

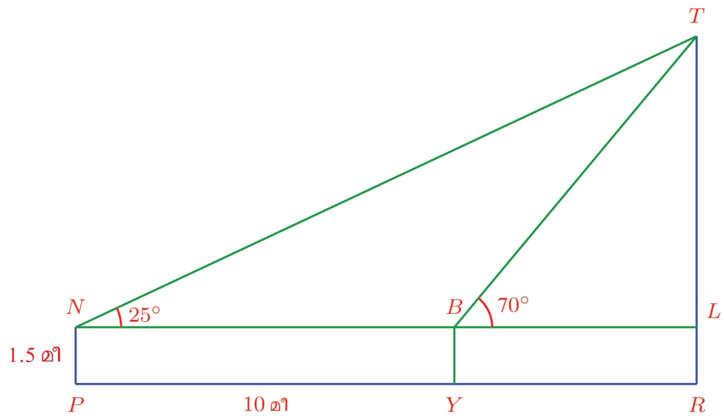
എ.ഡി. ഒമ്പതാംനൂറ്റാണ്ടിലെ അഹമ്മദ് ഇബിൻ അബ്ദുള്ള അൽ മൊർവാസി എന്ന അറബ് ഗണിതകാരനാണ് ഇത്തരമൊരു ബന്ധം അവതരിപ്പിച്ചതും, tan ന്റെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയതും.

ഇതിന് tangent എന്ന പേരു വന്നത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

ഒരു കണക്കുകൂടി: ഒരു തോടിനരികത്ത് നിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 70° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കണം.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ TR മരം, BY കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, NP കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, YR ഉം, TR ഉം. ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$$

ആയതിനാൽ, BL ഉം, TL ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$BL = x \qquad TL = y$$

എന്നെടുത്താൽ BTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = x \tan 70^\circ \approx 2.7475x$$

എന്നും, NTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25^\circ \approx 0.4663\,(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

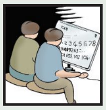
എന്നാകുമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{2.2818} \approx 2.044$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

എന്നും കാണാം അതായത്, തോടിന്റെ വീതി ഏകദേശം 2.04 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം $5.62 + 1.75 = 7.12$ മീറ്ററുമാണ്.



(1) സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(2) ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റേയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(3) പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം, 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 30° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർകൂടി ഉയർത്തി, കെട്ടിടം പണിതീർത്തപ്പോൾ, അയാൾ അതേ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 60° മേൽക്കോണിലാണ് മുകൾഭാഗം കണ്ടത്. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

(4) 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, ഒരു ടെലിഫോൺ ടവറിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, 10 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° കീഴ്ക്കോണിലും അതിന്റെ ചുവട് 60° കീഴ്ക്കോണിലും കണ്ടു. ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് കെട്ടിടത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

(5) ഒരു വൈദ്യുതിത്തൂണിന്റെ മുകളറ്റത്തു നിന്ന് രണ്ട് ഇരുമ്പ് കമ്പികൾ ഇരുദിശകളിലേക്കും തറയിൽ വലിച്ച് കെട്ടിയിരിക്കുന്നു. കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തറയുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 55° യും 40° യുമാണ്. കൂടാതെ കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 25 മീറ്ററും. തൂണിന്റെ ഉയരമെത്രയാണ്?

(6) സൂര്യൻ 35° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 10 മീറ്ററാണ്. സൂര്യൻ 25° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ അതേ മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

ഗവേഷണം

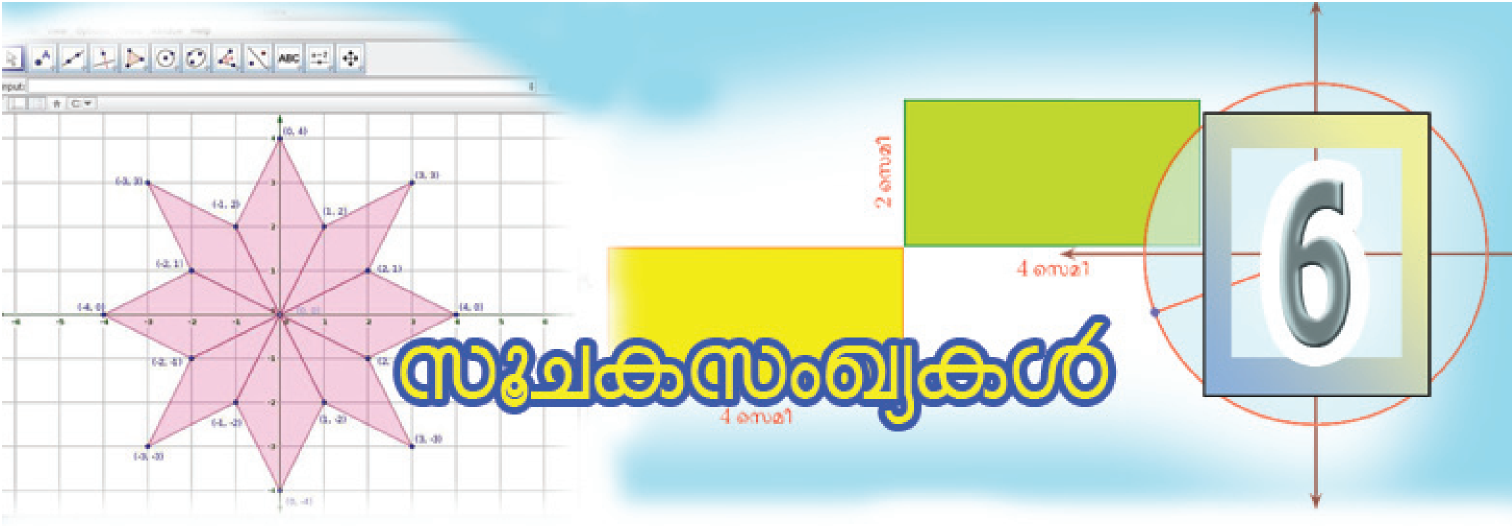
- സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിനും പരപ്പളവിനും പരിവൃത്ത ആരവുമായുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കുക.
- sin ഉപയോഗിച്ച് π യോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന ഒരു ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കുക.

ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

കോൺ	sin	cos	tan	കോൺ	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000	46°	0.7193	0.6947	1.0355
1°	0.0175	0.9998	0.0175	47°	0.7314	0.6820	1.0724
2°	0.0349	0.9994	0.0349	48°	0.7431	0.6891	1.1106
3°	0.0523	0.9986	0.0524	49°	0.7547	0.6561	1.1504
4°	0.0698	0.9976	0.0699	50°	0.7660	0.6428	1.1918
5°	0.0872	0.9962	0.0875	51°	0.7771	0.6293	1.2349
6°	0.1045	0.9945	0.1051	52°	0.7880	0.6157	1.2799
7°	0.1219	0.9925	0.1228	53°	0.7986	0.6018	1.3270
8°	0.1392	0.9903	0.1405	54°	0.8090	0.5878	1.3764
9°	0.1564	0.9877	0.1584	55°	0.8192	0.5736	1.4281
10°	0.1736	0.9848	0.1763	56°	0.8290	0.5592	1.4826
11°	0.1908	0.9816	0.1944	57°	0.8387	0.5446	1.5399
12°	0.2079	0.9781	0.2126	58°	0.8480	0.5299	1.6003
13°	0.2250	0.9744	0.2309	59°	0.8572	0.5150	1.6643
14°	0.2419	0.9703	0.2493	60°	0.8660	0.5000	1.7321
15°	0.2588	0.9659	0.2679	61°	0.8746	0.4848	1.8040
16°	0.2756	0.9613	0.2867	62°	0.8829	0.4695	1.8807
17°	0.2924	0.9563	0.3057	63°	0.8910	0.4540	1.9626
18°	0.3090	0.9511	0.3249	64°	0.8988	0.4384	2.0503
19°	0.3256	0.9455	0.3443	65°	0.9063	0.4226	2.1445
20°	0.3420	0.9397	0.3640	66°	0.9135	0.4067	2.2460
21°	0.3584	0.9336	0.3839	67°	0.9205	0.3907	2.3559
22°	0.3746	0.9272	0.4040	68°	0.9272	0.3746	2.4751
23°	0.3907	0.9205	0.4245	69°	0.9336	0.3584	2.6051
24°	0.4067	0.9135	0.4452	70°	0.9397	0.3420	2.7475
25°	0.4226	0.9063	0.4663	71°	0.9455	0.3256	2.9042
26°	0.4384	0.8988	0.4877	72°	0.9511	0.3090	3.0777
27°	0.4540	0.8910	0.5095	73°	0.9563	0.2924	3.2709
28°	0.4695	0.8829	0.5317	74°	0.9613	0.2756	3.4874
29°	0.4848	0.8746	0.5543	75°	0.9659	0.2588	3.7321
30°	0.5000	0.8660	0.5774	76°	0.9703	0.2419	4.0108
31°	0.5150	0.8572	0.6009	77°	0.9744	0.2250	4.3315
32°	0.5299	0.8480	0.6249	78°	0.9781	0.2079	4.7046
33°	0.5446	0.8387	0.6494	79°	0.9816	0.1908	5.1446
34°	0.5592	0.8290	0.6745	80°	0.9848	0.1736	5.6713
35°	0.5736	0.8192	0.7002	81°	0.9877	0.1564	6.3138
36°	0.5878	0.8090	0.7265	82°	0.9903	0.1392	7.1154
37°	0.6018	0.7986	0.7536	83°	0.9925	0.1219	8.1443
38°	0.6157	0.7880	0.7813	84°	0.9945	0.1045	9.5144
39°	0.6293	0.7771	0.8098	85°	0.9962	0.0872	11.4301
40°	0.6428	0.7660	0.8391	86°	0.9976	0.0698	14.3007
41°	0.6561	0.7547	0.8693	87°	0.9986	0.0523	19.0811
42°	0.6691	0.7431	0.9004	88°	0.9994	0.0349	28.6363
43°	0.6820	0.7314	0.9325	89°	0.9998	0.0175	57.2900
44°	0.6947	0.7193	0.9657	90°	1.0000	0.0000	....
45°	0.7071	0.7071	1.0000				

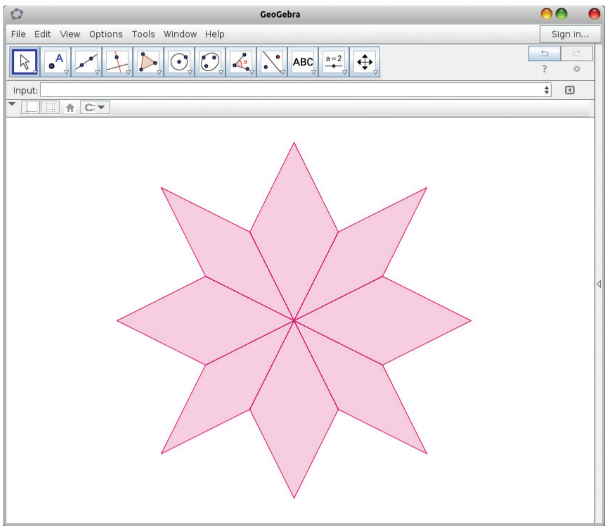
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വരകളുപയോഗിച്ച് കോണുകളുടെ വലുപ്പം അളക്കാനുള്ള രീതികളായി സൈൻ, കോസൈൻ, ടാൻ എന്നിവയെ വ്യഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• വൃത്തത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളവും കേന്ദ്രകോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സൈൻ ഉപയോഗിച്ച് പറയാമെന്ന് സമർഥിക്കുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കോണുകളുടെ സൈൻ അളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമാണെന്ന് തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• ത്രികോണത്തിന്റെ ചില അളവുകളിൽനിന്ന് മറ്റു ചില അളവുകൾ കണക്കാക്കാൻ ത്രികോണമിതി അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.			
• നേരിട്ട് അളക്കാൻ കഴിയാത്ത ഉയരങ്ങളും നീളങ്ങളും ത്രികോണമിതി ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			



6 സൂചകസംഖ്യകൾ

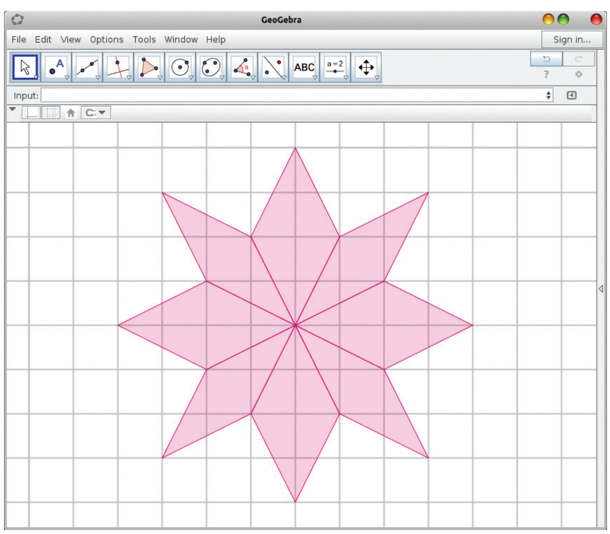
ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു ചിത്രം നോക്കൂ.



എങ്ങനെയാണിതു വരച്ചത്?

വരയ്ക്കാനുപയോഗിച്ച പലതും, വരച്ചതിനുശേഷം ഒളിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ആദ്യം സമചതുരക്കളങ്ങൾ വരച്ച്, അവയിൽ ചിലതിന്റെയെല്ലാം മൂലകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാണ് ഈ ചിത്രം വരച്ചത്.

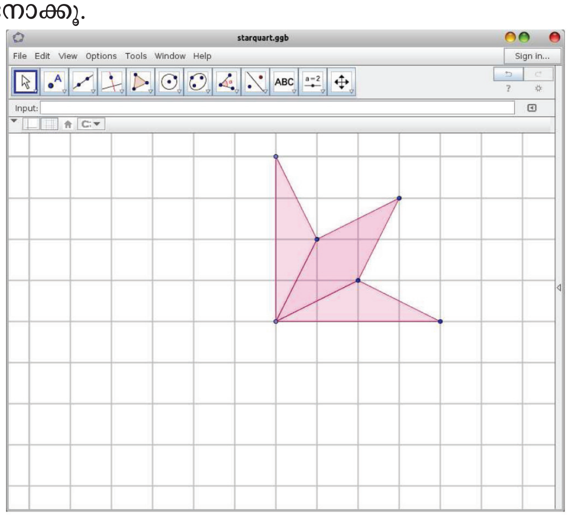
ഇങ്ങനെ ചെറുസമചതുരങ്ങളായി ഭാഗിച്ചു കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Grid ഉപയോഗിക്കണം

ഇനി ഈ ചിത്രം വലുതാക്കി കടലാസിൽ വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

ആദ്യം ഇതുപോലെ നെടുകെയും കുറുകെയും വരകൾ വരച്ചു ചെറുസമചതുരങ്ങളുണ്ടാക്കി, വേണ്ട മൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ മതി.

ആവശ്യമുള്ള എല്ലാ മൂലകളും ഓരോന്നായി അടയാളപ്പെടുത്താതെ തന്നെ ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ ഒരു സൂത്രപ്പണിയുണ്ട്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

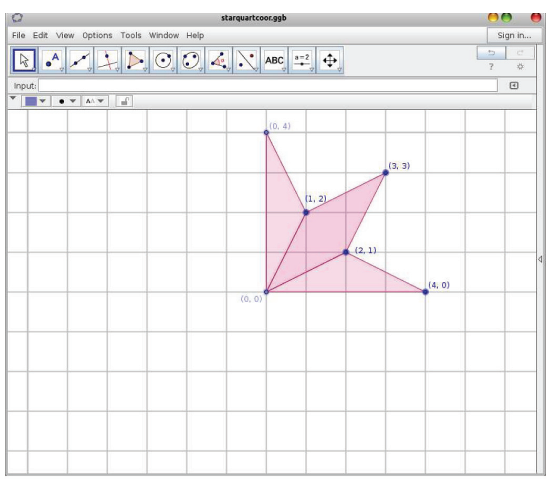


ഈ രൂപം ഇടതും വലതും മേലും കീഴും മറിച്ചു വച്ചാൽ, ആദ്യത്തെ നക്ഷത്രമാവില്ലേ?

ഒരു ചിത്രത്തെ തിരിച്ചും മറിച്ചും വരയ്ക്കാൻ GeoGebra യിൽ Reflect ഉപയോഗിക്കാം.

ചതുരക്കളങ്ങളുടെ മൂലകൾ കൃത്യമായി അടയാളപ്പെടുത്താനും വഴിയുണ്ട്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

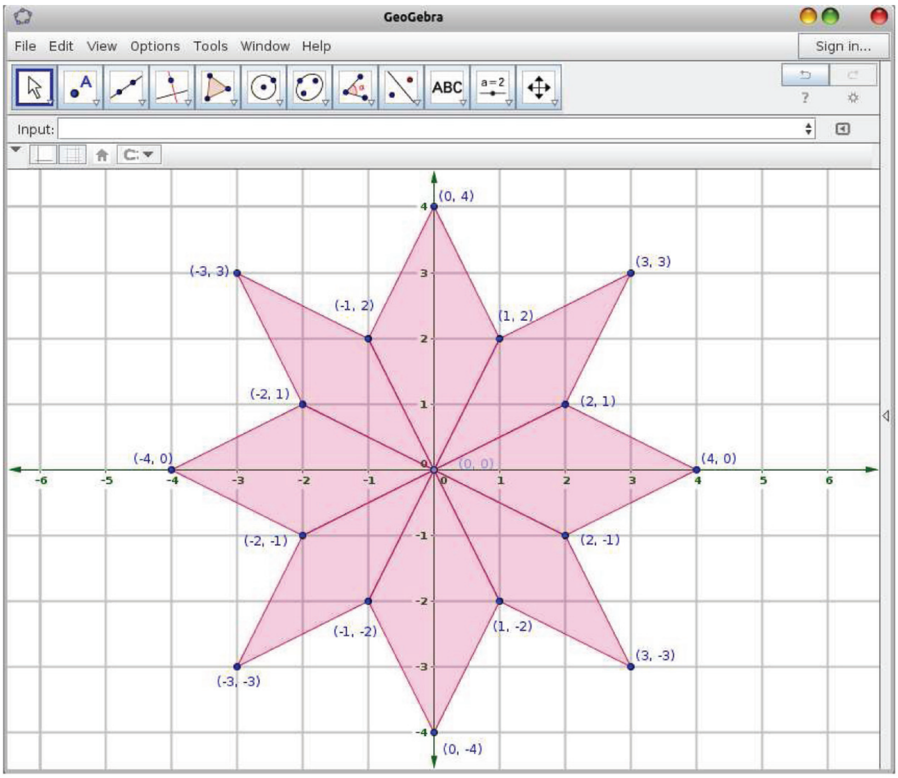


ചിത്രത്തിന്റെ മൂലകളിലെല്ലാം ഒരു ജോടി സംഖ്യകൾ കണ്ടില്ലേ? എന്താണ് ഇവയുടെ അർഥം?

ഉദാഹരണമായി (2, 1) എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മൂല നോക്കൂ. നക്ഷത്രത്തിന്റെ നടുക്കുനിന്ന് 2 കളം വലത്തും, 1 കളം മേലോട്ടും നീങ്ങിയാണ് ഈ മൂല.

ജിയോജിബ്രയിൽ Point എടുത്ത് എവിടെയും ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്താം. കൃത്യസ്ഥാനത്ത് ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താൻ Input Bar ൽ മേൽപ്പറഞ്ഞതുപോലെ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതുകയാണ് കുറേക്കൂടി നല്ല മാർഗം.

നക്ഷത്രചിത്രത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകൾക്കും ഇതുപോലെ സംഖ്യാജോടികളെഴുതാം:



ചിത്രത്തിന്റെ ഇടതു മുകൾഭാഗം നോക്കൂ. ഇവിടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിലെല്ലാം ആദ്യത്തെ സംഖ്യ ന്യൂനമാണെന്ന് കണ്ടോ?

നടുക്കുനിന്ന് ഇടത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യയായി എടുക്കുകയാണ് പതിവ്. ഇടതും വലതും സംഖ്യാപരമായി വേർതിരിച്ചുകാണാനുള്ള ഒരു രീതിയാണിത് (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ സംഖ്യാരേഖ ഓർക്കുക).

ഇതുപോലെതന്നെ നടുക്കുനിന്ന് താഴോട്ടുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ന്യൂനമായി എടുത്തിരിക്കുന്നതും കണ്ടില്ലേ?

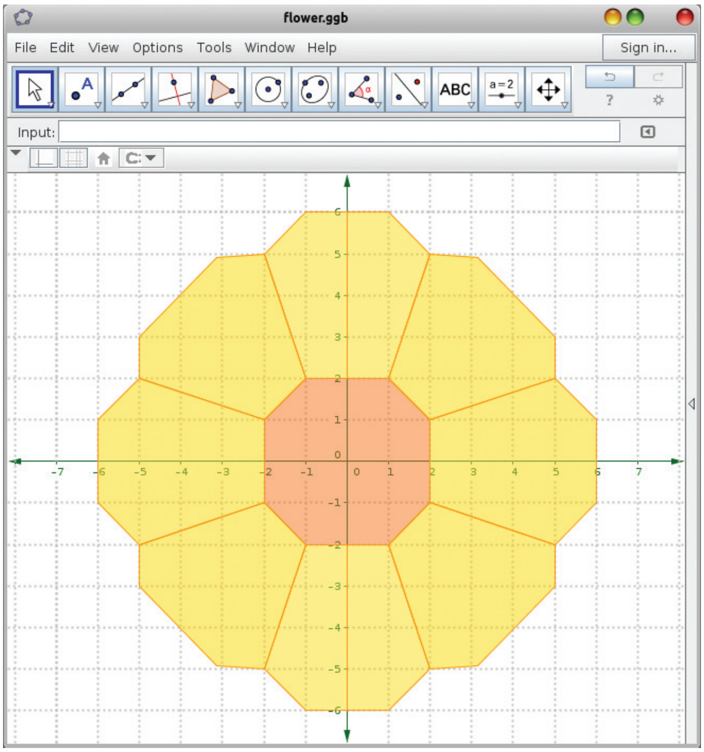
അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോടികളായി അവതരിപ്പിക്കുമ്പോൾ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ വലതോ ഇടതോ ഉള്ള അകലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു; രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ, മേൽ-കീഴ് അകലങ്ങളെയാണ് കാണിക്കുന്നത്. ഇടതും കീഴും അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായി എടുക്കുകയും വേണം.

ഈ സംഖ്യകൾ എളുപ്പം കാണാൻ, ചിത്രത്തിൽ നടുക്കുനിന്ന് നെടുകെയും കുറുകെയും രണ്ടു വരകളിൽ അകലങ്ങൾ എഴുതിയിട്ടുമുണ്ട്.

ജിയോജിബ്രയിൽ ഈ വരകൾ കാണാൻ Axes ഉപയോഗിക്കണം.

ഇനി ഈ നക്ഷത്രം കടലാസിൽ പകർത്താമല്ലോ. ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച മറ്റൊരു ചിത്രം.



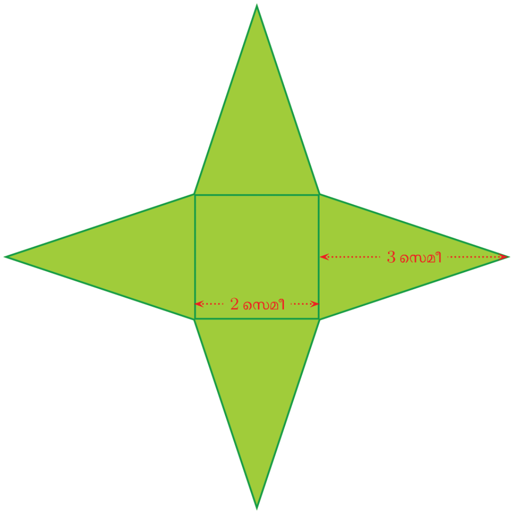
ഇതിലെ മൂലകളെയെല്ലാം ഇതുപോലെ സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താമോ? എന്നിട്ടത് കടലാസിൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

ജിയോജിബ്രയിൽ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് കുത്തുകളിടാൻ Input Bar ൽ അവ ഓരോന്നായി കൊടുത്താൽ മതി. ഈ കുത്തുകൾ മൂലകളായുള്ള ബഹുഭുജം വരയ്ക്കാൻ. Polygon എന്നു കൊടുക്കണം. ഉദാഹരണമായി, Input Bar ൽ ഇങ്ങനെ നിർദ്ദേശം കൊടുത്തു നോക്കൂ

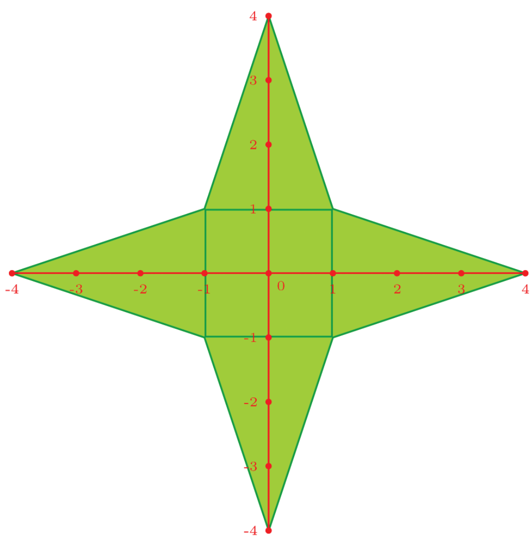
Polygon [(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)]

സ്ഥാനങ്ങളും സംഖ്യകളും

ഇതുപോലൊരു രൂപം കടലാസിൽ വരയ്ക്കണം.

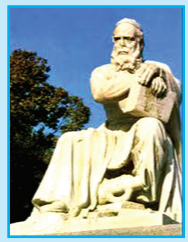


ആദ്യം മൂലകളെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്തിയാലോ? അതിന് കളങ്ങൾ വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ചിത്രത്തിന്റെ നടുവിലൂടെ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, രണ്ടിലും ഒരു സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയെന്നു കരുതുക.



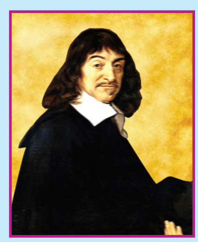
അൽപം ചരിത്രം

ബി.സി. ഇരുനൂറാമാണ്ടിൽത്തന്നെ, അപ്പൊളോണിയസ് എന്ന ഗ്രീക്ക് ഗണിതകാരൻ, ചില ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണാൻ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്; നിശ്ചിത രേഖകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളാണ് ഇത്തരം സംഖ്യകൾ.



തുടർന്ന് എ.ഡി. പതിനൊന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പേർഷ്യയിലെ, ഗണിതകാരനും കവിയുമായ ഒമർ ഖയ്യാം, ചില ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങളെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ, സംഖ്യാജോടികളെ ബിന്ദുക്കളാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

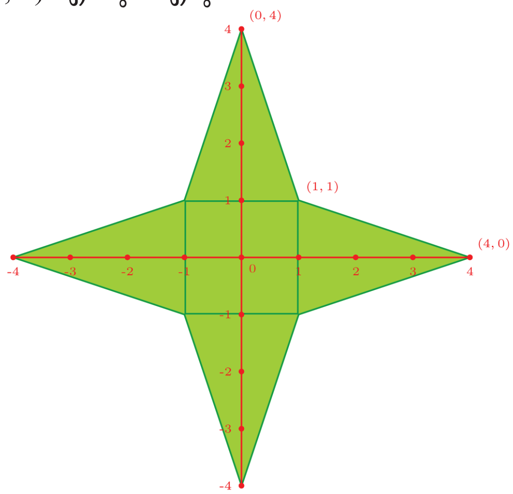
ജ്യാമിതിയും, ബീജഗണിതവുമായുള്ള ഈ ബന്ധം ചിട്ടയായ ഒരു ഗണിതശാഖയായി വളർന്നത്, പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഫ്രാൻസിലെ തത്വചിന്തകനായ റെനെ ദേക്കാർത് (Rene Descartes) "ജ്യാമിതി" എന്ന പ്രബന്ധം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതിൽപ്പിന്നെയാണ്.



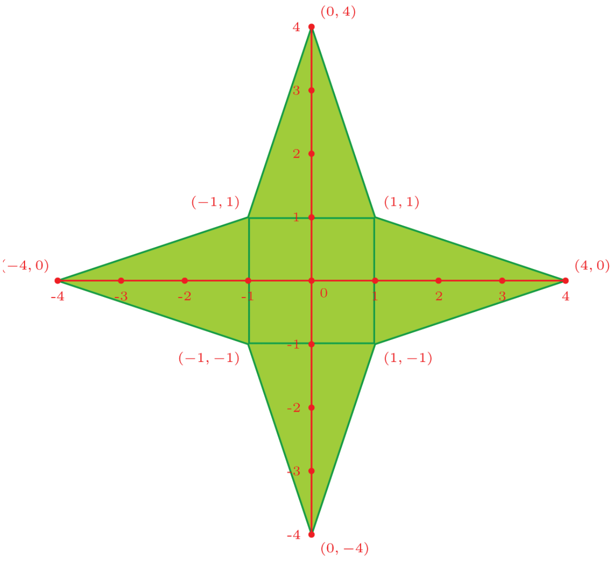
മൂലകളുടെയെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതാമോ?

സമചതുരത്തിന്റെ വലതു മുകളിലെ മൂല, നടുക്കുനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ വലത്തും, അവിടെനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിലുമാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (1, 1).

ഇനി ചിത്രത്തിന്റെ വലതറ്റമോ? നടുക്കുനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ വലത്ത്, മേലോട്ടോ കീഴോട്ടോ നീങ്ങിയിട്ടില്ല. അപ്പോൾ അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (4, 0) എന്നെഴുതാം. ഏറ്റവും മുകളറ്റത്തിന്റെ കാര്യം മറിച്ചാണ്; നടുവിൽ നിന്ന് വലതോ ഇടതോ നീങ്ങാതെ, നേരെ 4 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിൽ. അതിന്റെ സംഖ്യാജോടി (0, 4) എന്നും എഴുതാം.



ഇതുപോലെ, മറ്റു മൂലകളുടെയും സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതാമല്ലോ. ഇടത്തേയ്ക്കും താഴേയ്ക്കും അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായാണ് എടുക്കുന്നത് എന്നോർക്കണം.

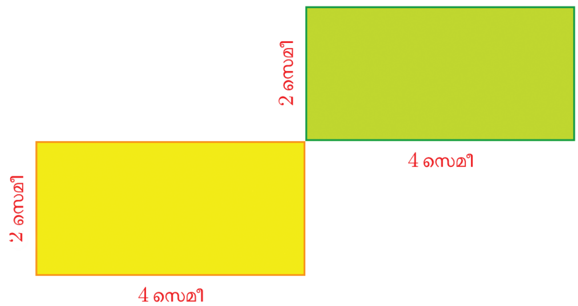


ഇനി ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക

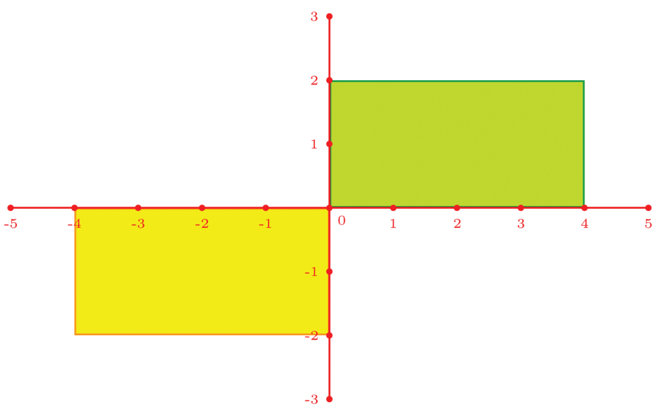
ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്താനായി ഇങ്ങനെ പരസ്പരം ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന രണ്ടു വരകൾക്ക്, സൂചകാക്ഷങ്ങൾ (axes of co-ordinates) എന്നാണ് പേര്; വിലങ്ങനെയുള്ള വര x അക്ഷം (x axis) കുത്തനെയുള്ള വര y അക്ഷം (y axis).

അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, ഏത് ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും സംഖ്യാജോടിയായി എഴുതാം. ഈ സംഖ്യകളെ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (co-ordinates) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



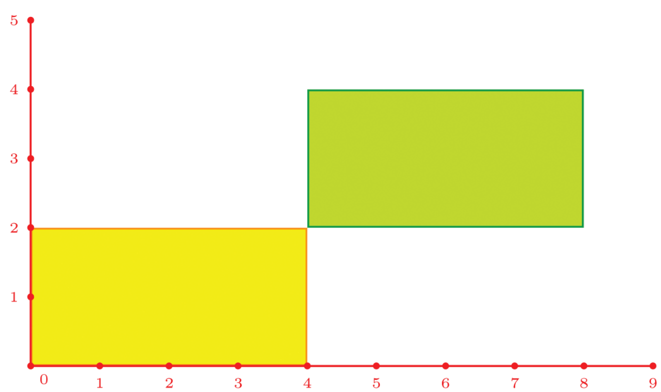
ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ, അക്ഷങ്ങൾ എവിടെയും, എങ്ങനെയും വരയ്ക്കാം. (പരസ്പരം ലംബമാകണമെന്നു മാത്രം) ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.



രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

ഇനി അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ?



ഭൂവിഭജനം

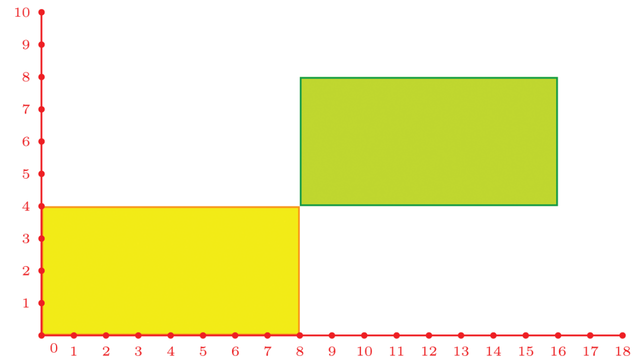
ഭൂമി സ്വയം തിരിയുന്നുണ്ടല്ലോ. ഏതു ഗോളം തിരിയുമ്പോഴും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അനങ്ങാതെയിരിക്കും. അവയാണ് ധ്രുവങ്ങൾ (poles) അവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയാണ്, തിരിയുന്നതിന്റെ അക്ഷം (axis of rotation). ഗോളത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളിൽ, കേന്ദ്രം ഗോളത്തിന്റേതുതന്നെ ആയവയാണ് വൻവൃത്തങ്ങൾ. രണ്ടു ധ്രുവങ്ങളിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിലുള്ള വൻവൃത്തമാണ്, ഭൂമധ്യരേഖ (equator). അതിനു സമാന്തരമായ വൃത്തങ്ങളാണ് അക്ഷാംശ രേഖകൾ (lines of latitude)

ധ്രുവങ്ങളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൻ വൃത്തങ്ങളാണ് രേഖാംശരേഖകൾ (lines of longitude or meridians). ഇവയിൽ, ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ഗ്രീൻവിച്ച് എന്ന സ്ഥലത്തുകൂടി കടന്നുപോകുന്നതിനെ പ്രധാന രേഖാംശരേഖയായി എടുത്തിരിക്കുന്നു. (prime meridian)

ഈ അക്ഷങ്ങളനുസരിച്ച്, മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

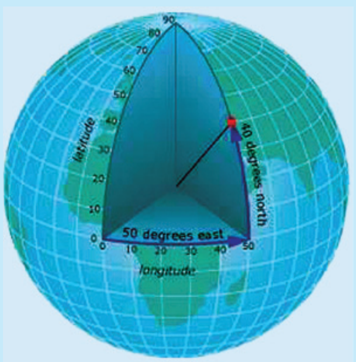
അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, അവയിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിടണം. അകലം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. സൗകര്യംപോലെ ഏതകലവുമാകാം.

ഉദാഹരണമായി, അര സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിട്ടാൽ, മുകളിലത്തെ ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും.



ഭൂസ്ഥാനങ്ങൾ

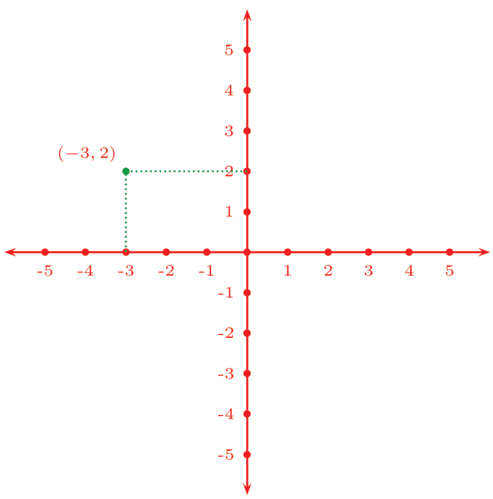
ഭൂമധ്യരേഖയും ഗ്രീൻവിച്ച് രേഖയും സന്ധിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവും, അതിനെ ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു അക്ഷാംശരേഖയിലെത്താൻ, വടക്കോട്ടോ തെക്കോട്ടോ നീങ്ങണം; അതിനനുസരിച്ച്, ബിന്ദുവിനെ ഭൂകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ മുകളിലോട്ടോ, താഴോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിതകോൺ തിരിയണം. ഇത്തരം കോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് അക്ഷാംശരേഖകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. (വടക്ക്, തെക്ക് എന്നി വിശേഷണങ്ങൾകൂടി ഉപയോഗിക്കും.) ഇനി നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു രേഖാംശരേഖയിലേക്കു മാറണമെങ്കിലോ? കിഴക്കോ, പടിഞ്ഞാറോ മാറണം; അതിനനുസരിച്ച്, വരയും വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിത കോൺ തിരിയണം. ഈ കോണുകളാണ് രേഖാംശരേഖകളുടെ സൂചകങ്ങൾ.



ഇപ്പോൾ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായി?

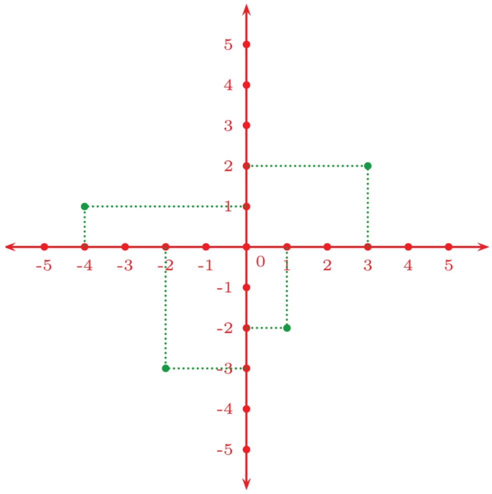
അക്ഷങ്ങളും വരച്ച്, അകലങ്ങളും അടയാളപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ, സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതെങ്ങനെ?

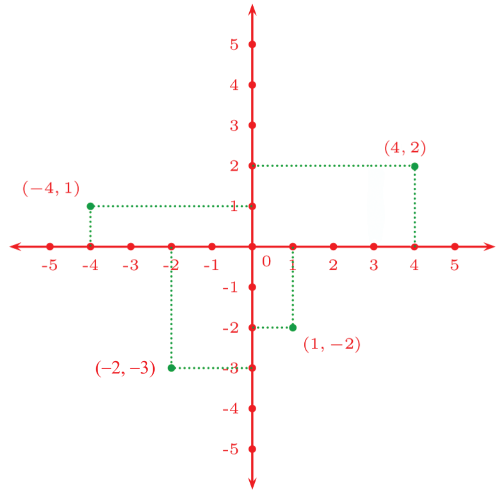
ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ $(-3, 2)$ ആയ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് നോക്കൂ:



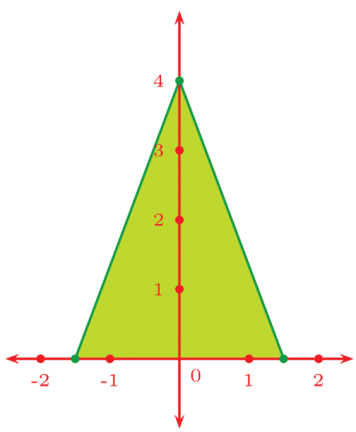
x അക്ഷത്തിൽ -3 അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നും, y അക്ഷത്തിൽ 2 അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതാണ് $(-3, 2)$ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു.

ഇനി അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ബിന്ദുവിൽനിന്ന് x അക്ഷത്തിലേക്കും y അക്ഷത്തിലേക്കും ലംബങ്ങൾ വരച്ചാൽ മതി.



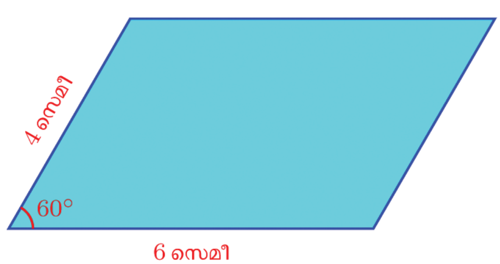


സൂചകസംഖ്യകൾ പൂർണസംഖ്യകൾ തന്നെയാകണമെന്നുണ്ടോ? ഉദാഹരണമായി പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെയും അക്ഷങ്ങളെടുക്കാം.



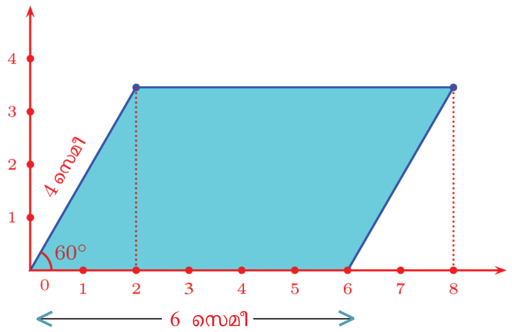
ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?



അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. Input Bar ൽ (a, 0) എന്ന് നൽകുക. സ്ലൈഡർ നിരക്കി a മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്? ഇതുപോലെ (a, 2), (a, −1), (0, a), (3, a), (−2, a) എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുവും സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയുടെ പ്രത്യേകത എന്തെന്ന് നോക്കുക. ബിന്ദുവിന് Trace On കൊടുത്തു നോക്കൂ.



കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ഇടതുമൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

വലതു മൂലയുടെയോ?

സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ആയ ബിന്ദു കിട്ടാൻ ജിയോജിബ്രയുടെ Input Bar ൽ (2, 2sqrt (3)) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി.

അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ x അക്ഷത്തിന് $X'X$ എന്നും (ഇടത്തുനിന്നു വലത്തോട്ട്) y അക്ഷത്തിന് (മുകളിൽനിന്നും താഴോട്ട്) YY' എന്നുമാണ് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. ഇവ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തെ O എന്നും ഈ ബിന്ദുവിനെ ആധാരബിന്ദു (origin) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക

i) x അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റേയും y സൂചകസംഖ്യ

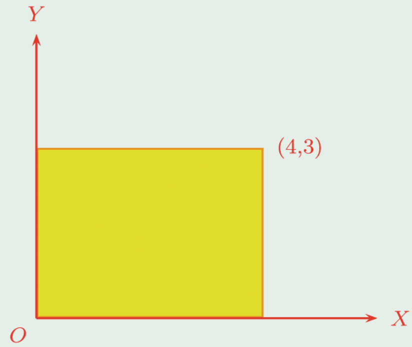
ii) y അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റേയും x സൂചകസംഖ്യ

iii) ആധാരബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

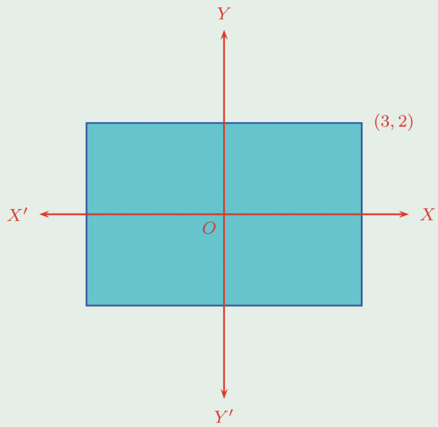
iv) (0, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y സൂചകസംഖ്യ

v) (1, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x സൂചകസംഖ്യ

(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

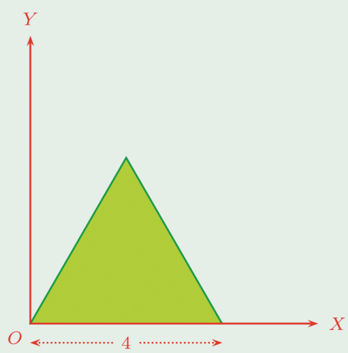


(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. കൂടാതെ ആധാരബിന്ദു ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.



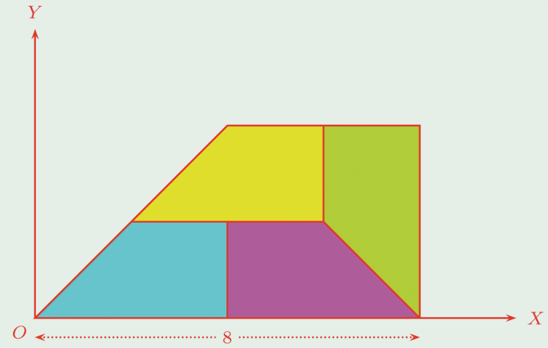
ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.



ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) തുല്യമായ നാലു ലംബകങ്ങൾ ചേർന്നൊരു വലിയ ലംബകം.



എല്ലാ ലംബകങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക.

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5]

എന്ന് കൊടുത്തു നോക്കൂ. a ആയി 0 മുതൽ 5 വരെയുള്ള പൂർണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് (a, a + 1) എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്താനുള്ള നിർദേശമാണിത്. അതായത്, (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ.

നിർദേശങ്ങളിൽ ചെറിയ ഒരു മാറ്റം വരുത്തി

Sequence [(a, a + 1), a, 0, 5, 0.5]

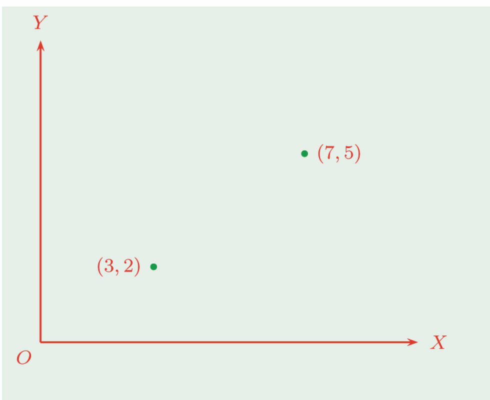
എന്നാക്കി നോക്കൂ. ഇവിടെ a ആയി എടുക്കുന്നത്, പൂജ്യത്തിൽ തുടങ്ങി 0.5 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാകണം എന്നതാണ് അവസാനം 0.5 എന്ന് നൽകുന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. (1 വീതമാണ് കൂട്ടേണ്ടതെങ്കിൽ പ്രത്യേകിച്ച് ഒന്നു നൽകേണ്ടതില്ല). അപ്പോൾ (0, 1), (0.5, 1.5), (1, 2), ..., എന്നിങ്ങനെ (5, 6) വരെയുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് ലഭിക്കുന്നത്.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശത്തിൽനിന്നും കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സവിശേഷതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

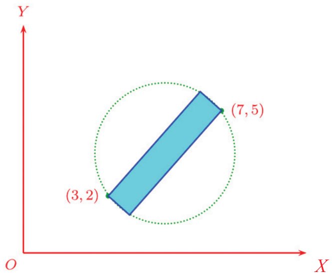
Sequence [(a, 0), a, 0, 5, 0.5]
Sequence [(a, 2a), a, –3, 4, 0.25]
Sequence [(a, a^2), a, –3, 3, 0.2]
Sequence [(a, -a^2), a, –3, 3, 0.2]
Sequence [(a^2, a), a, –4, 4, 0.1]

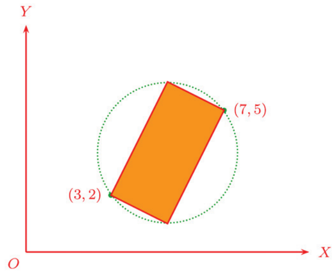
ചതുരക്കണക്കുകൾ

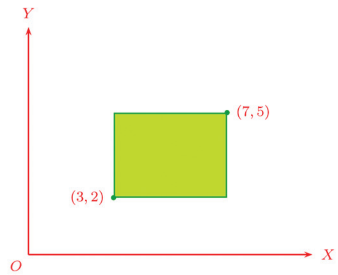
ചിത്രം നോക്കൂ.



ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. എത്ര വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം.





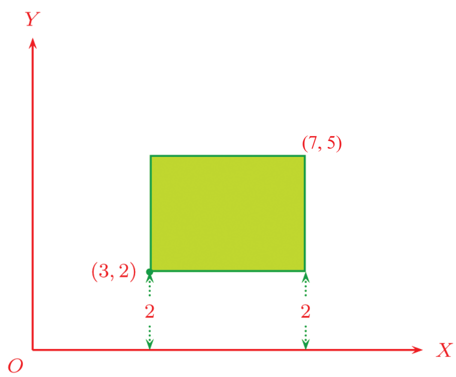


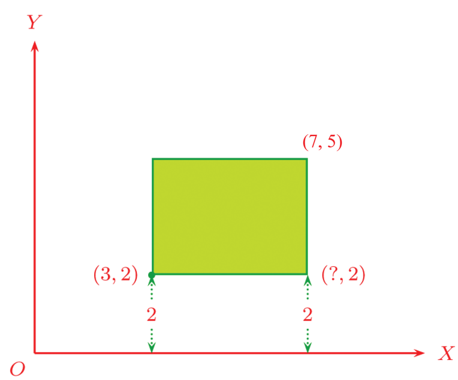
ഇവയിൽ ഒന്നിനു മാത്രമാണ് അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വശങ്ങളുള്ളത്.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

അതിന് ചിത്രം അൽപംകൂടി വിശദമാക്കാം. താഴത്തെ ഇടതുമൂലയുടെ y സൂചകസംഖ്യ 2 ആയതിനാൽ x അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ഉയരം 2 ആണ്.

താഴത്തെ വശം x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിന്റെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ ഉയരത്തിലാണ്.





അതായത് ഈ മൂലയുടെയും y സൂചകസംഖ്യ 2 തന്നെ.

ഇതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെ വലതുമൂല നോക്കുക. ഇതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 7 ആയതിനാൽ, y അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ഈ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം 7 ആണ്.

വൃത്തചിത്രങ്ങൾ

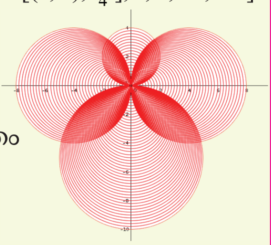
Input Bar ൽ circle [(1, 3), 2] എന്നെഴുതിയാൽ, ജിയോജിബ്രയിൽ കേന്ദ്രം (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവും ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം കിട്ടും.

Sequence [circle [(a, 0), 1], a, 0, 5, 0.2]

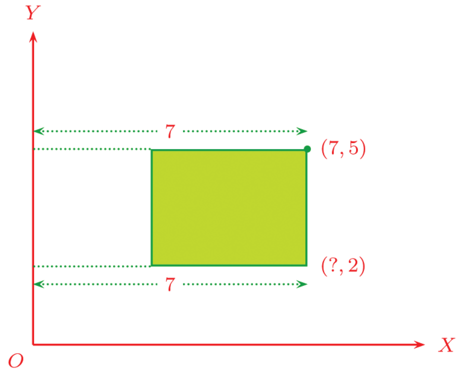
എന്ന നിർദേശം നൽകിയാൽ (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0), ..., (5, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമായി, ആരം 1 ആയ വൃത്തങ്ങളും കിട്ടും. ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദ്ദേശവും നൽകിയാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങൾ മനസ്സിൽ കാണാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ. അതിനു ശേഷം ജിയോജിബ്രയിൽ ചെയ്തു നോക്കാം.

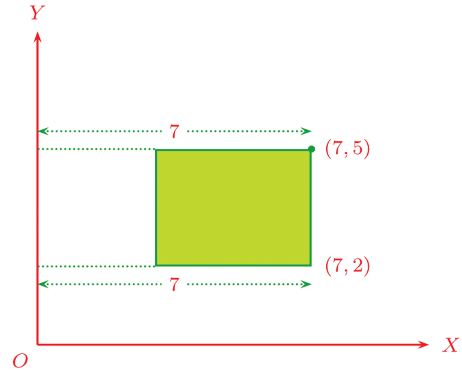
- Sequence [circle [(a, 0), a], a, 0, 10, 0.1]
- Sequence [circle [(a, 0), $\frac{a}{4}$], a, 0, 10, 0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

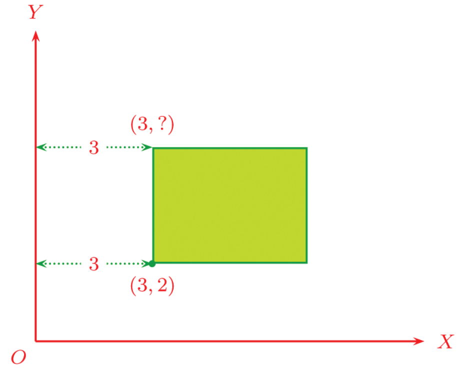


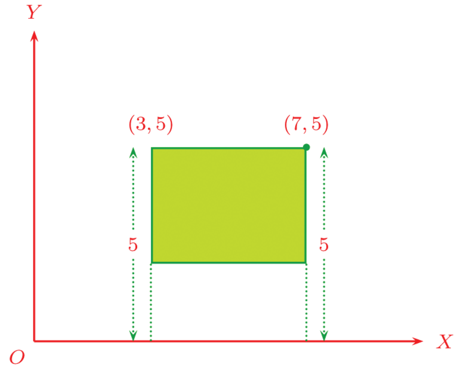
ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം, y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിലെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ അകലത്തിലാണ്; അതായത്, അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യയും 7 തന്നെ.





ഇതുപോലെ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതു-മേൽ മൂലയും കണ്ടുപിടിക്കാം





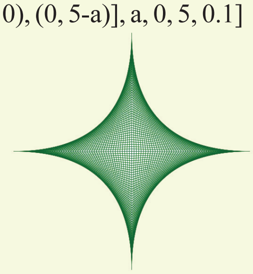
ജിയോജിബ്രയിൽ

Segment [(2, –1), (3, 5)]

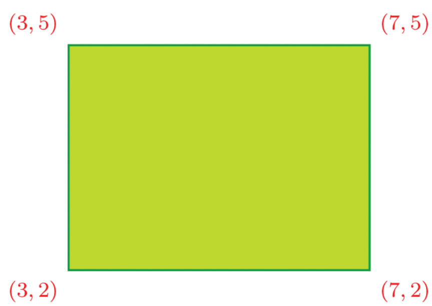
എന്ന നിർദ്ദേശം കൊടുത്താൽ (2,–1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരക്കഷണം കിട്ടും. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർദേശങ്ങൾ തരുന്ന വരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

- Sequence [segment [(a, 0), (a, 3)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (a, a)], a, 0, 5, 0.2]
- Sequence [segment [(0, 3), (a, 0)], a, –4, 4, 0.1]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, a)], a, –3, 3, 0.2]
- Sequence [segment [(a, 0), (0, 5-a)], a, 0, 5, 0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.



ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഒരുമിച്ചു നോക്കൂ:

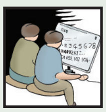


സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗവും ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. ഉപയോഗിച്ച തത്വമെന്താണ്?

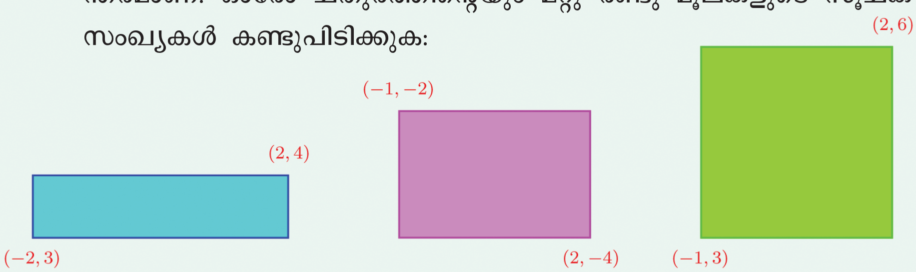
x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല.

വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ മറ്റൊരു ചതുരം നോക്കൂ:

ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?



(1) ചുവടെയുള്ള ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:



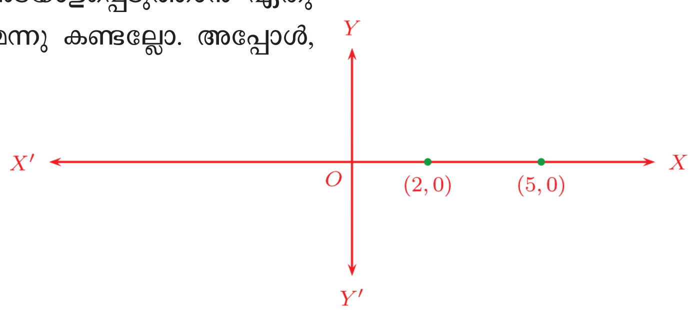
(2) അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ജോടികൾ, ഇടതു-വലതു, മേൽ-കീഴ് സ്ഥാനങ്ങൾ ശരിയായി അടയാളപ്പെടുത്തുക. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും, ഈ ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $(3, 5), (7, 8)$ ii) $(6, 2), (5, 4)$

iii) $(-3, 5), (-7, 1)$ iv) $(-1, -2), (-5, -4)$

അകലങ്ങൾ

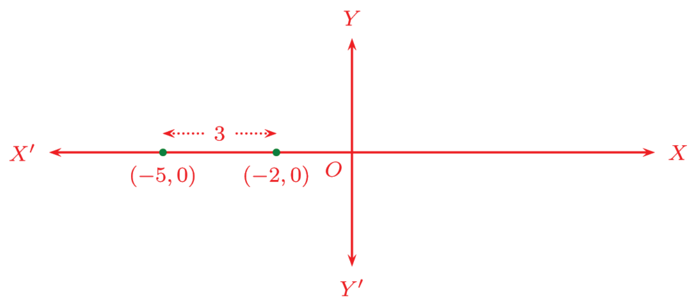
അക്ഷങ്ങളിൽ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഏതു നീളവും ഏകകമായെടുക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ മടങ്ങായി മാത്രമേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഉദാഹരണമായി x അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ നോക്കൂ.



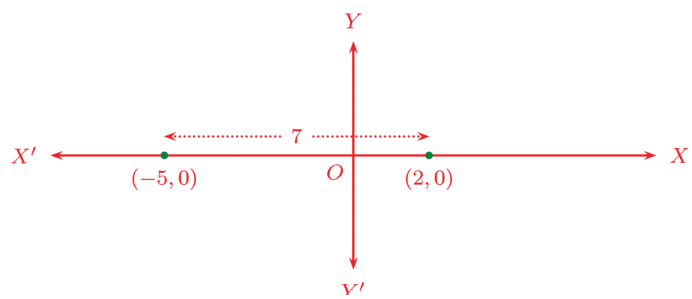
ആധാര ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ 2 മടങ്ങ്; രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം ഏകകത്തിന്റെ 5 മടങ്ങ്. ഇത് ചുരുക്കി, ആധാരബിന്ദുവിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 2 എന്നും, രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 5 എന്നുമാണ് സാധാരണയായി പറയുന്നത്.

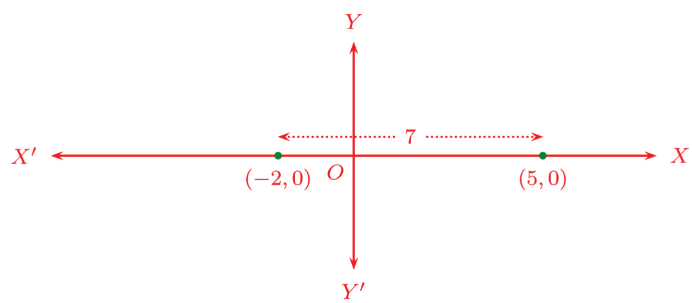
അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $5 - 2 = 3$

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ?



ബിന്ദുക്കൾ ആധാരബിന്ദുവിന്റെ ഇരുവശത്തുമാണെങ്കിലോ?





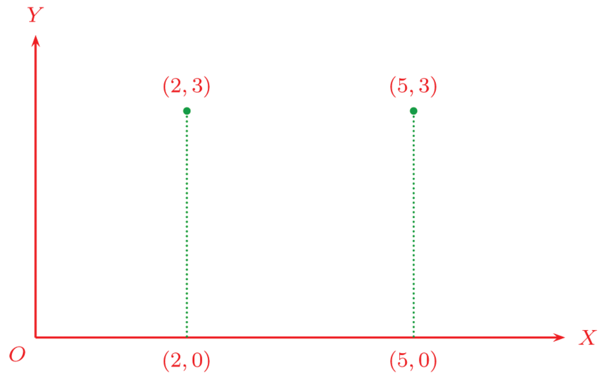
x അക്ഷത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ, ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയതും, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കിയതും ഓർത്തുനോക്കൂ.

സൂചകസംഖ്യകൾ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$.

ഇനി ഈ ബിന്ദുക്കൾ നോക്കൂ:

ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്നും x അക്ഷത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ? (എന്തുകൊണ്ട്?)



പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

ഒരേ y സൂചകസംഖ്യ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; അത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, അവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

ഇതുപോലെ ഒരേ x-സൂചകസംഖ്യകളുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചും പറയാമല്ലോ:

ഒരേ x സൂചകസംഖ്യ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലാണ്; അത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, അവയുടെ y സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

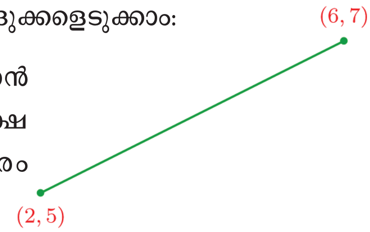
ബീജഗണിത ഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y), (x_2, y) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$

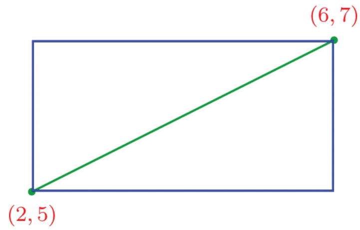
സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y_1), (x, y_2) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y_1 - y_2|$

x സൂചകസംഖ്യകളും y സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

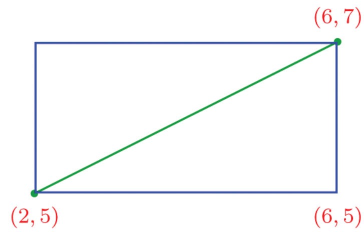
ഉദാഹരണമായി (2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെടുക്കാം:



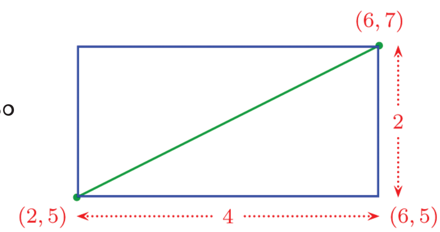
ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണക്കാക്കാൻ ഇവ എതിർമൂലകളും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരവുമായ ചതുരം വരയ്ക്കാം:



ഈ ചതുരത്തിന്റെ വികർണമാണ് നമുക്കു വേണ്ടത്. അതു കണക്കാക്കാൻ, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി, അതിന്, ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ മറ്റേ മൂല എഴുതാം:



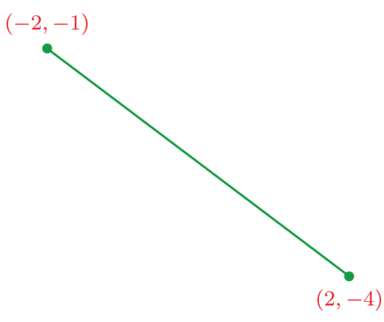
ഇതിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ:



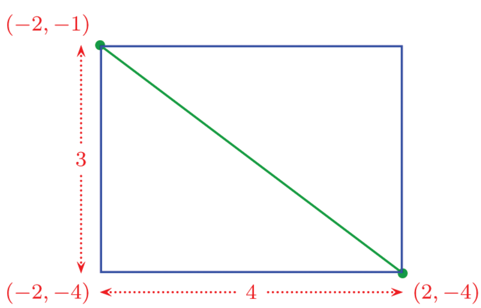
ഇനി പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, നമുക്കു വേണ്ട നീളം കണക്കാക്കാം:

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ബിന്ദുക്കൾ ഇങ്ങനെയായാലോ?



ഇതിലും, ചതുരം വരച്ച്, നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം:

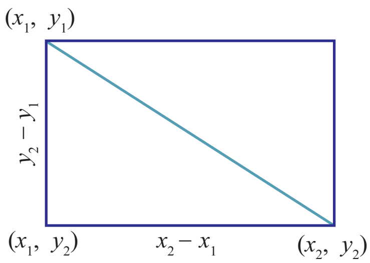


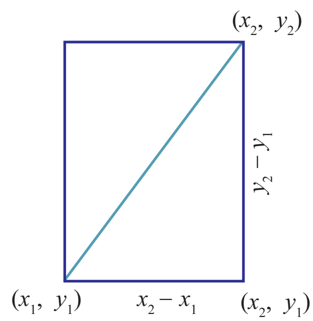
അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട അകലം

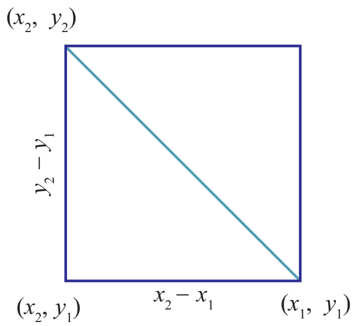
$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

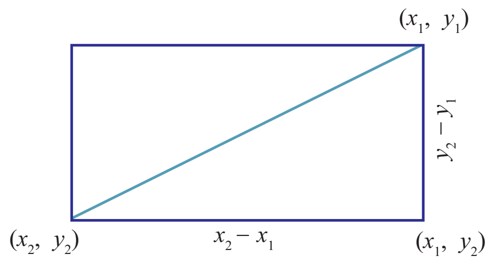
x സൂചകസംഖ്യകളും, y സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇങ്ങനെ ചതുരം വരച്ചു കണ്ടുപിടിക്കാം. (ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഇങ്ങനെയൊരു ചതുരം തന്നെ ഇല്ലല്ലോ).

പൊതുവായി ഇത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുക്കാം. ഇവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായും ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാം. മറ്റ് രണ്ട് മൂലകൾ (x_1, y_2), (x_2, y_1) എന്നു കാണാം.









ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$ എന്നും കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം.

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

ഏതു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ കേവലമൂല്യത്തിന്റെയും വർഗം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ അകലം

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഇതിൽ $y_1 = y_2$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

എന്നു കിട്ടും; $x_1 = x_2$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ, ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായാലും, അകലം ഈ രീതിയിൽ എഴുതാം.

സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയ ഏത് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ $(4, -2)$, $(-3, -1)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{((4-(-3))^2 + ((-2-(-1))^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

സൂചകസംഖ്യകൾ $(-2, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവും ആധാരബിന്ദുവുമായുള്ള അകലമോ?

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) ആയ ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

സൂചകസംഖ്യകൾ $(-1, 2)$, $(3, 5)$, $(9, -3)$ ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണോ?

മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, അവയിൽ രണ്ടെണ്ണം തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങളിലെ ഏറ്റവും വലുത്, മറ്റ് രണ്ട് അകലങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കണം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ A, B, C എന്നു പേരിടാം. അപ്പോൾ,

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2 + ((5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

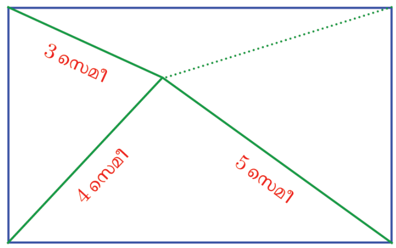
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2 + ((2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത് AC (അതെങ്ങനെ കിട്ടി?) ഇനി AB, BC ഇവയുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ 15; ഇത് AC യുടെ നീളമല്ല. അപ്പോൾ A, B, C ഒരു വരയിലുമല്ല.

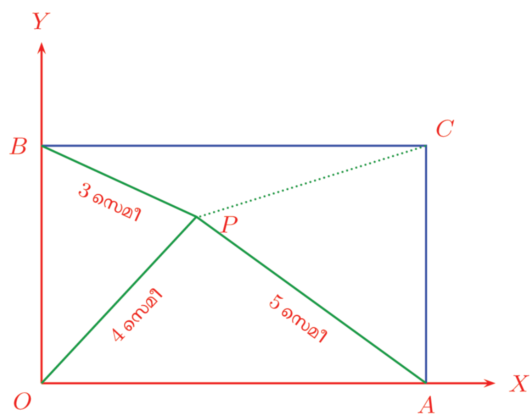
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു ചതുരത്തിനകത്തെ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു മൂലകളിലേക്കുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. നാലാമത്തെ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം എന്താണ്?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം.



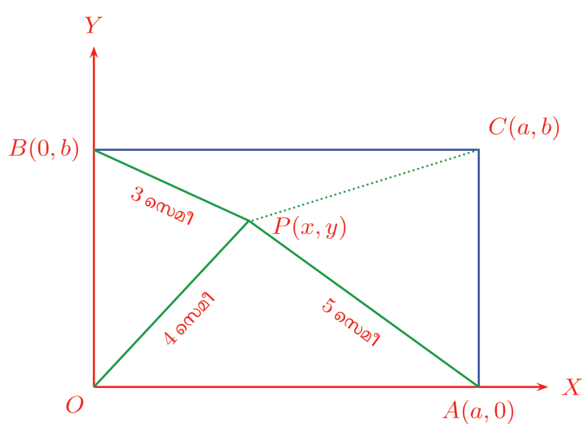
ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ ഇടതുമൂല ആധാരബിന്ദുവായും, അതിലൂടെയുള്ള രണ്ടു വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളായും എടുക്കാം:



ചിത്രത്തിൽ, A എന്ന ബിന്ദു x അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, അതിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ 0 ആണ്; അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ a എന്നെടുത്താൽ, A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(a, 0)$.

ഇതുപോലെ B യുടെ y സൂചകസംഖ്യ b എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, b)$. അപ്പോൾ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (a, b) ആകണം.

P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുക്കാം:



ഇനി അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതാം:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് PC ആണല്ലോ; അതിന്റെ വർഗം

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് ഇത് കണക്കാക്കാൻ പറ്റുമോ?

അക്കൂട്ടത്തിലെ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$\left(x^2 + (y - b)^2\right) - (x^2 + y^2) = 9 - 16$$

എന്നു കാണാം; അതായത്,

$$(y - b)^2 - y^2 = -7$$

മൂന്നാമത്തെ സമവാക്യവും ഇതും ഉപയോഗിച്ച്

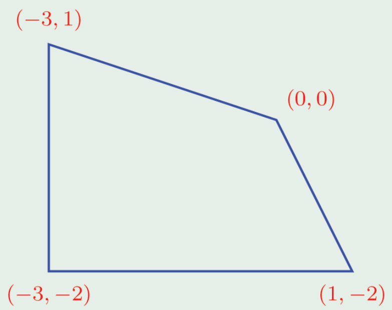
$$(x - a)^2 + y^2 + \left((y - b)^2 - y^2\right) = 25 - 7$$

എന്നും കാണാം. അതായത്

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 18$$

അപ്പോൾ PC യുടെ നീളം $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയും വികർണങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.



(2) (2, 1), (3, 4), (− 3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും, ആരം 10 ആയി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു.

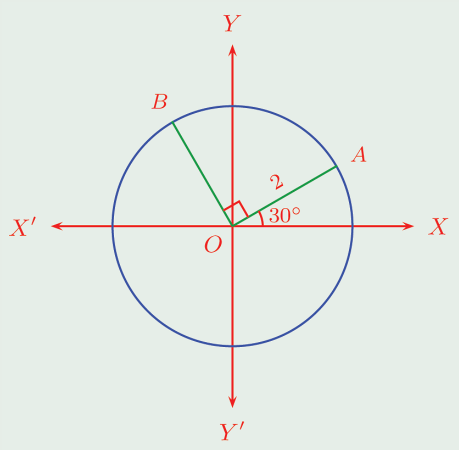
i) സൂചകസംഖ്യകൾ (6, 9), (5, 9), (6, 8) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഈ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ii) ഈ വൃത്തത്തിലെ 8 ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(4) കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(1, 1)$ ഉം, ആരം $\sqrt{2}$ ഉം ആയ വൃത്തം x അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും, y അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, A, B വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്.



AB എന്ന ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

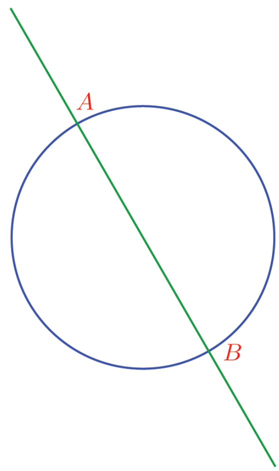
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി പലതരം രൂപങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു.			
• x, y അക്ഷങ്ങൾ വരച്ച് പലതരം രൂപങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• കമ്പ്യൂട്ടറിൽ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ജ്യാമിതീയ പാറ്റേണുകൾ നിർമിക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം കണ്ടെത്തുന്നു.			
• ശീർഷങ്ങളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച്, അവ നിശ്ചയിക്കുന്ന ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ വിവിധ അളവുകൾ കണ്ടത്തുന്നു.			

7 തൊടുവരകൾ

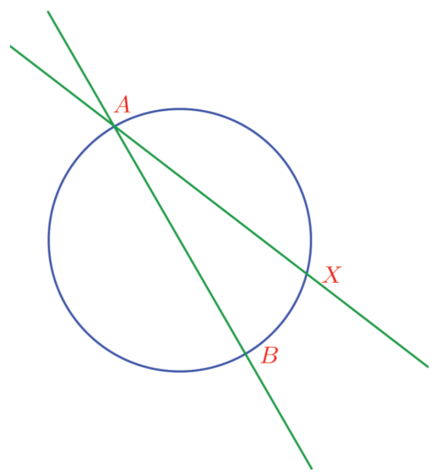
വരയും വട്ടവും

ചിത്രം നോക്കൂ:

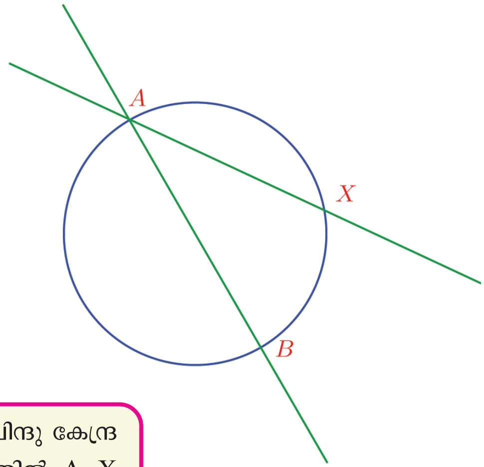


വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസമാണ് AB; ഇത് ഇരുവശത്തേക്കും അൽപം നീട്ടിയിട്ടുമുണ്ട്.

വ്യാസത്തിനു പകരം A യിലൂടെ മറ്റൊരു ഞാൺ വരച്ച്, ഇതുപോലെ നീട്ടിയതാണ് ഈ ചിത്രം.

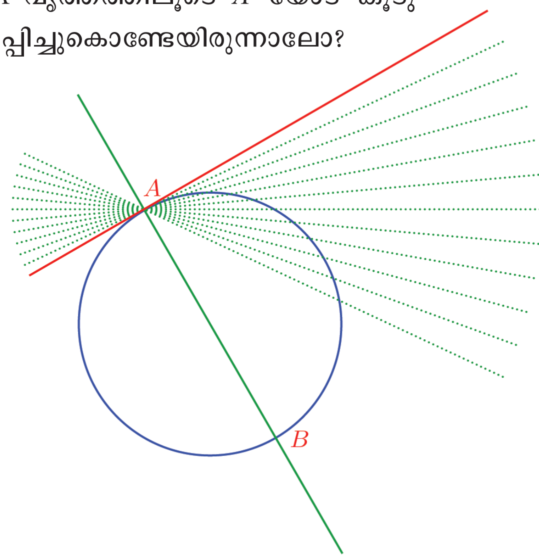


A യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റാതെ, X അൽപംകൂടി A യോട് അടുപ്പിച്ചാലോ?



ജിയോജിബ്രയിൽ O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ A, X എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. O, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളും A, X എന്നീ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് വരകൾ വരയ്ക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ AX എന്ന വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? X എന്ന ബിന്ദു A യിലെത്തുമ്പോഴോ? O, X ഇവ കൂട്ടി യോജിപ്പിക്കുക. X ന്റെ സ്ഥാനം A യിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ OAX, AOX എന്നീ കോണുകൾക്ക് എന്ത് മാറ്റമാണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് നോക്കുക.

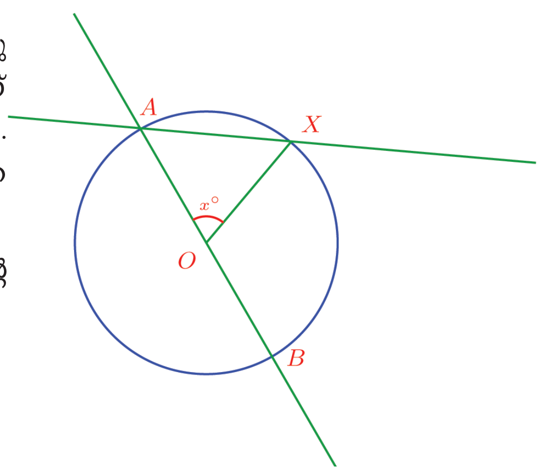
ഇങ്ങനെ X വൃത്തത്തിലൂടെ A യോട് കൂടുതൽ അടുപ്പിച്ചുകൊണ്ടേയിരുന്നാലോ?



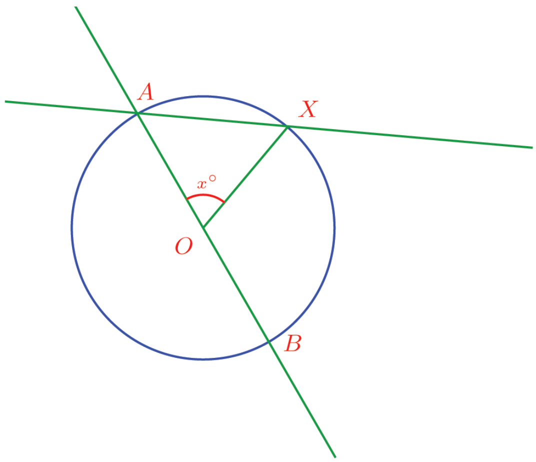
ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന വര, വൃത്തത്തെ A യിൽ മാത്രം ഒന്നു തൊടുന്നു. അല്ലേ?

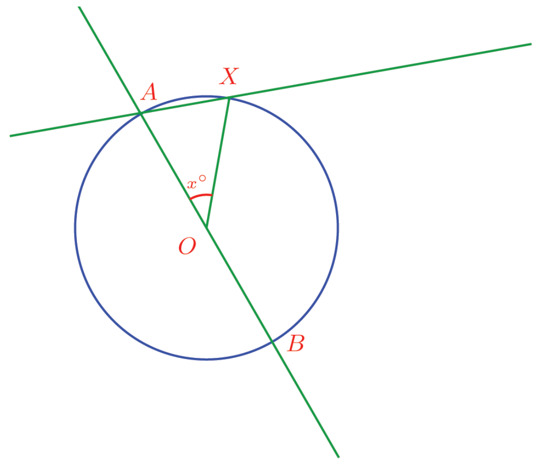
ഈ വരയെ വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവര (tangent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. വ്യാസവും തൊടുവരയും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

ഇതു വ്യക്തമാകാൻ, AX എന്ന ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ x° എന്നെടുക്കാം.



X എന്ന ബിന്ദു A യോടടുപ്പിക്കുന്തോറും AX എന്ന ഞാണിന്റെ നീളവും, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണും ചെറുതാകും; അയായത് x എന്ന സംഖ്യ, പൂജ്യ ത്തോടടുക്കും.

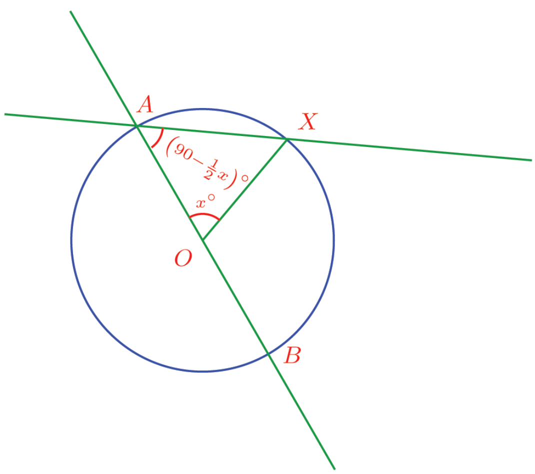




ഞാണും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള കോണോ? AOX സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ കോൺ

$$\frac{1}{2}(180-x)^\circ = \left(90-\frac{1}{2}x\right)^\circ$$

ആണ്.



X എന്ന ബിന്ദു, A എന്ന ബിന്ദുവിനോട് അടുക്കുന്തോറും, ഈ കോൺ 90° യോട് അടുത്തടുത്തു വരും. തൊടുവരയാകുമ്പോൾ, കൃത്യം 90° ആകുകയും ചെയ്യും.

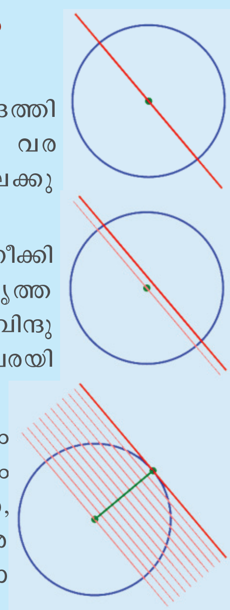
നീങ്ങുന്ന വരകൾ

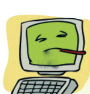
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

ഒരു വൃത്തവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ ഒരു വരയും. വര അൽപം മുകളിലേക്കു നീക്കിയാലോ?

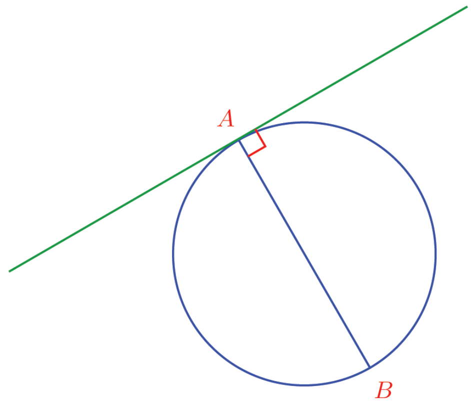
വര വീണ്ടും വീണ്ടും നീക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിപ്പോകുന്ന വരയിലെത്തില്ലേ?

കേന്ദ്രവും, അവസാനം കിട്ടിയ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ സമാന്തരവരകൾക്കെല്ലാം ലംബമാണല്ലോ.





ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു ആരവും വരയ്ക്കുക. ആരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു എടുത്ത് അതിലൂടെ ആരത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുക. ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിലെത്തുമ്പോൾ വരയ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?



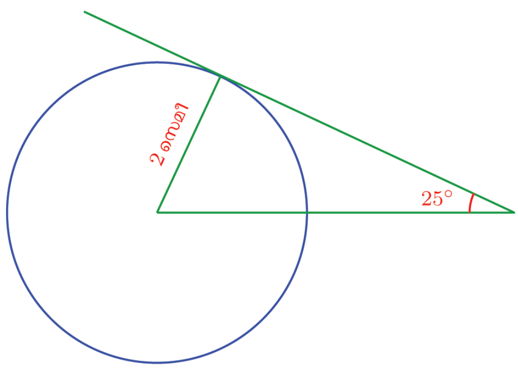
ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവര, ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിനു ലംബമാണ്.

വൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Tangents എടുത്ത് വൃത്തത്തിലും തൊടുവര കടന്നുപോകേണ്ട ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. ബിന്ദു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരു തൊടുവര ലഭിക്കുമല്ലോ. വൃത്തത്തിന് പുറത്താണെങ്കിലോ?

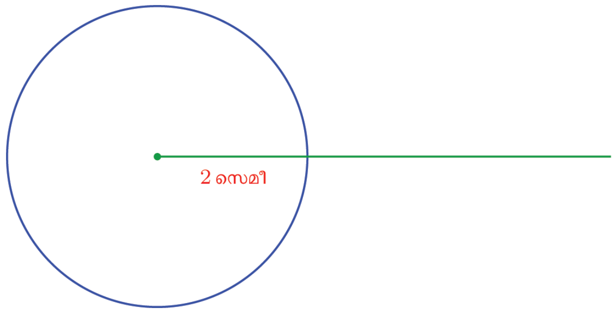
വൃത്തത്തിന് അതിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുവര വരച്ച് അതിന്റെ Trace On നൽകുക. തൊടുവര വരച്ച ബിന്ദുവിന് Animation നൽകി നോക്കൂ.

ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം; ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ മുകളിലെ വര, വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയാണ്.



ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ?

ആദ്യം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം. കേന്ദ്രത്തിലൂടെ വിലങ്ങനെ ഒരു വരയും വരയ്ക്കാം.

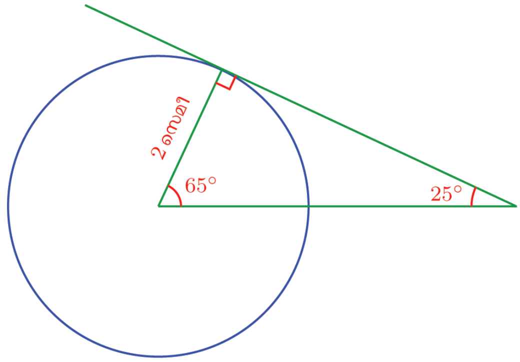


ഇനി വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കണം? അത് ആദ്യത്തെ വരയെ 25° ചരിവിൽ കൂട്ടിമുട്ടണമല്ലോ.

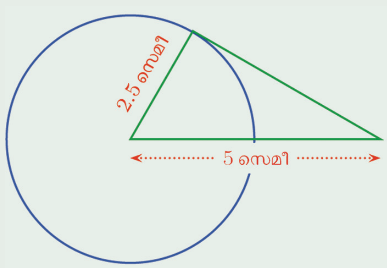
ആദ്യത്തെ ചിത്രം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. അതിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ കോൺ മട്ടമാണ്, മറ്റൊരു കോൺ 25° യും.

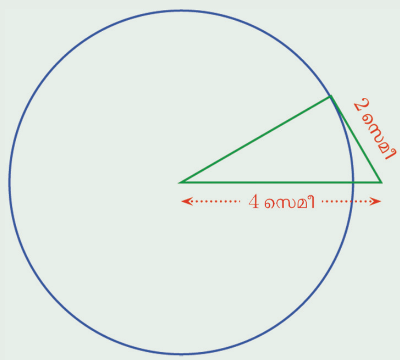
അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കോൺ 65°.

ഇനി ചിത്രം മുഴുവനാക്കാമല്ലോ.



(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടു ചിത്രത്തിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കുള്ള ആരവും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള മറ്റൊരു വരയും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

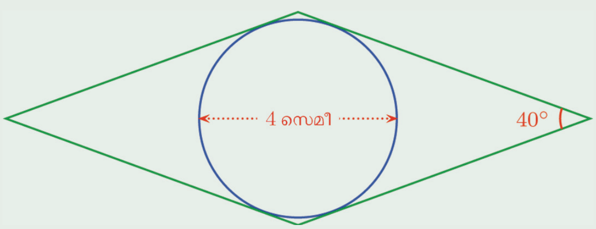




ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

(2) ചിത്രത്തിലെ സമഭുജ സമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്.

ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.

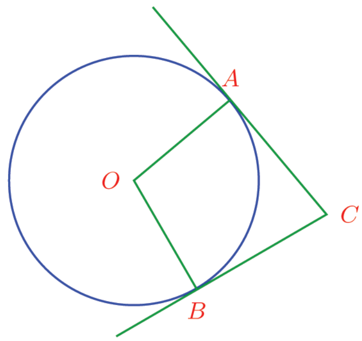


(3) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്നത് ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

(4) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

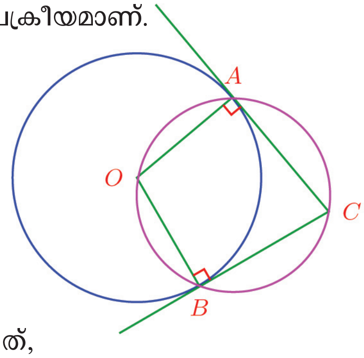
തൊടുവരകളും കോണുകളും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ, C എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

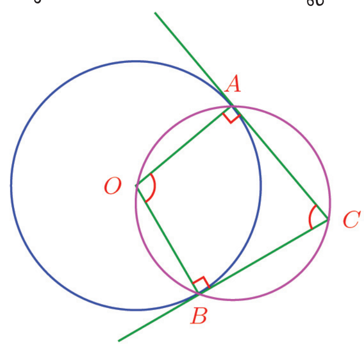
$OACB$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ A, B എന്നീ എതിർമൂലകളിലെ കോണുകൾ മട്ടമാണ്; അതിനാൽ, അവയുടെ തുക 180°. അപ്പോൾ ഈ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.



അതായത്,

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും മൂലകളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.

ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുകയും 180° തന്നെയാണല്ലോ.

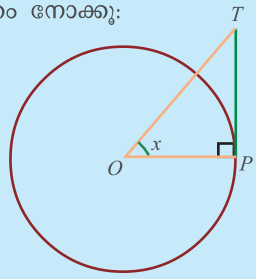


പേരുവിവരം

തൊടുക എന്നർഥമുള്ള tangere എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽനിന്നാണ്, തൊടുവരയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ tangent എന്ന പേരു വന്നത്.

ത്രികോണമിതിയിലെ tan എന്ന അളവിന്റെയും മുഴുവൻ പേര് tangent എന്നു തന്നെയാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന് തൊടുവരയുമായുള്ള ബന്ധം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

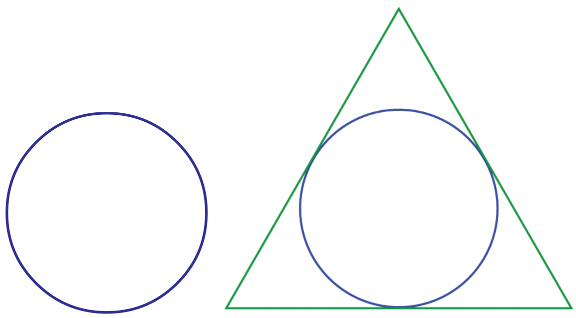


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 എന്നെടുത്താൽ, PT എന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം $\tan x$ തന്നെയല്ലേ?

ഇതും ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം.

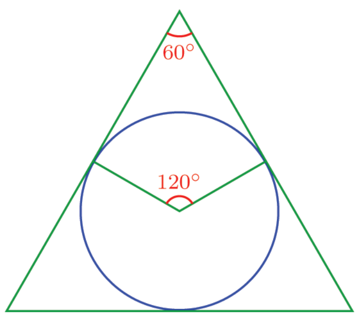
ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോണും അനുപൂരകമാണ്.

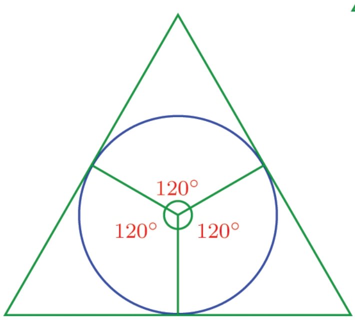
ഇവ ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കാവുന്ന ചില ചിത്രങ്ങൾ നോക്കാം. ഒരു വൃത്തത്തെ കൃത്യമായി പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം.



ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാകണമല്ലോ. ത്രികോണം സമഭുജമായതിനാൽ, ഇവ ചേരുന്ന കോൺ 60°.

ഇവ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണോ?

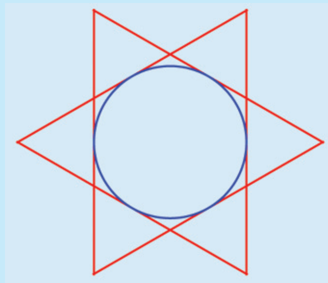




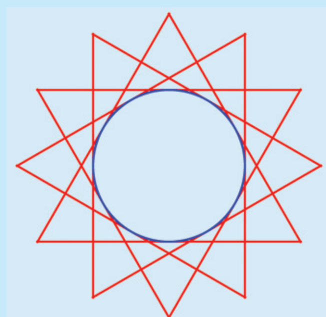
ഇതുപോലെ, ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളെല്ലാം 120° ആണെന്നു കാണാം.

വരകൾകൊണ്ടൊരു വൃത്തം

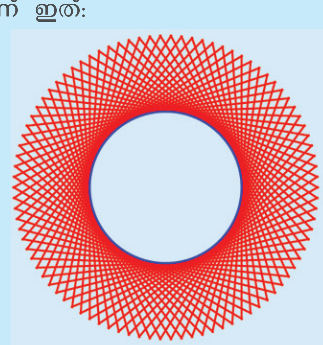
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആറു ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരകൾ വരച്ച്, ഒരു നക്ഷത്രമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു.



വരകളുടെ എണ്ണം 12 ആക്കിയാലോ?

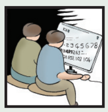


കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, 90 വരകൾ വരച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്:



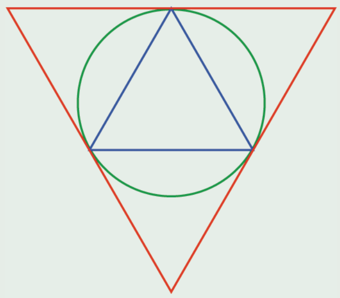
അപ്പോൾ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ 120° ഇടവിട്ടു മൂന്ന് ആരങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ നമുക്കുവേണ്ട ത്രികോണമായി.

3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, ഇങ്ങനെയൊരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ചു നോക്കൂ.



(1) ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നതും കോണുകൾ 40°, 60°, 80° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണം സമഭുജമാണ്. അതിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ് വലിയ (ചുവന്ന) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

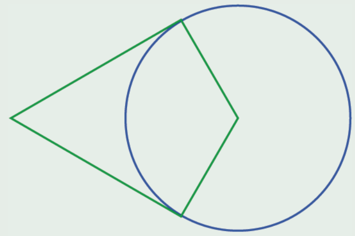


i) വലിയ ത്രികോണം സമഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

ii) ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.

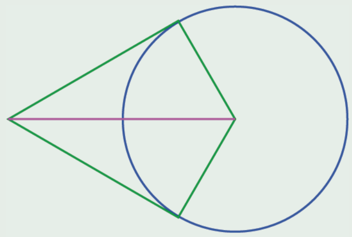
iii) സമഭുജത്രികോണത്തിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ, വശങ്ങളെല്ലാം രണ്ട് മടങ്ങായ സദൃശ ത്രികോണം കിട്ടുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള ആരങ്ങളുമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

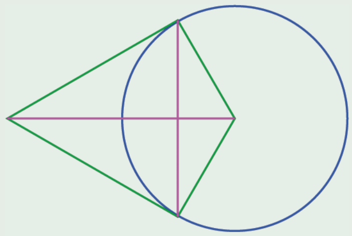


i) തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ii) വൃത്തകേന്ദ്രവും, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ആരങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

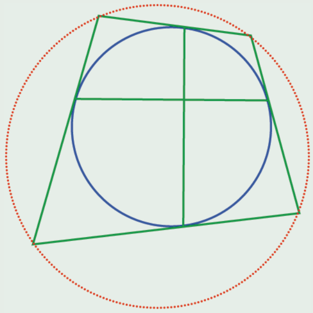


iii) തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ ലംബസമഭാജിയാണ് ഈ വര എന്ന് തെളിയിക്കുക.



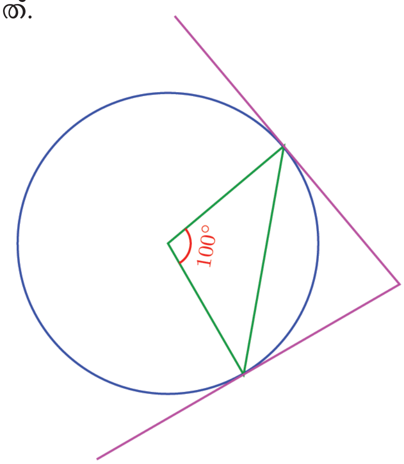
(4) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ഞാണുകളുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവര കൾ വശങ്ങളായ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഇതിലെ ഒരു ഞാൺ വ്യാസമായാൽ ഏതു തരം ചതുർഭുജമാണ് കിട്ടുന്നത്? രണ്ടു ഞാണും വ്യാ സമായാലോ?

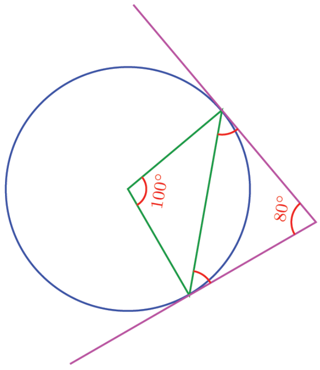


ഞാണും തൊടുവരയും

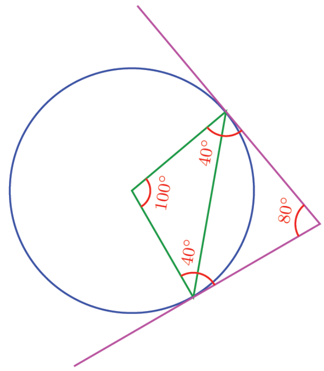
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള തൊടുവരകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



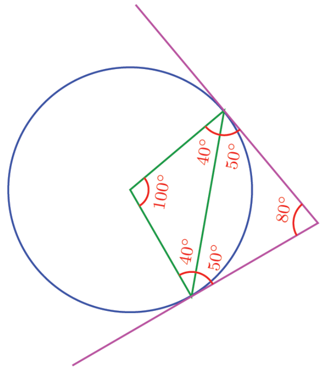
ഇതിൽ, തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോൺ 80° ആണെന്നറിയാം. ഞാണും തൊടുവരകളും തമ്മിലുള്ള കോണുകളോ?



ചിത്രത്തിലെ പച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. ഇവയുടെ തുക $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. അപ്പോൾ ഓരോന്നും 40°.

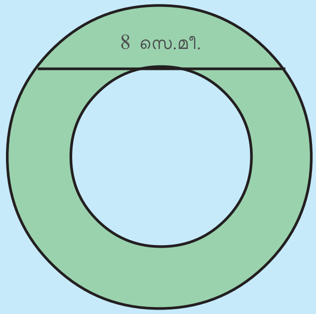


ആരവും തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ 90° ആണല്ലോ; അപ്പോൾ ഞാണും തൊടുവരയുമായുള്ള കോൺ $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



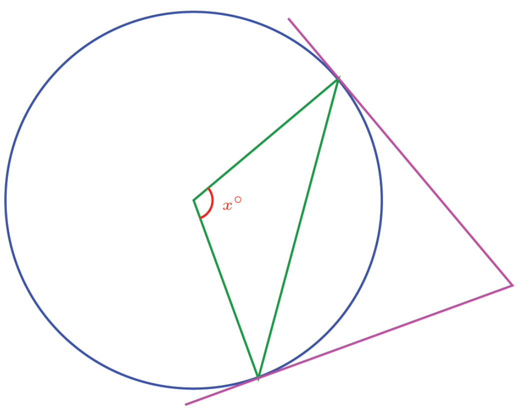
പരപ്പളവ് പ്രശ്നം

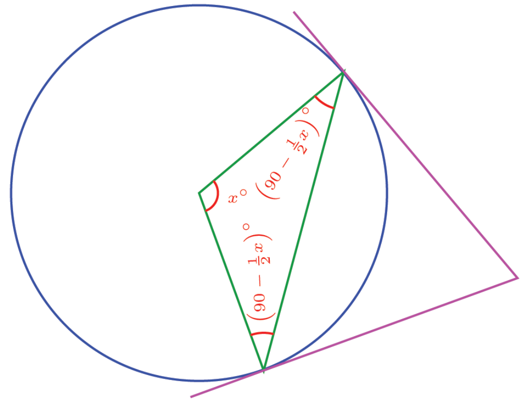
ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഇത്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ?

ഏതു ചാപത്തിനും ഇതു ശരിയാണോ? ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ x° എന്നെടുത്തുനോക്കാം.

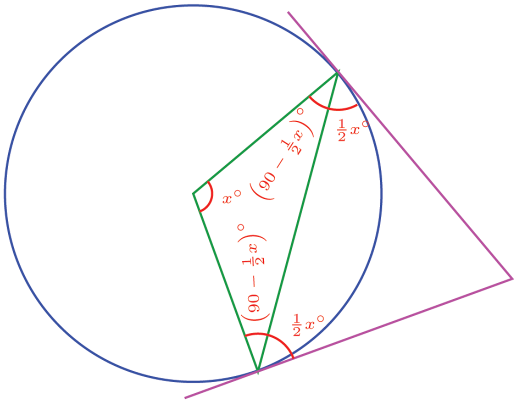




അപ്പോൾ പച്ച ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ

$$\frac{1}{2}(180-x)^\circ = \left(90-\frac{1}{2}x\right)^\circ$$

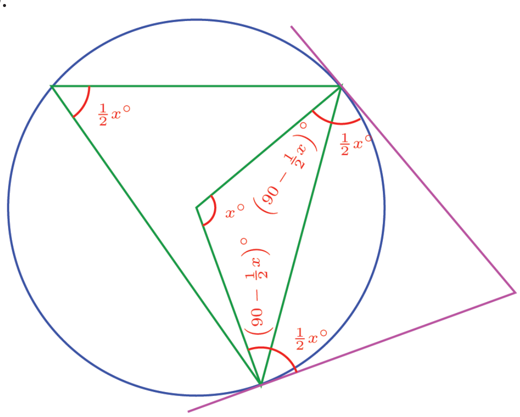
തൊടുവരയും ആരവും തമ്മിലുള്ള കോൺ 90° ആയതിനാൽ, ഇനി തൊടുവരയും ഞാണും തമ്മിലുള്ള കോൺ $\frac{1}{2}x^\circ$ എന്നു കാണാമല്ലോ.



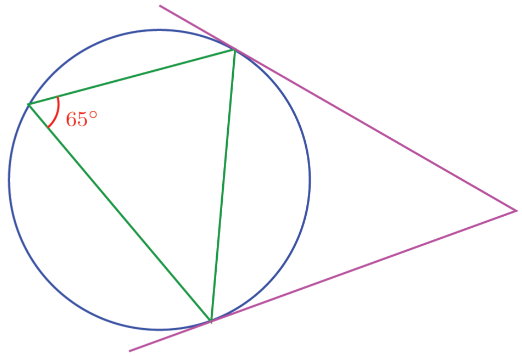
ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ ഒരു ഞാണും, ഞാണിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകളും വരയ്ക്കുക. ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ഞാൺ തൊടുവരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കോണുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? പല ഞാണുകൾ വരച്ചു നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്.

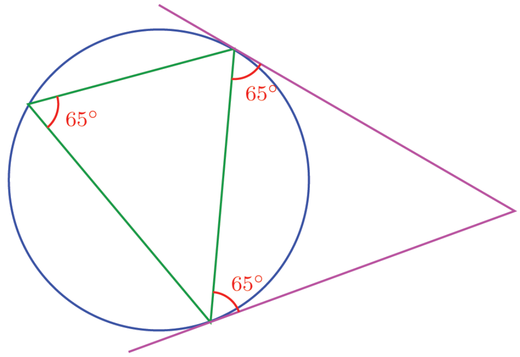
വൃത്തത്തിന്റെ വലിയ ഭാഗത്ത് ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന കോണും കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.



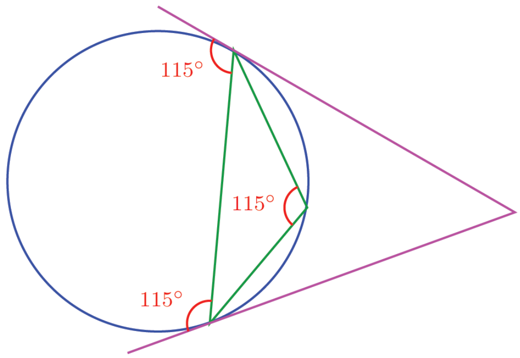
അപ്പോൾ ഈ ചിത്രത്തിൽ തൊടുവരകൾ ഞാണുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ എന്താണ്?



വലതുവശത്തെ കോണുകൾ 65° തന്നെ



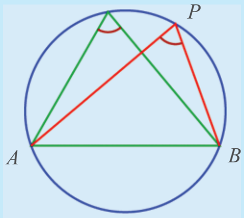
തൊടുവരകൾ ഞാണിന്റെ ഇടതുവശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. ഇത്, വൃത്തത്തിന്റെ ചെറിയ ഭാഗത്ത് ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ തന്നെയല്ലേ?



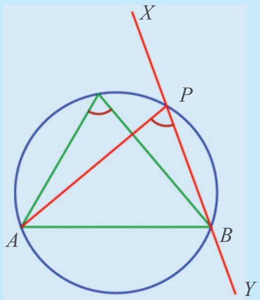
അപ്പോൾ, ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിലെ തൊടുവരകളുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും, വൃത്തത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ വരച്ചു കാണിക്കാം.

മാറാത്ത കോൺ

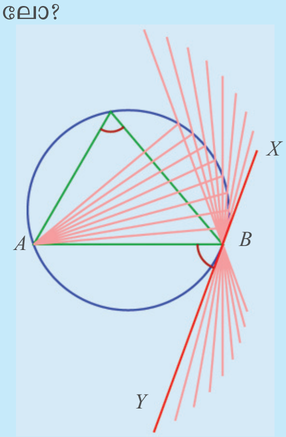
ഒരേ വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



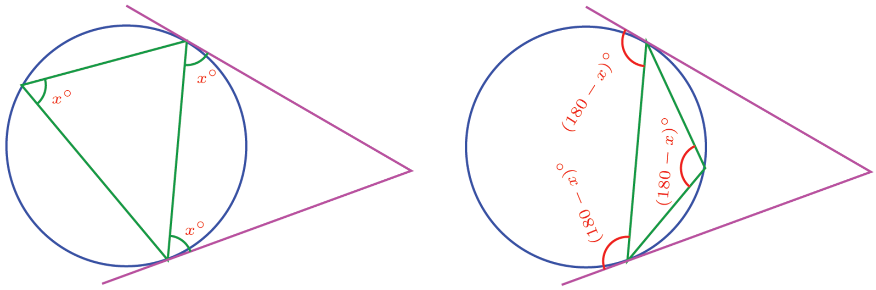
PB അൽപം നീട്ടി വരയ്ക്കാം:



ഇനി P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി, B യിലെത്തിയാലോ?



XY എന്ന വര B യിലെ തൊടുവരയാകും; കോണൊട്ടു മാറുന്നുമില്ല.

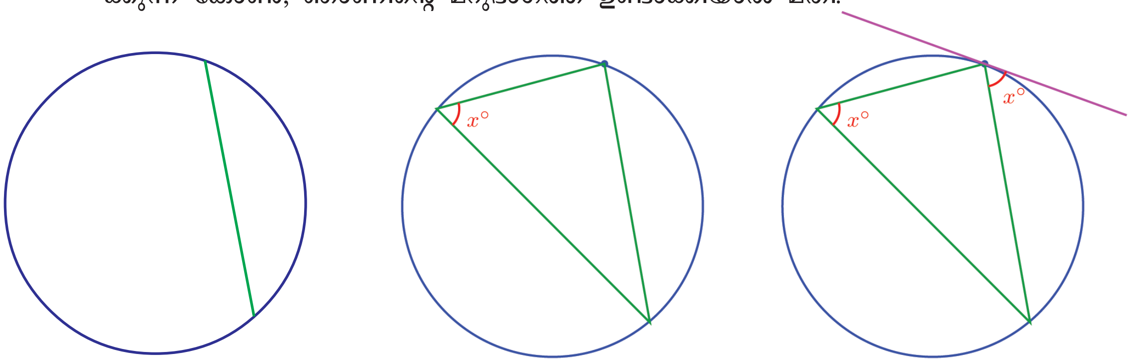


ഇങ്ങനെ എഴുതുകയും ചെയ്യാം.

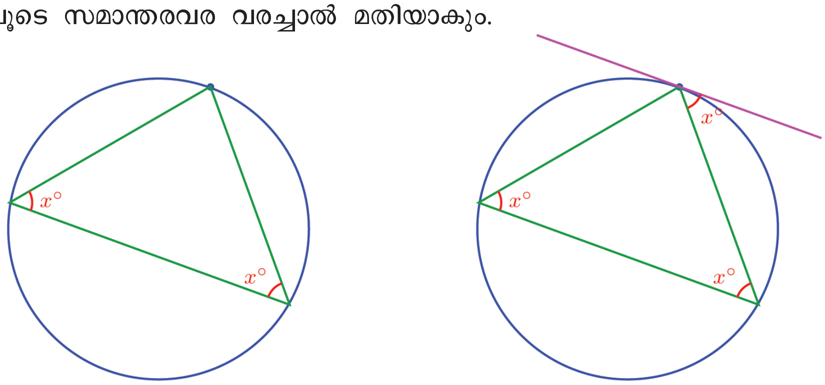
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാൺ അതിന്റെ അറ്റത്തുള്ള തൊടുവരയുമായി ഒരു വശത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിനു തുല്യമാണ്.

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നത്, ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന് ലംബം വരച്ചാണല്ലോ. കേന്ദ്രം അറിയില്ലെങ്കിലും തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, മേലെഴുതിയ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ബിന്ദുവിലൂടെ ഒരു ഞാൺ വരച്ച്, അത് വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗത്തുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ മറുഭാഗത്ത് ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.



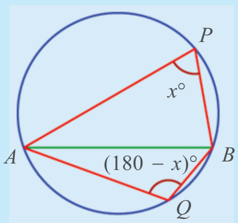
ഇതിലെ ത്രികോണം സമപാർശ്വമായി വരച്ചാൽ, താഴത്തെ വശത്തിന് ബിന്ദുവിലൂടെ സമാന്തരവര വരച്ചാൽ മതിയാകും.



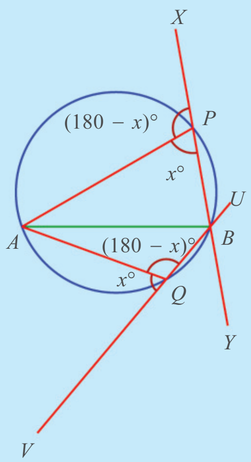
അപ്പോൾ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തചാപം വരച്ച്, അത് ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക.

മറിയുന്ന കോണുകൾ

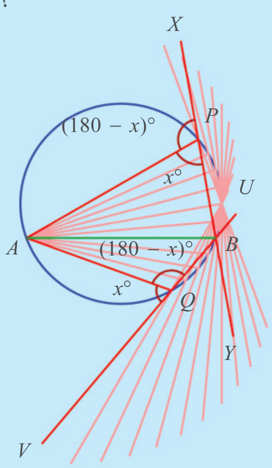
വൃത്തത്തിലെ ഇരുഭാഗങ്ങളിലുള്ള കോണുകൾ അനുപൂരകമാണല്ലോ:



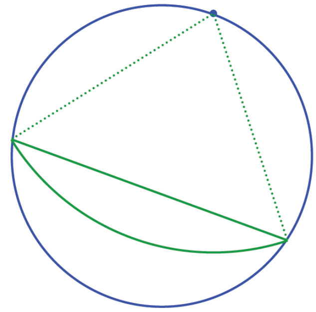
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വരകൾ നീട്ടിവരയ്ക്കാം,



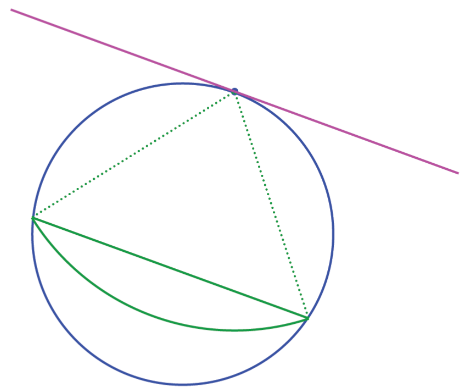
P വൃത്തത്തിലൂടെ Q വിലേക്കു നീങ്ങിയാലോ?

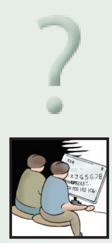


AP യുടെ താഴെ $x°$ യും, മുകളിൽ $(180 - x)°$ ഉം ആണ്. ചലനത്തിലുടനീളം അങ്ങനെതന്നെയല്ലേ?

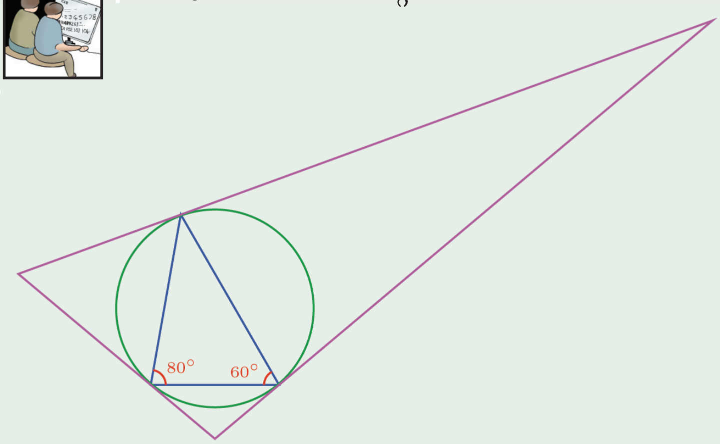


ഇനി തൊടുവര വരയ്ക്കേണ്ട ബിന്ദുവിലൂടെ, ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര വരച്ചാൽ മതി.





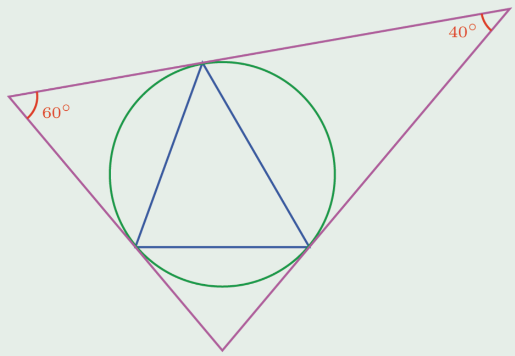
(1) ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

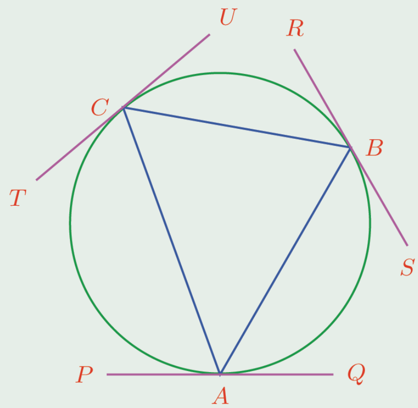
(2) ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



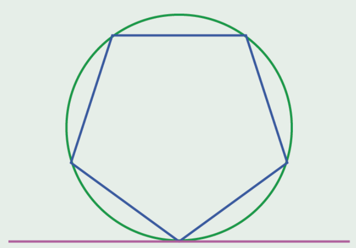
(3) ചിത്രത്തിൽ, ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ പരിവൃത്തത്തിനു വരച്ച തൊടുവരകളാണ് PQ, RS, TU എന്നീ വരകൾ

ചിത്രത്തിലെ തുല്യമായ കോണുകൾ തരംതിരിച്ച് എഴുതുക.



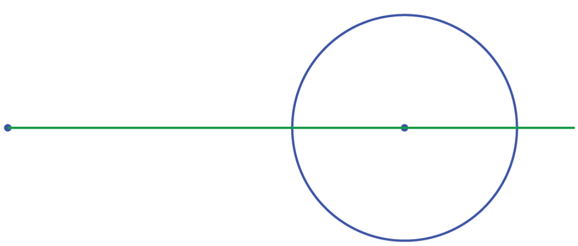
(4) ചിത്രത്തിൽ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽക്കൂടി അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.



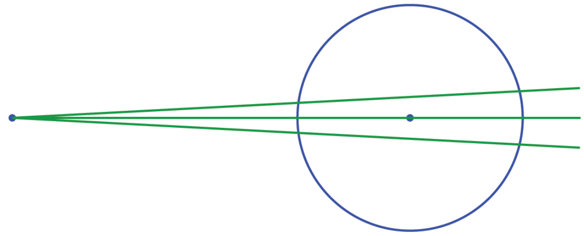
പുറത്തുനിന്നും തൊടുവര

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.

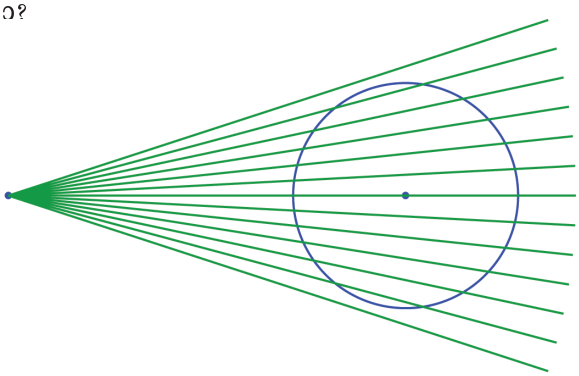


വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ച് നീട്ടി വരച്ചിരിക്കുന്നു. അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ, ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളുമാണ്.

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഈ ബിന്ദുതന്നെ, വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ കേന്ദ്രത്തിനൽപം മുകളിലോ താഴെയോ ആയ ഒരോ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാലോ?

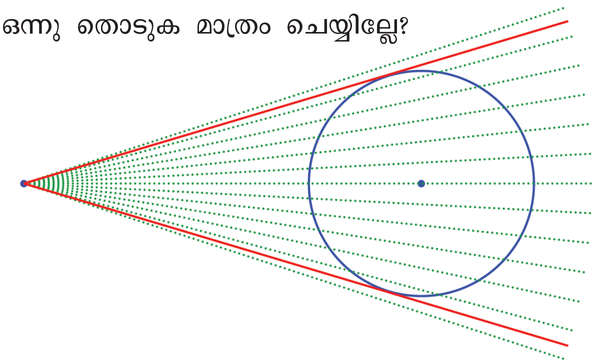


വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അൽപംകൂടി അടുത്തു. ഇങ്ങനെ തുടർന്നാലോ?



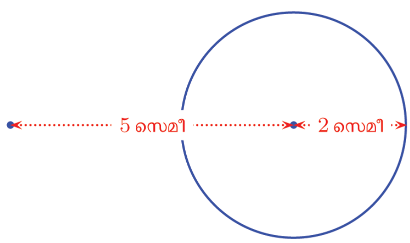
അടുത്തടുത്തുവരുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകൾക്ക്, ഒരു ഘട്ടം കഴിയുമ്പോൾ വൃത്തവുമായി ഒരു ബന്ധവുമില്ലാതാകുന്നു.

പക്ഷെ അതിനിടയിലെവിടെയോ, മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു വരകൾ വൃത്തത്തെ ഒന്നു തൊടുക മാത്രം ചെയ്യില്ലേ?



ഒരു വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം.

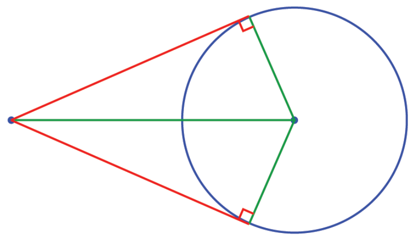
വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞതല്ലാതെ ഇങ്ങനെ ഒരു ജോടി തൊടുവരകൾ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്നു പറഞ്ഞില്ലല്ലോ. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

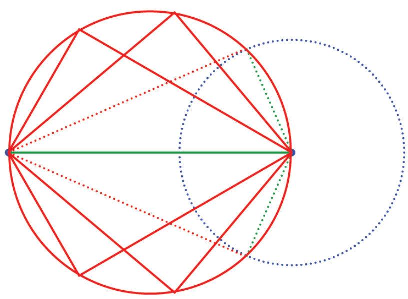
ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വൃത്തത്തിന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വരച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ എങ്ങനെയായിരിക്കുമെന്ന് ആലോചിച്ചാൽ, വരയ്ക്കാനുള്ള വഴി ഒരു പക്ഷെ തെളിഞ്ഞു വരും.



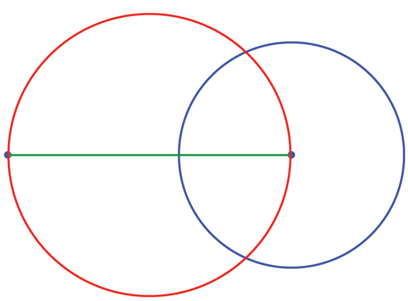
പുറത്തുനിന്നുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നും, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ജോടി വരകളാണ് വേണ്ടത്.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന ലംബജോടികളെല്ലാം കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് പുറത്തെ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലാണെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.



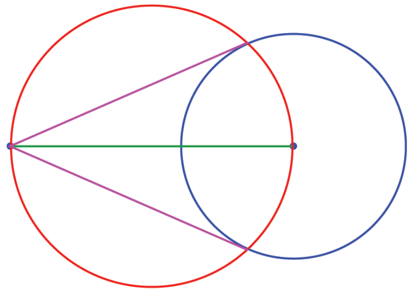
നമുക്കു വേണ്ട ലംബജോടിയിൽ, ഒരു വര ആദ്യവൃത്തത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാകണം. അതായത്, വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത് ആദ്യ വൃത്തത്തിലാകണം. അതിന് പഴയ വൃത്തവും പുതിയ വൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ വരച്ചാൽപ്പോരെ?

ഇനി വരയ്ക്കാമല്ലോ: ആദ്യം, പുറത്തെ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

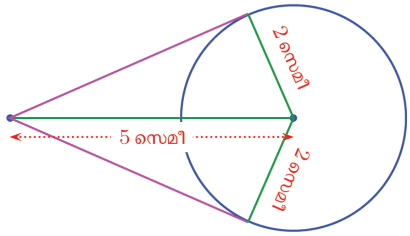


O എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച് അതിൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചതുർഭുജം OACB വരച്ച് നോക്കൂ. ഇത് ചക്രീയമാണോ? Circle through Three Points ഉപയോഗിച്ച് O, A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന വൃത്തം വരച്ച് നോക്കാം. A, B ഇവയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ഇവ അടുത്തടുത്ത് വരുമ്പോൾ C യ്ക്ക് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? അകന്ന് പോകുമ്പോഴോ? ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കളാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

ഈ വൃത്തവും ആദ്യവൃത്തവും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ, പുറത്തെ ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു വേണ്ട തൊടുവരകളായി.



നമ്മുടെ കണക്കിൽ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 2 സെന്റിമീറ്ററും, പുറത്തെ ബിന്ദു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുമാണല്ലോ.



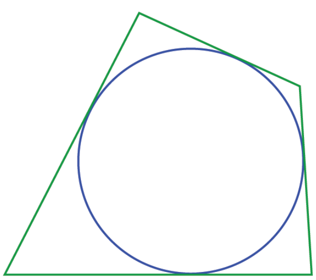
അപ്പോൾ, പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കാം.

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ സെ.മീ.}$$

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ തൊടുവരകൾ വരച്ചാൽ, തൊടുന്ന ബിന്ദു മുതൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവരെയുള്ള തൊടുവരയുടെ നീളം തുല്യമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടതാണ്. അതിനി ഇങ്ങനെയും പറയാം.

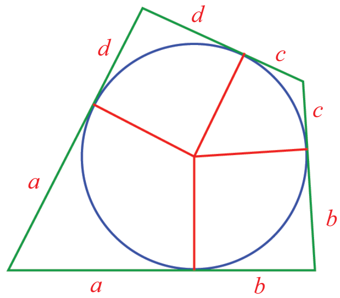
ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ചൊരു കണക്കു നോക്കാം. ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ വശങ്ങളായി ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വൃത്തകേന്ദ്രവും, ഈ ബിന്ദുക്കളും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

മൂലകളിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം *a, b, c, d* എന്നെടുത്താൽ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഈ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



അപ്പോൾ ചതുർഭുജത്തിന്റെ താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ തുക $(a + b) + (c + d)$. ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ തുകയോ?

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ നാല് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ നാല് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും വൃത്തത്തിന് തൊടുവരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇനി തൊടുവരകൾ മറച്ചുവയ്ക്കാം. ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നിരീക്ഷിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

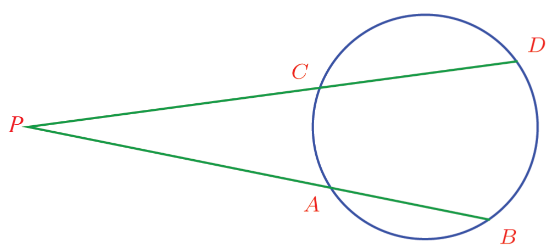
$(a + d) + (b + c)$ രണ്ടു തുകയും $a + b + c + d$ തന്നെ; അതായത്,

ഒരു വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ നാല് വശങ്ങളും തൊടുവരകളാകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ പറ്റുമോ?

വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടത് ഓർക്കുക.

ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന വരകളിൽ, വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം തൊടുന്ന വരകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടു. വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരകളിലെല്ലാം, മുഴുവൻ വരയുടെയും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഭാഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം തുല്യമാണെന്ന് **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടുവല്ലോ. ഈ ചിത്രവും അതിന്റെ സമവാക്യവും ഓർമയില്ലേ?

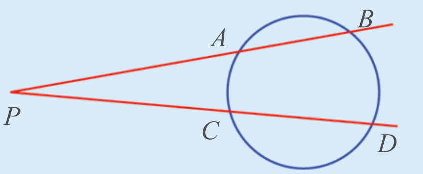


$$PA \times PB = PC \times PD$$

ഇനി ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന ഒരു വരയും മുറിക്കുന്ന ഒരു വരയും വരച്ചാലോ?

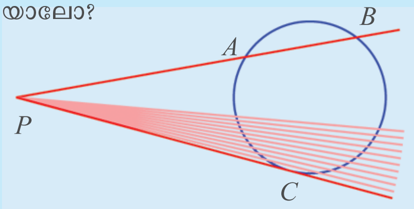
മാറാത്ത ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിൽ $PA \times PB = PC \times PD$ എന്നറിയാമല്ലോ.

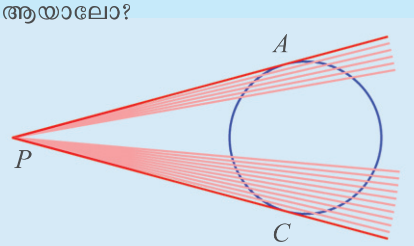
താഴത്തെ വര, കറങ്ങി തൊടുവരയായാലോ?



PD എന്നത് PC തന്നെയാകും; നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം

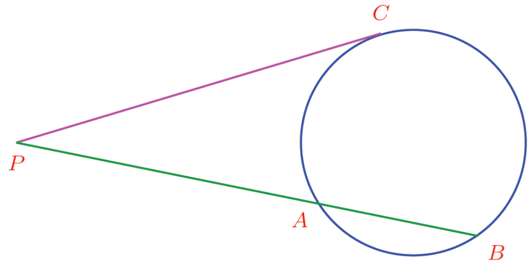
$PA \times PB = PC^2$ എന്നാകും.

മുകളിലത്തെ വരയും തൊടുവര ആയാലോ?

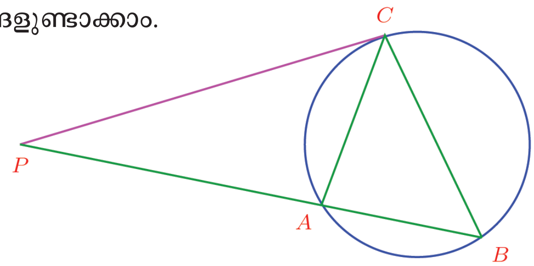


ഈ ബന്ധം $PA^2 = PC^2$ അഥവാ $PA = PC$ എന്നാകും.

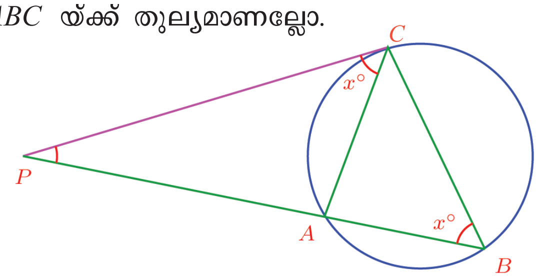
ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.



ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമറിയാൻ, AC, BC യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം.



AC എന്ന ഞാൺ, PC എന്ന തൊടുവരയുമായി C യിൽ $\angle PCA$ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ മറുഭാഗത്ത് AC ഉണ്ടാക്കുന്ന $\angle ABC$ യ്ക്ക് തുല്യമാണല്ലോ.



അതായത്, PAC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ C യിലെ കോൺ, ത്രികോണം PBC യിൽ B യിലെ കോണിന് തുല്യമാണ്. P യിൽ രണ്ടു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണാണ്.

അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്. അതിനാൽ ഒരേ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.

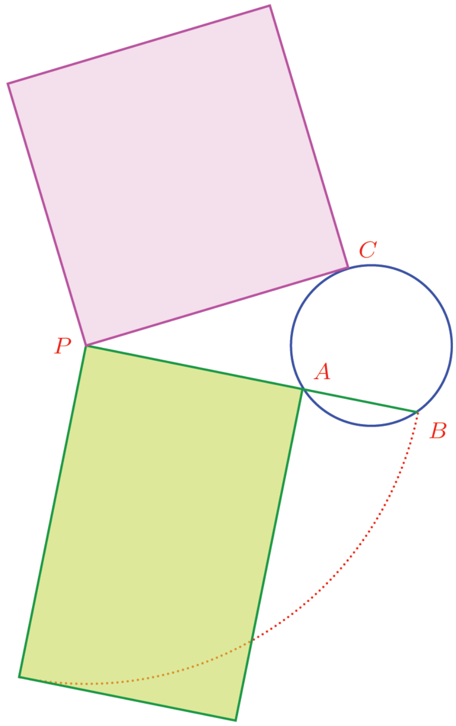
PAC യിൽ x° കോണിന്റെ എതിർവശം PA യും, PBC യിൽ x° കോണിന്റെ എതിർവശം PC യും ആണ്. PAC യിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം PC യും PBC യിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം PB യും.

അപ്പോൾ

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$$

ഇത് അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

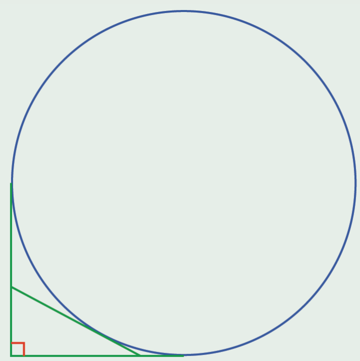
$$PA \times PB = PC^2$$



മുറിക്കുന്ന വരയുടെയും വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഭാഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം, തൊടുവരയുടെ വർഗത്തിനു തുല്യമാണ്.

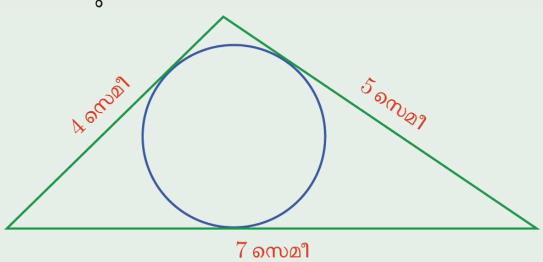
പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ഞാണുകളിലെന്നപോലെ, ഇതും പരപ്പളവുകളായി പറയാം. മുറിക്കുന്ന വരയും വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഭാഗവും വശങ്ങളായ ചതുരത്തിനും, തൊടുവര വശമായ സമചതുരത്തിനും ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

(1) ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു തൊടുവരകളും, മറ്റൊരു തൊടുവരയും ചേർന്ന് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കിയ ചിത്രം നോക്കൂ.



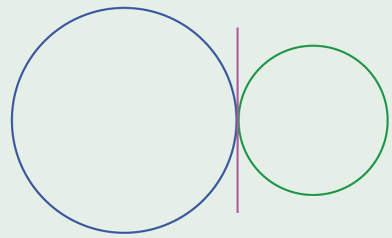
ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു തൊടുവരകൾ ചേർന്ന ത്രികോണമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്.

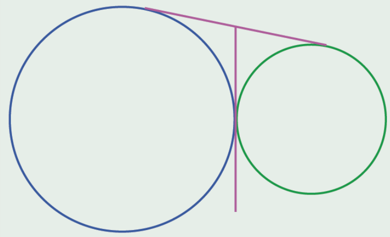


ഒരോ മൂലയിൽ നിന്നും തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

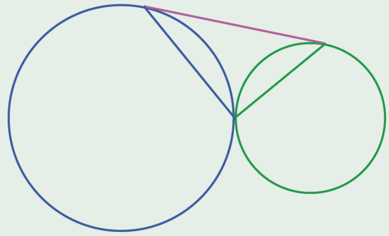
(3) ചിത്രത്തിൽ, ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്ക് ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള പൊതുവായ തൊടുവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.



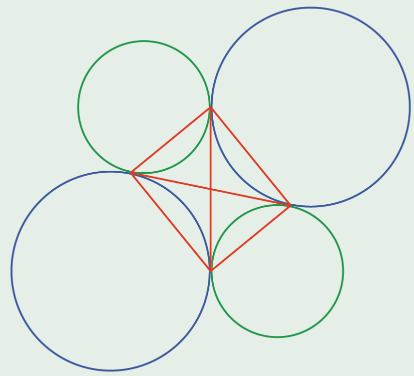
i) ഈ വൃത്തങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ മറ്റൊരു തൊടുവരയെ, ആദ്യത്തെ തൊടുവര സമഭാഗംചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.



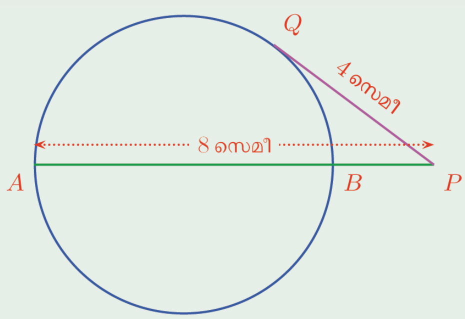
ii) ഈ രണ്ടു തൊടുവരകളും വൃത്തങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന ത്രികോണം മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



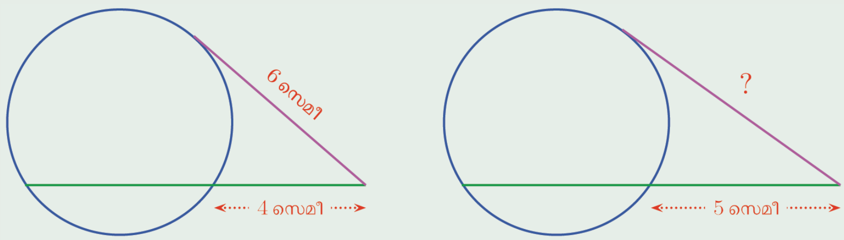
iii) വലതു വശത്തെ ചിത്രം സൗകര്യമായ അളവുകളെടുത്ത്, നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക. വൃത്തങ്ങൾ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?



(4) ചിത്രത്തിൽ AB വ്യാസവും, P അതു നീട്ടിയതിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണ്. P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവര വൃത്തത്തെ Q വിൽ തൊടുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



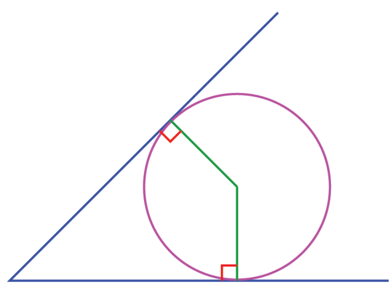
(5) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിൽ, ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വര 4 സെന്റിമീറ്റർ പുറത്തേക്കു നീട്ടി, അവിടെനിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഇതേ വരതന്നെ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടി വലത്തോട്ടു നീട്ടിയ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ. ഈ തൊടുവരയുടെ നീളമെന്താണ്?

(6) 5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന് തുല്യമായതും ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററായതുമായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക.

വരയെ തൊടുന്ന വട്ടം

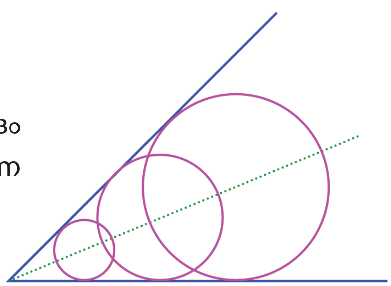


ഒരു വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രണ്ടു വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു വരയ്ക്കാമെന്നും, എങ്ങനെ വരയ്ക്കണമെന്നും കണ്ടു.

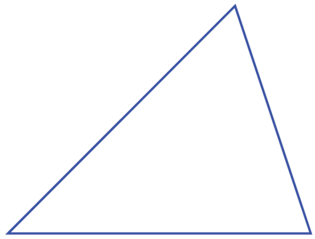
അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം. ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ? ചിത്രം നോക്കൂ. വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ഈ വരകൾക്കു ലംബമാണ്. അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ടു വരകളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം. അപ്പോൾ അത് ഈ കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാകണമല്ലോ.

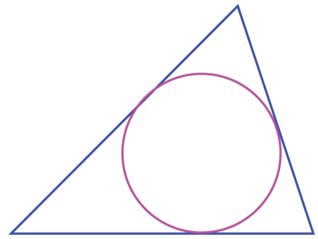
കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ടു വരകളെ തൊടുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, വരകൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാണ്.

കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ എവിടെ കേന്ദ്രം എടുത്താലും, രണ്ടു വരകളേയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.



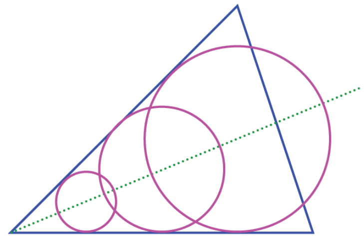
അപ്പോൾ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ എന്നതാണ് അടുത്ത ചോദ്യം.



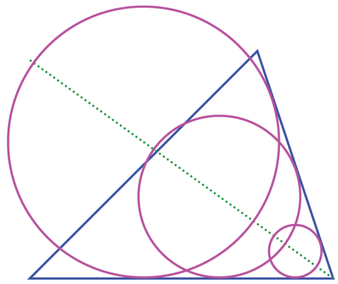


ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു കോണും അതിന്റെ സമഭാജിയും വരയ്ക്കുക. സമഭാജിയിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് കോണിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച്, ലംബവും വശവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. സമഭാജിയിലെ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, വശത്തിലെ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം, കോണിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തേയും തൊടുന്നില്ലേ? വൃത്തകേന്ദ്രം സമഭാജിയിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ.

താഴത്തേയും ഇടത്തേയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

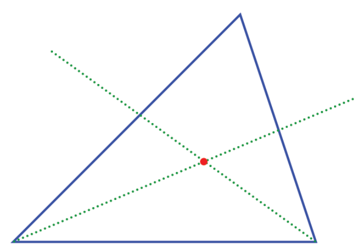


താഴത്തേയും വലത്തേയും വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങളും വരയ്ക്കാം.



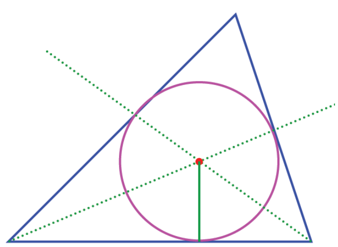
അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു സമഭാജികളിലുമുള്ള ബിന്ദു എടുത്താലോ? അതായത്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു?

ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലേ? ഈ നീളം ആരമായി, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരച്ചാലോ?



ഈ വൃത്തത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം (incircle) എന്നാണു പേര്.

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമായതിനാൽ, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റെയും സമഭാജിയിലാണ്.

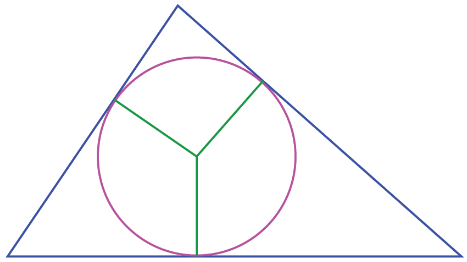


ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

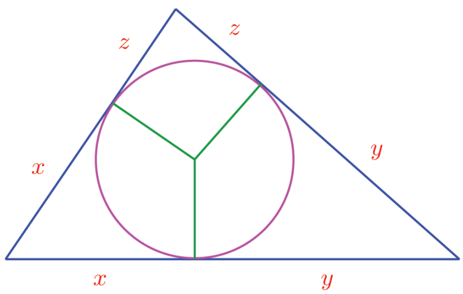
ഏതു ത്രികോണത്തിലും, കോണുകളുടെ സമഭാജികളെല്ലാം ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.

അന്തർവൃത്തം ത്രികോണത്തെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളും അതിന്റെ വശങ്ങളും തമ്മിൽ ചില ബന്ധങ്ങളുണ്ട്.

അതുകാണാൻ, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തകേന്ദ്രമായി യോജിപ്പിച്ചു നോക്കാം.



ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും അന്തർവൃത്തത്തിലേക്കുള്ള തൊടുവരകൾ ചേർന്നതാണല്ലോ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും, തൊടുന്ന ബിന്ദു വരെയുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യവുമാണ്. അപ്പോൾ തൊടുവരകളുടെ നീളം x, y, z എന്നെടുത്ത്, ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ അടയാളപ്പെടുത്താം.

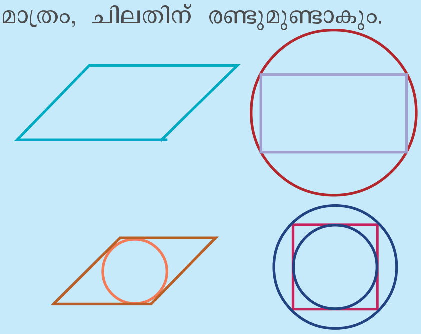


ഈ നീളങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവാകും. അതായത് $2(x+y+z)$ ആണ് ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, തിരിച്ചുപറഞ്ഞാൽ, $x+y+z$ എന്നത്, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണ്. ഇതിനെ s എന്നെഴുതിയാൽ

$$x + y + z = s$$

പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും

ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കാം. എന്നാൽ ചതുർഭുജങ്ങളെടുത്താൽ, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകില്ല, ചിലതിന് ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മാത്രം, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകും.



ഇനി ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b, c എന്നെടുത്താൽ, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$x + y = a$$

$$y + z = b$$

$$z + x = c$$

എന്നെല്ലാം കാണാം.

ഇനി x കിട്ടാൻ $x + y + z$ ൽ നിന്ന് $y + z$ കുറച്ചാൽ മതി. അതായത്.

$$x = (x + y + z) - (y + z) = s - b$$

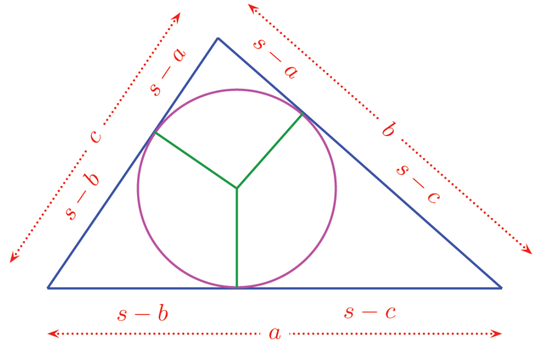
ഇതുപോലെ

$$y = (x + y + z) - (z + x) = s - c$$

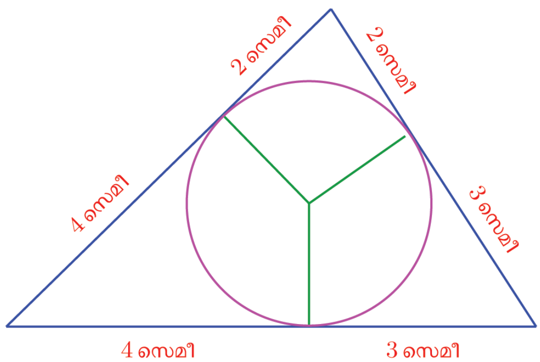
എന്നും

$$z = (x + y + z) - (x + y) = s - a$$

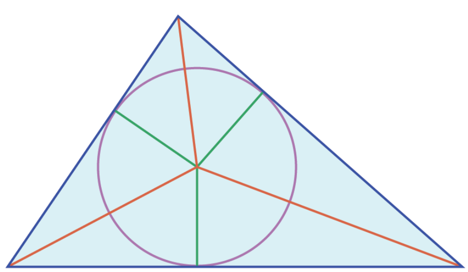
എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ തൊടുവരകളുടെ നീളം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.



ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ, 7 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി 9 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ അന്തർവൃത്തം തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ വശങ്ങളെ ഭാഗിക്കുന്നത് $9 - 5 = 4$, $9 - 6 = 3$, $9 - 7 = 2$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.



അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധമുണ്ട്. അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലേക്കുള്ള വരകൾ, ത്രികോണത്തെ മൂന്നായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ.



ഈ ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒരു വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശംതന്നെയാണ്; അതിലേക്കുള്ള ഉന്നതി അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $a, b. c$ എന്നും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നുമെടുത്താൽ, ചെറു ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, എന്നിങ്ങനെയാകും. ഇവയുടെ തുക, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്; അത് A, എന്നെടുത്താൽ

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)\,r = sr$$

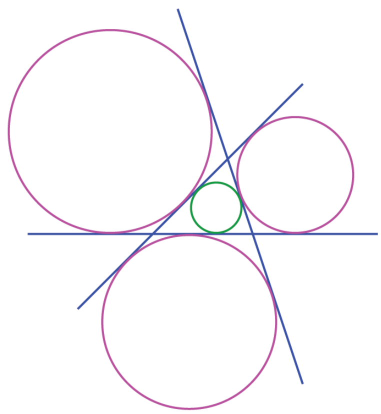
ഈ സമവാക്യം

$$r = \frac{A}{s}$$

എന്നെഴുതാം.

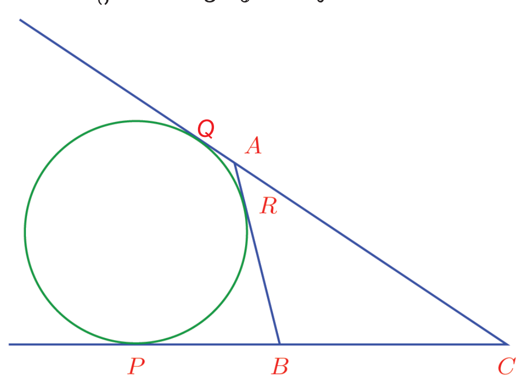
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതികൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനു തുല്യമാണ്.

ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊട്ടുകൊണ്ട്, ത്രികോണത്തിനകത്തു വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തമാണ് അന്തർവൃത്തം മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊടുക എന്നതു മാത്രമാണ് ആവശ്യമെങ്കിൽ, ഏതു ത്രികോണത്തിനും അത്തരം മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ കൂടിയുണ്ട്.



ത്രികോണത്തിന്റെ ബാഹ്യവൃത്തങ്ങൾ (excircles) എന്നാണ് ഇവയെ പറയുന്നത്. ത്രികോണത്തിന്റെ പുറംകോണുകളുടെ സമഭാജികൾകൂടി എടുത്താണ് ഇവ വരയ്ക്കുന്നത്.

ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ ബാഹ്യവൃത്തവും പരിശോധിക്കാം.



വൃത്തം, ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q, R

CP, CQ, എന്നീ തൊടുവരകളുടെ നീളം നോക്കാം. ത്രികോണത്തിലെ BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c എന്നെടുത്താൽ

$$CP = CB + BP = a + BP \qquad CQ = CA + AQ = b + AQ$$

ഇനി B യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളായതിനാൽ, $BP = BR$ എന്നും, A യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളായതിനാൽ, $AQ = AR$ എന്നും കാണമല്ലോ; അതിനാൽ

$$CP = a + BR \qquad CQ = b + AR$$

$AR + RB = AB$ എന്നും കാണാം. ഇതും, മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$CP + CQ = a + b + BR + AR = a + b + c$$

എന്നു കാണാം.

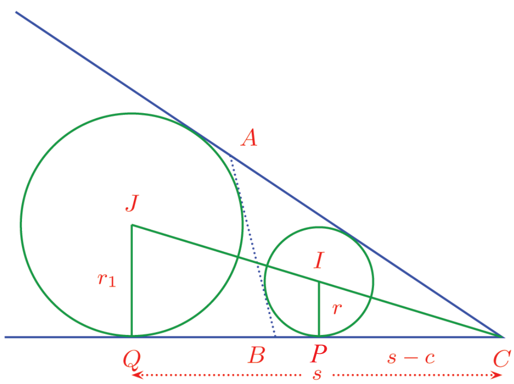
ഇതു ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവല്ലേ? മാത്രവുമല്ല, CP, CQ ഇവയ്ക്ക് ഒരേ നീളവുമാണ്. അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

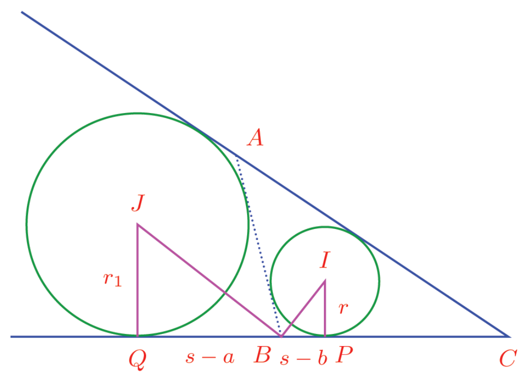
$$CP = CQ = s$$

അതായത്

> ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്ന് അതിനെതിരെയുള്ള ബാഹ്യവൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളുടെ നീളം, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തവും കൂടി വരച്ചുനോക്കാം. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, ബാഹ്യവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r_1 എന്നുമെടുക്കാം.





ഇടത്തെ ചിത്രത്തിലെ CIP, CJQ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ തുല്യകോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം തുല്യമാണ്

(1) $$\frac{r}{r_1} = \frac{s - c}{s}$$

ഇനി വലത്തെ ചിത്രം നോക്കൂ: *BIP, BJQ* എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ *B* യിലെ കോണുകൾ നോക്കുക. *BI, BJ* ഇവ, *ABC* എന്ന ത്രികോണത്തിൽ *B* യിലെ അകക്കോണിന്റെയും പുറംകോണിന്റെയും സമഭാജികളായതിനാൽ,

$$\angle QBJ = \frac{1}{2}\angle QBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBA) = 90^\circ - \angle PBI$$

അപ്പോൾ *PBI, QBJ* എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ,

$$\frac{r}{s-a} = \frac{s-b}{r_1}$$

എതിർഗുണനമുപയോഗിച്ച്, ഇതിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം.

(2) $$rr_1 = (s-a)(s-b)$$

(1), (2) എന്നീ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{r_1} \times rr_1 = \frac{s-c}{s} \times (s-a)(s-b)$$

അതായത്,

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, *rs* എന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ പരപ്പളവ്

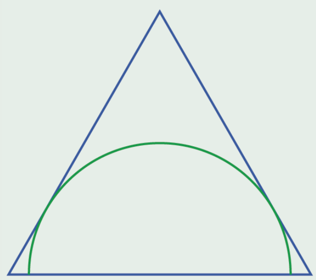
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഈ മാർഗം, ഹെറോണിന്റെ സൂത്രവാക്യം (Heron's Formula) എന്നാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കുക. അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

(2) വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 50° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ഒരു അർധവൃത്തം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയ്ക്കുക.



(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം, അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം h ഉം, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r ഉം ആണെങ്കിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $r(h+r)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) 13 സെന്റിമീറ്റർ, 14 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

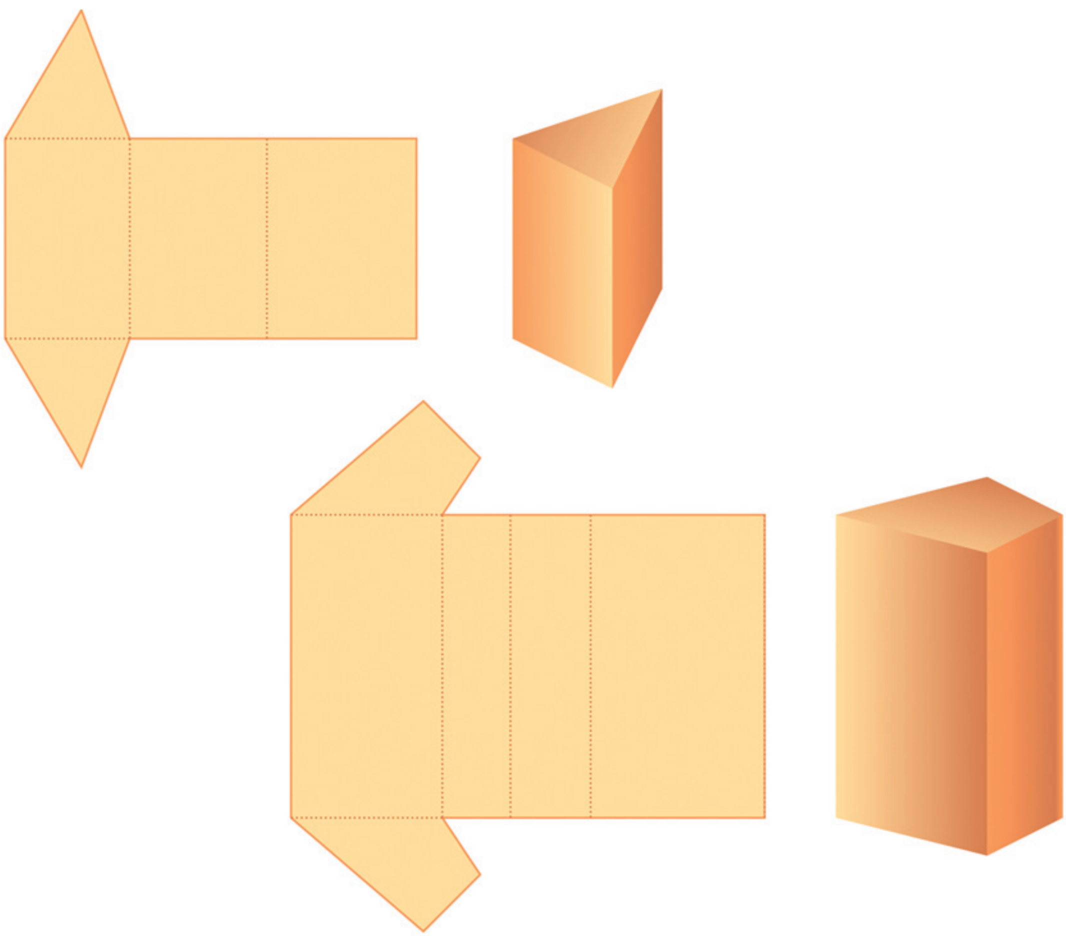
തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടുത്തടുത്ത് വരുമ്പോൾ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്ക് ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം മനസിലാക്കുന്നതിലൂടെ, തൊടുവര എന്ന ആശയത്തിലെത്തുന്നു.			
• വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയും ആരവും പരസ്പരം ലംബമാണെന്നറിയുന്നു.			
• വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുകൂടിയും വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകൾ ചേരുന്ന കോൺ, ഞാണുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ, ഞാൺ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാമെന്നറിയുന്നു; അവ വരയ്ക്കുന്നു.			
• ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളെയും തൊട്ടുകൊണ്ട് അതിനകത്ത് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്നു.			

8 ഘനരൂപങ്ങൾ

സ്തൂപികകൾ

പല രീതിയിൽ കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത്, മടക്കി ഒട്ടിച്ച്, സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം:



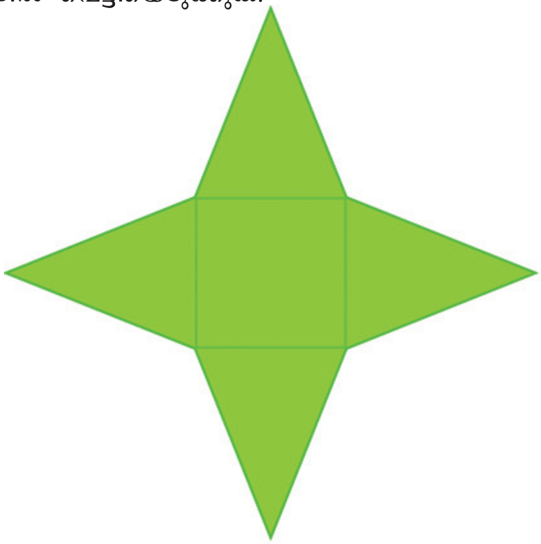
ഇത്തരം സ്തംഭങ്ങളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിക്കുകയും ചെയ്തു.

ഇനി വേറൊരു രൂപമുണ്ടാക്കി നോക്കാം.

സ്തൂപികകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ

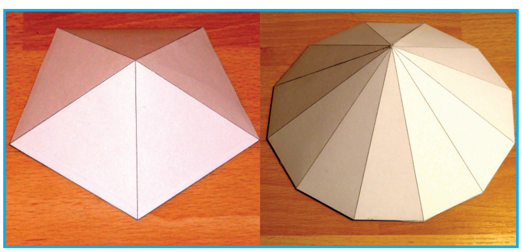
ജിയോജിബ്രയിൽ സ്തംഭങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് 9-ാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇത്തരത്തിൽ സ്തൂപികകൾ നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. 3D Graphics തുറന്ന് ആവശ്യമായ പ്രാരംഭ ക്രമീകരണങ്ങൾ നടത്തുക. (9-ാം ക്ലാസിലെ **സ്തംഭങ്ങൾ** എന്ന അധ്യായത്തിലെ **ഘനരൂപങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ** എന്ന ഭാഗം കാണുക) Graphics ൽ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക. 3D Graphics ൽ Extrude to Pyramid or Cone ഉപയോഗിച്ച് ചതുരത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം നൽകുക. (ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി ഉയരമായി സ്ലൈഡറിന്റെ പേര് നൽകുകയുമാവാം)

ആദ്യം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക:



നടുക്കു സമചതുരം. ചുറ്റും നാലു ത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ നാലും ഒരേപോലെയുള്ള (തുല്യമായ) സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളായിരിക്കണം. ഇനി ഇത് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മടക്കി ഒട്ടിക്കുക:

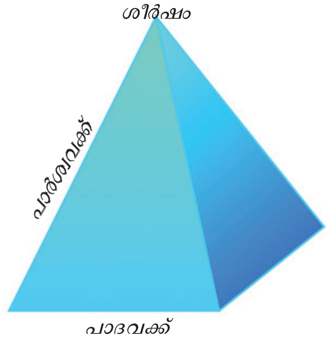
എന്തു രൂപമാണിത്? സ്തംഭമെന്നു വിളിക്കാൻ വയ്യ; സ്തംഭങ്ങൾക്ക് ഒരേപോലെയുള്ള രണ്ടു പാദങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമാണ്. ഇപ്പോഴുണ്ടാക്കിയ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ചുവടെ സമചതുരം, മുകളിലൊരു മുന, ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ.



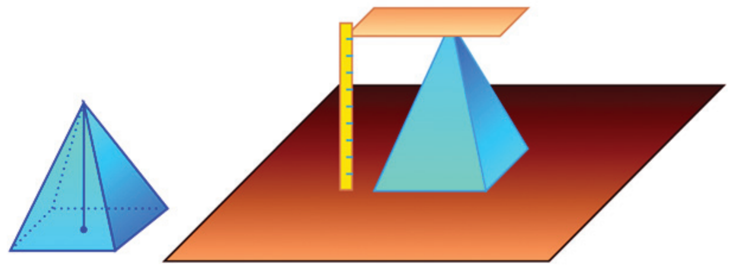
സമചതുരത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ചതുരമാവാം; അതുമല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമോ, മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ ആവാം. പരീക്ഷിച്ചുനോക്കൂ. (പാദം സമബഹുഭുജമാകുമ്പോഴാണ് ഭംഗി)

ഇത്തരം രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ പേരാണ് സ്തൂപികകൾ (pyramids).

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ, സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കുകൾ (base edges) എന്നും, ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു വശങ്ങളെ പാർശ്വവക്കുകൾ (lateral edges) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്. സ്തൂപികയുടെ മുകളറ്റത്തെ അതിന്റെ ശീർഷം (apex) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



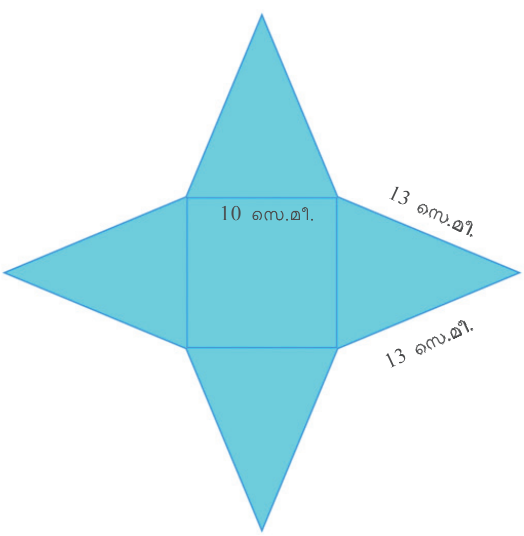
ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമെന്നത്, അതിന്റെ പാദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്നാൽ, ശീർഷത്തിൽനിന്ന് പാദത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ്.



പരപ്പളവ്

പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഉപരിതലപരപ്പളവെന്നാൽ, ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ. ഈ സ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വച്ചാൽ എങ്ങനെയിരിക്കും?



ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ 3D Graphics ൽ ഒരു സ്തൂപിക നിർമിക്കുക. Net ഉപയോഗിച്ച് ഈ സ്തൂപികയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ സ്തൂപിക പൊളിച്ച് നിവർത്തിയ രൂപം ലഭിക്കും. (ഇതിനെ സ്തൂപികയുടെ net എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്) ഇതോടൊപ്പം Graphics ൽ ഒരു സ്ലൈഡറും ലഭിക്കും. ഈ സ്ലൈഡറുപയോഗിച്ച് net ൽ നിന്ന് സ്തൂപിക രൂപപ്പെടുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് കാണാം. Algebra യിൽ Pyramid എന്നതിലെ സ്തൂപികയുടെ പേരിനു നേരെ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് സ്തൂപിക മറച്ചു വയ്ക്കുകയുമാവാം.

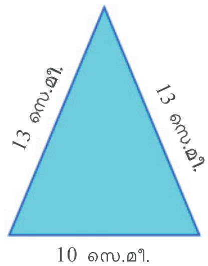
ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് പെട്ടെന്നു പറയാം; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 10, 13, 13 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഹെറോണിന്റെ സഹായമുണ്ടല്ലോ. ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയിൽ നിന്ന് വശങ്ങളോരോന്നും കുറച്ച്,

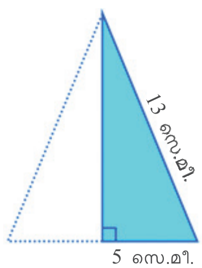
$$\sqrt{18\times8\times5\times5}=\sqrt{9\times16\times5\times5}=60$$

അതായത്, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, 60 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്,

$$100 + (4 \times 60) = 340 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.}$$



ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയായും കണ്ടുപിടിക്കാം.



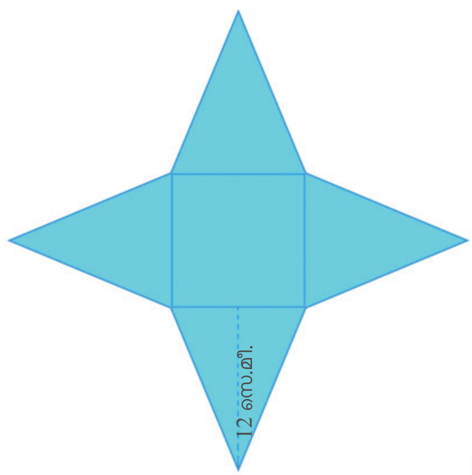
അതിന് ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം കൂടി വേണം. സമപാർശ്വ ത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും.

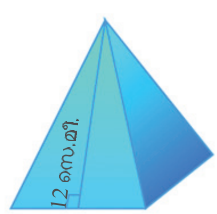
പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{13^2-5^2} = 12 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $5 \times 12 = 60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

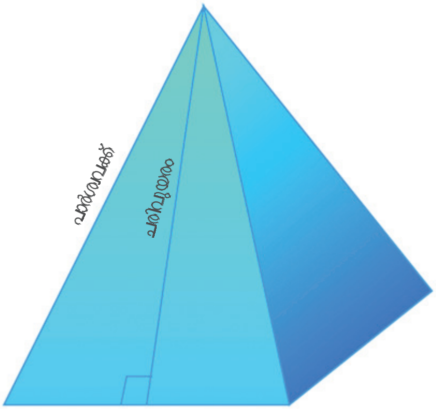
കടലാസ് സ്തൂപികയായിക്കഴിയുമ്പോൾ, ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിച്ച ഉയരം എന്താകും?





ഉയരവും ചരിവുയരവും

ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക വരയ്ക്കുക. Midpoint or Centre ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഒരു പാദവക്കിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും പാദത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടെ ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവ അടയാളപ്പെടുത്താം. Polygon ഉപയോഗിച്ച്, ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക്, പാദവക്കിന്റെ പകുതി, തുടങ്ങിയവ വശങ്ങളായി വരുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് നോക്കൂ. Net ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപിക പൊളിച്ചു നിവർത്തി നോക്കാം. സ്തൂപിക മറച്ച് വയ്ക്കുകയും ചെയ്യാം.



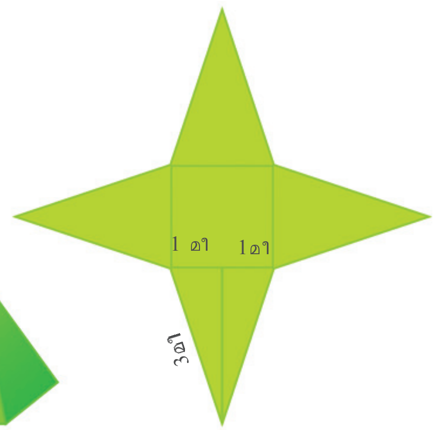
പാദവക്കിന്റെ പകുതി

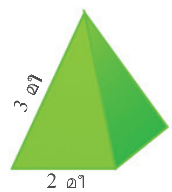
ഈ നീളത്തെ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, അല്ലെങ്കിൽ, പാർശ്വോന്നതി (slant height) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കും, പാർശ്വവക്കും, ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം കണ്ടല്ലോ; ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഓരോ വശത്തുമുണ്ട്. ലംബവശങ്ങൾ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ പകുതിയും; കർണം പാർശ്വവക്കും.

ഇനി ഈ കണക്ക് ചെയ്തുകൂടേ?

പാദവക്കുകൾ 2 മീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 3 മീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവെത്രയാണ്?





പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ. പാർശ്വവശങ്ങളുടെ പരപ്പളവു കാണാൻ ചരിവുയരം വേണം. നേരത്തെ പറഞ്ഞ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു വശം, പാദവക്കിന്റെ പകുതി 1 മീറ്ററും; കർണം, പാർശ്വവക്ക് ആയ 3 മീറ്ററും; അതിനാൽ ചരിവുയരം

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപയോഗിച്ച് ഓരോ ത്രികോണവശത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്,

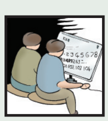
$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്,

$4 + \left(4 \times 2\sqrt{2}\right) = 4 + 8\sqrt{2}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതുകൊണ്ടു തൃപ്തിയായില്ലെങ്കിൽ, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ നോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യ ഓർത്തെടുത്ത്), ഇത് ഏകദേശം 15.31 ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

?



(1) വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം; ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും അതിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ ചേർത്തു വച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന് എത്ര ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം?

(2) സമചതുരസ്തൂപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദവക്ക് 16 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 500 കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(3) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(4) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്ററും, വക്കുകളുടെ ആകെ നീളം 92 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(5) പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, പാദപ്പരപ്പളവിന് തുല്യമായ സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

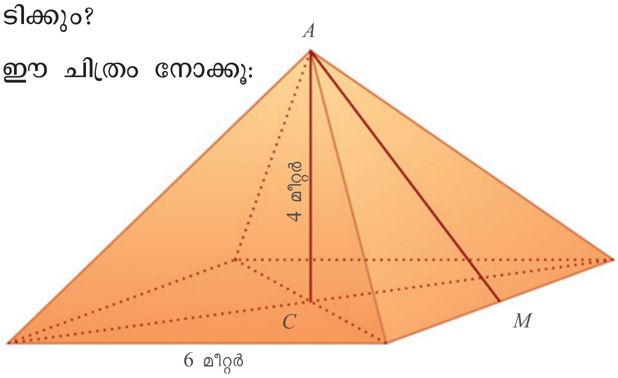
ഉയരവും ചരിവുയരവും

സ്തൂപികകളുടെ അളവുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉയരം പ്രധാനമാണ്. ഈ കണക്കുനോക്കൂ.

> സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 6 മീറ്റർ വേണം; കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും. ഇതിന് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ ക്യാൻവാസ് വേണം?

കൂടാരത്തിന്റെ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ചരിവുയരം വേണ്ടേ? തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ വച്ച്, അതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

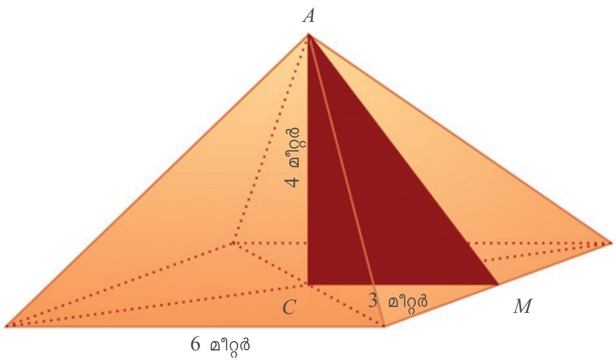
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



നമുക്കുവേണ്ട ചരിവുയരം AM ആണ്. CM യോജിപ്പിച്ചാൽ, AM കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? അതിൽ CM ന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകൾ

പിരമിഡ് എന്നു പറയുമ്പോൾത്തന്നെ മനസിലെത്തുന്ന ചിത്രം, ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകളാണ്. ഈജിപ്റ്റിലെ പലഭാഗങ്ങളിലായി 138 പിരമിഡുകളാണ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്. ബി.സി. രണ്ടായിരത്തോടടുപ്പിച്ചാണ് ഇവയിൽ പലതും നിർമിച്ചത്.



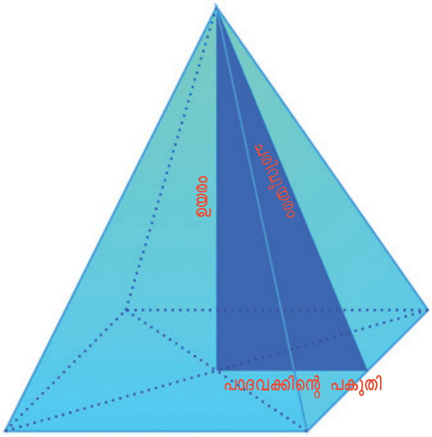
ചിത്രത്തിൽനിന്ന് $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും, അതിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 5 മീറ്ററുമായ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് വേണ്ടത്.

ഇവയുടെ മൊത്തം പരപ്പളവ്, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ.

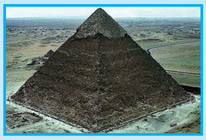
കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ ഇത്രയും ക്യാൻവാസ് വേണം.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം എല്ലാ സമചതുരസ്തൂപികയിലും ശരിയാണല്ലോ. ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിലും, ചരിവുയരം കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം സങ്കൽപ്പിക്കാം; അതിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ, സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയും.



മഹാസ്തൂപിക

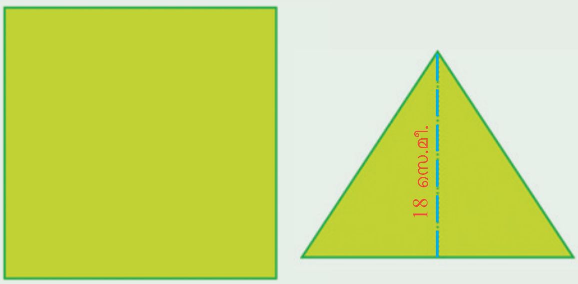
ഈജിപ്റ്റിലെ, ഗിസയിലെ മഹാസ്തൂപികയാണ് (Great Pyramid of Giza) ഏറ്റവും വലിയ പിരമിഡ്.



ഇതിന്റെ പാദമായ സമചതുരത്തിന് ഏതാണ്ട് അര ലക്ഷത്തോളം ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പുണ്ട്; ഉയരം ഏതാണ്ട് 140 മീറ്ററും. ഇതു നിർമിക്കാൻ ഇരുപതു കൊല്ലത്തോളം വേണ്ടിവന്നിട്ടുണ്ടാകും എന്നാണ് കണക്കുകൂട്ടിയിരിക്കുന്നത്.

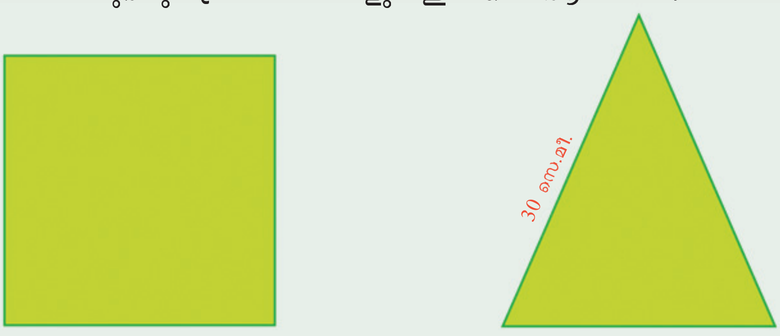
കൃത്യമായ സമചതുരത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഭീമാകാരമായ കല്ലുകൾ മേൽപ്പോട്ട് പടുത്തുയർത്തി, ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഈ രാജകീയ ശവക്കല്ലറകൾ, മനുഷ്യാധ്വാനത്തിന്റേയും, നിർമാണ വൈദഗ്ധ്യത്തിന്റേയും, ഗണിതവിജ്ഞാനത്തിന്റേയും ജീവിക്കുന്ന പ്രതീകങ്ങളായി ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു.

(1) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു സമചതുരവും, നാലു ത്രികോണങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി.



സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്രയാണ്?

സമചതുരവും ത്രികോണങ്ങളും ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

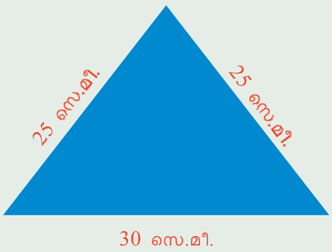


KT-109/7/Maths-10(M)

(2) കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്ര ആയിരിക്കണം?

(3) ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയിലും ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക് എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്ത സമപാർശ്വത്രികോണം പാർശ്വമുഖങ്ങളായി ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും? പാദവക്ക് 30 സെന്റിമീറ്ററിനു പകരം 40 സെന്റിമീറ്ററായാലോ?

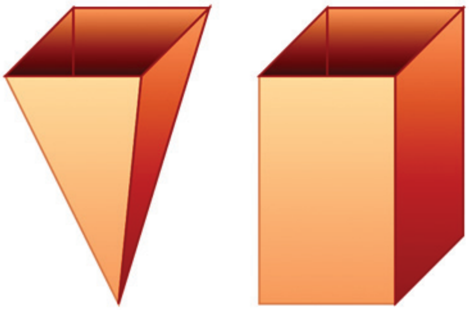


തുല്യമായ ഏത് നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ?

സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമോ?

സമചതുരസ്തൂപിക തന്നെ എടുക്കാം. ആദ്യം ഒരു പരീക്ഷണമാവാം. നല്ല കട്ടിയുള്ള കടലാസുകൊണ്ട്, ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. ഇനി, അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തംഭവും ഉണ്ടാക്കുക.



ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയും സമചതുരസ്തംഭവും ജിയോജിബ്രയിൽ നിർമിക്കുക. ഇവ പെട്ടെന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ ഉള്ളിലുള്ള സ്തൂപികയുടെ നിറം മാറ്റികൊടുക്കുകയും Opacity 100 ആക്കുകയും ചെയ്താൽ മതി (Object properties → Colour) Volume ഉപയോഗിച്ച് സ്തൂപികയുടേയും സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ഇവയുടെ പാദവും ഉയരവും മാറ്റിയാലോ?

സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച്, സ്തംഭത്തിലേക്കു പകരുക; മണൽനിരപ്പിന്റെ ഉയരം സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് അളന്നു നോക്കുക. മൂന്നിലൊന്നല്ലേ? സ്തംഭം നിറയാൻ എത്ര തവണ ഇതുപോലെ സ്തൂപികയിൽ മണലെടുക്കണം?

അപ്പോൾ സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്ന് കാണാം. (ഇതിന്റെ ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനഭാഗത്ത് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി, പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 15 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത് ഉരുക്കി 25 സെന്റിമീറ്റർ പാദവക്കുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം 15^3 ഘനസെന്റിമീറ്റർ.

ഉരുക്കി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും ഇതുതന്നെ. പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

കണക്കിലെ സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് 25^2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്ന് $\frac{15^3}{25^2}$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് ഉയരം

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

എന്നും കാണാം.

(1) പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

(2) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തം തുല്യമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ പകുതിയാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം?

(3) രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ 1 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലും. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 180 ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

(4) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം 18 സെന്റിമീറ്ററാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

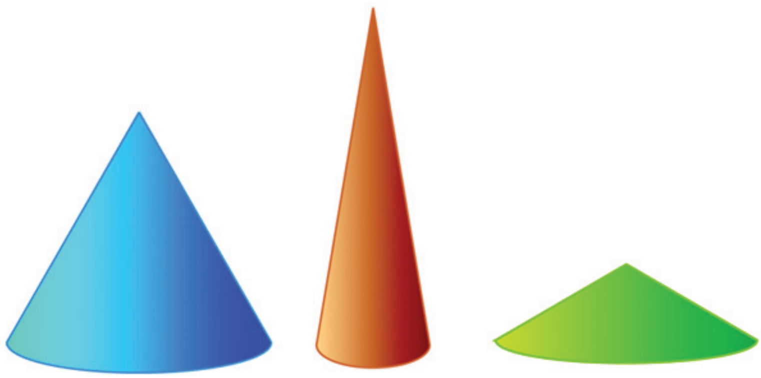
(5) ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും, ഉപരിതല പരപ്പളവ് 896 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുക.

(6) വക്കുകളെല്ലാം തുല്യനീളമായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ വ്യാപ്തം എന്താണ്?

(7) പാദചുറ്റളവ് 64 സെന്റിമീറ്ററും വ്യാപ്തം 1280 ഘനസെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എന്താണ്?

വൃത്തസ്തൂപിക

വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ പോലെ, പാദം വൃത്തമായ സ്തൂപികകളുമുണ്ട്:

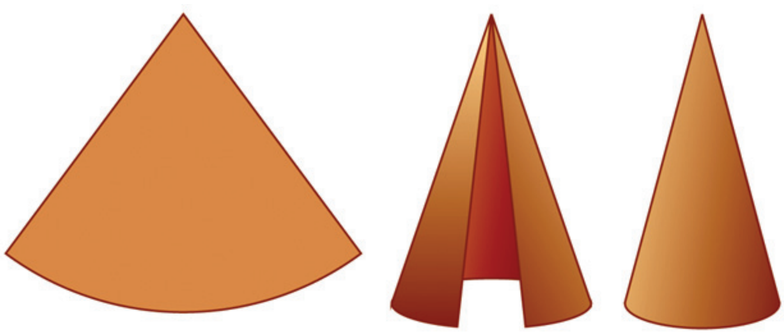


ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികകൾ (cones) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

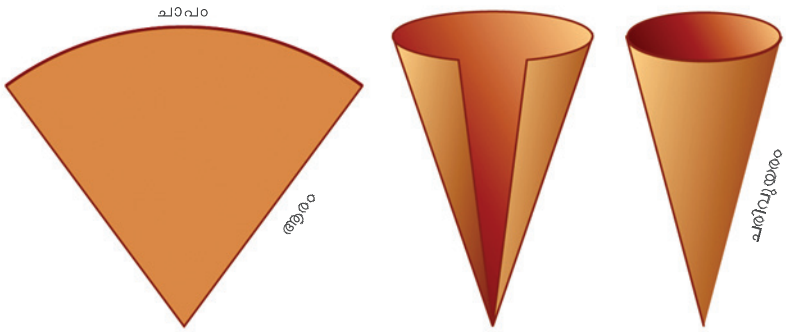
ചതുരം വളച്ച് വൃത്തസ്തംഭമുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുമുണ്ടാക്കാം. (അടഞ്ഞ സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ഒരു കൊച്ചു വൃത്തം വേറെയും വേണം.)

വൃത്തസ്തൂപിക

സമചതുരസ്തൂപിക പോലെ വൃത്തസ്തൂപികയും ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാം. Graphics ൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് 3D Graphics ൽ Extrude to Pyramid or Cone ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക വരയ്ക്കാം. ആവശ്യമെങ്കിൽ ആരവും ഉയരവും മാറ്റാൻ സ്ലൈഡറുകൾ ഉപയോഗിക്കാം.



ഇതിൽ വളയ്ക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ അളവുകളും, ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?



വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം, സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമാകും; വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം, സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവുമാകും.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വലുപ്പം കേന്ദ്രകോണിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് പലപ്പോഴും പറയുന്നത്. ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിൽനിന്ന് 45° കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്തു. ഇതു വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ ആരവും എത്രയാണ്?

സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായ 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ. പാദത്തിന്റെ ആരമോ?

45° എന്നത്, 360° യുടെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണല്ലോ. വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ചാപമാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്ത വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ആരങ്ങൾ, ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ, ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗംതന്നെയാണ്. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം

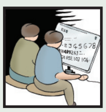
$12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ സെന്റിമീറ്റർ.

മറിച്ചൊരു ചോദ്യമായാലോ?

> പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ, വൃത്താംശം വേണം. ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ വേണമെന്നുള്ളതിനാൽ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നുതന്നെ വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കണം. അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയായിരിക്കണം?

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ?). അപ്പോൾ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപം, അതു വെട്ടിയെടുത്ത വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360 \times \frac{1}{3} = 120°$.



(1) ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും കേന്ദ്രകോൺ $60°$ ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരവും ചരിവുയരവും എത്രയാണ്?

(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?

(3) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിലെന്നപോലെ, വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും ഒരു വക്രതലമുണ്ട്; അതിന്റെ ചരിഞ്ഞുയരുന്ന ഭാഗം. വൃത്തസ്തൂപിക വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് ഈ വക്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. (വൃത്തസ്തംഭത്തിലും, അതിന്റെ വക്രതലം ചുരുട്ടിയുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ, വക്രതലപരപ്പളവ്.)

ഈ കണക്കു നോക്കുക.

> ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

ഇത്തരമൊരു തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ വേണ്ടതിനാൽ, ഇത്രയും ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു വേണം, വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കാൻ.

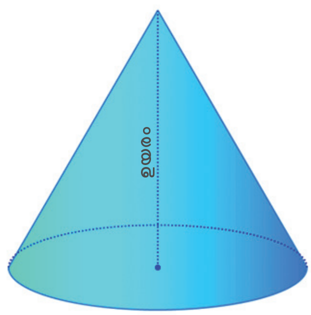
കൂടാതെ, സ്തൂപികയുടെ പാദമായ കൊച്ചുവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. അതായത്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ഭാഗം. അപ്പോൾ, ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റ

ളവും, വൻവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. ചെറു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശ ത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, വെട്ടി യെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{4}{15}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ വൃത്ത ത്തിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

അപ്പോൾ തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ 240π ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം. (ക്രിയചെയ്ത്, ഇത് ഏതാണ്ട് 754 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം.)

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്ന പോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, പാദത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ് ഉയരം. വൃത്തസ്തൂപികയിൽ, ഇത്, പാദമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ശീർഷവും തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്.



വക്രതലപരപ്പളവ്

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവുതന്നെയാണല്ലോ. സ്തൂപികയുടെ പാദ ആരം r എന്നും, ചരിവുയരം l എന്നുമെടുത്താൽ, വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം l എന്നും, കേന്ദ്രകോൺ $\frac{r}{l} \times 360^\circ$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

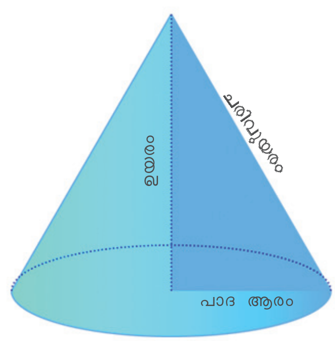
$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

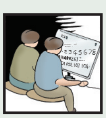
എന്നു കണക്കാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർക്കുക.)

അതായത്, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, ഉയരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലൊരു മട്ടത്രികോണബന്ധമുണ്ട്:

ഉദാഹരണമായി പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $\sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്.





(1) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(2) പാദത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

(3) വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂക്കുറ്റിയുടെ പാദവ്യാസം 10 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 10000 പൂക്കുറ്റികളുടെ പുറംഭാഗം മുഴുവൻ വർണക്കടലാസ് ഒട്ടിക്കണം. ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ വർണക്കടലാസിന് 2 രൂപയാണ് വില. ഇതിന് ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?

(4) ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് അതിന്റെ പാദപരപ്പളവിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണാൻ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു പരീക്ഷണം ഇവിടെയുമാകാം. ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും. സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച് വൃത്തസ്തംഭത്തിലേക്ക് പകർന്നുനോക്കൂ. ഇവിടെയും സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്ന് കാണാം. അതായത്,

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.

വൃത്തസ്തൂപികാവ്യാപ്തം

സ്തൂപികാവ്യാപ്തം എന്നഭാഗത്ത് ചെയ്തത്പോലെ ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയും ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും നിർമിക്കുക. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം താരതമ്യം ചെയ്യുക.

(ഇതിന്റെയും ഗണിതപരമായ വിശദീകരണം, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഉദാഹരണമായി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$

ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

(1) വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

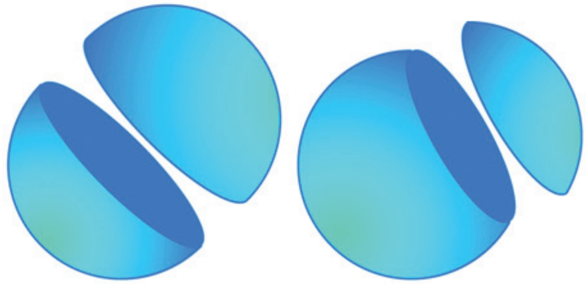
(2) പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററുമായ കട്ടിയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ എത്ര വൃത്തസ്തൂപികകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

(3) 216° കേന്ദ്രകോണും 25 സെന്റിമീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും എത്രയായിരിക്കും? വ്യാപ്തമോ?

(4) രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5, അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3, അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എത്രയാണ്?

(5) തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഗോളം



പന്തുകളിയുടെ ഹരമായും, ലഡ്ഡുവിന്റെ മധുരമായുമൊക്കെ ഗോളങ്ങൾ ആസ്വദിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇനി ഗോളത്തിന്റെ ഗണിതമാവാം. (ഇംഗ്ലീഷിൽ ഗോളത്തിന് sphere എന്നാണു പേര്.)

വൃത്തസ്തംഭത്തിനെയോ, വൃത്തസ്തൂപികയെയോ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, വൃത്തം കിട്ടും. ഗോളത്തെ എങ്ങനെ മുറിച്ചാലും വൃത്തം കിട്ടും:

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണല്ലോ. ഗോളത്തിനുമുണ്ടൊരു കേന്ദ്രം; അതിൽ നിന്ന് ഗോളോപരിതലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഒരേ അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം എന്നു പറയുന്നു; അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ വ്യാസമെന്നും.

ഒരു ഗോളത്തെ കൃത്യം പകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവുമൊക്കെയാണ്, ഗോളത്തിന്റെയും കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവും.

ഇതുവരെക്കണ്ട രൂപങ്ങളിൽ ചെയ്തപോലെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല. അൽപം ചുളിവോ, വലിച്ചുനീട്ടലോ ഇല്ലാതെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണു കാര്യം.

എന്നാൽ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിട്ടുണ്ട്).

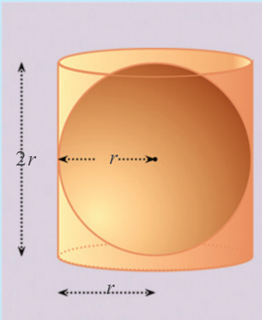
മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ 4π കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

കൂടാതെ ആരം r ആയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ എന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. (ഇതിന്റെയും വിശദീകരണം പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ഗോളവും സ്തംഭവും

ഒരു ഗോളത്തിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, ഗോളത്തിന്റെ തന്നെ ആരവും ഉയരം, ഈ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണല്ലോ:



അതായത്, ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം r, ഉയരം $2r$. അപ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$. ഈ രണ്ടു പരപ്പളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $3 : 2$

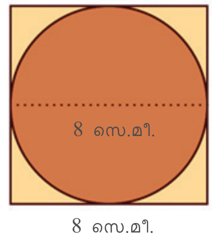
മാത്രവുമല്ല, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

ഉം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ഉം ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $3 : 2$ തന്നെ.

ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

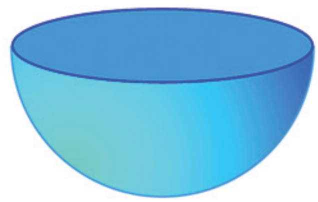


ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരക്കട്ടയുടെ വക്കിന്റെ നീളമാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$4\pi \times 4^2 = 64\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ പകുതിയും ഒരു വൃത്തവും ചേർന്നതാണല്ലോ അർധഗോളം.

ഗോളത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഇതിന്റെ പകുതിയും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്

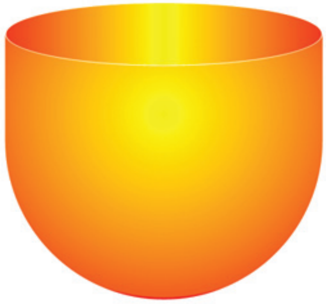
$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

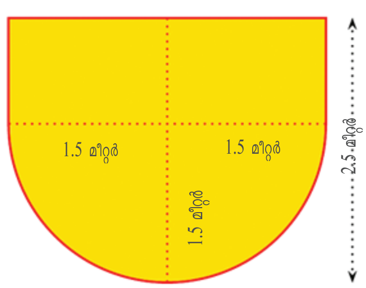
അപ്പോൾ അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടിയാകാം:

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അർധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ആകെ ഉയരം 2.5 മീറ്ററും, പാദത്തിന്റെ ആരം 1.5 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?





ടാങ്കിലെ അർധഗോളഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{2}{3}\pi \times (1.5)^3 = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

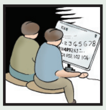
വൃത്തസ്തംഭഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi \times (1.5)^2 (2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ ടാങ്കിന്റെ ആകെ വ്യാപ്തം

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്റർ എന്നത്, 1000 ലിറ്ററായതിനാൽ, ടാങ്കിൽ ഏകദേശം 14130 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.



(1) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് 120 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്. അത് മുറിച്ച് രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളാക്കിയാൽ ഓരോന്നിന്റെയും ഉപരിതല പരപ്പളവ് എന്തായിരിക്കും?

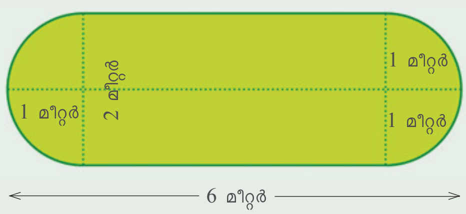
(2) രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 27 : 64 ആണ്. അവയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്? ഉപരിതല പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമോ?

(3) ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?

(4) 12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു ലോഹഗോളത്തെ ഉരുക്കി തുല്യവലുപ്പമുള്ള കട്ടിയായ 27 ചെറുഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കി. ചെറുഗോളങ്ങളുടെ ആരമെന്തായിരിക്കും?

(5) 10 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തിൽനിന്ന്, 16 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരവും പരമാവധി വലുപ്പവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്തു. സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

(6) ഒരു പെട്രോൾ ടാങ്കിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:



ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ പെട്രോൾ കൊള്ളും?

(7) കട്ടിയായ ഒരു ഗോളം, രണ്ട് അർധഗോളങ്ങളായി മുറിച്ച്, ഒന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള സമചതുരസ്തൂപികയും, മറ്റൊന്നിൽനിന്ന് പരമാവധി വലുപ്പമുള്ള വൃത്തസ്തൂപികയും മുറിച്ചെടുക്കുന്നു. ഇവയുടെ വ്യാപ്തം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

കട്ടിയായ ഒരു അർധഗോളത്തിൽനിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കുന്ന പരമാവധി വലിയ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

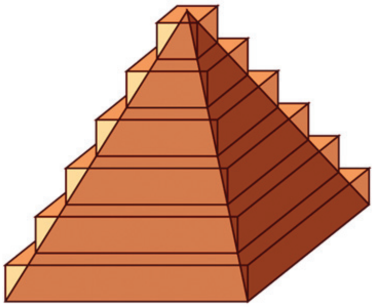
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാദവക്ക്, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക്, ഉയരം, പാദവികർണം ഇവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധം കണ്ടെത്തുന്നു.			
• അനുയോജ്യമായ അളവുകളിൽ സമചതുരവും, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളും മുറിച്ചെടുത്ത് സമചതുരസ്തൂപിക നിർമിക്കുന്നു.			
• പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച്, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണക്കാക്കുന്നു.			
• നിശ്ചിത അളവുകളുള്ള വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാനാവശ്യമായ വൃത്താംശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നു.			
• വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പാദവ്യാസം, ഉയരം, ചരിവുയരം ഇവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധം കണ്ടെത്തി സമർഥിക്കുന്നു.			
• വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഗോളത്തിന്റെയും അർധഗോളത്തിന്റെയും ഉപരിതല പരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			

അനുബന്ധം

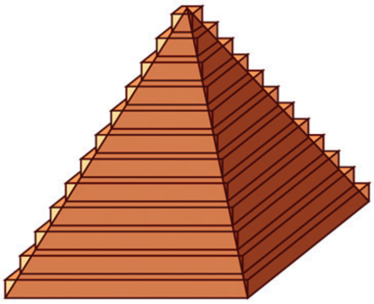
സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയകൾ മാത്രമാണല്ലോ കണ്ടത്. ഇവ എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താത്പര്യമുള്ളവർക്ക് വേണ്ടി, അവയുടെ വിശദീകരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശ രൂപമായി കുറെ സമചതുരപ്പലകകളുടെ കൂട്ടം സങ്കൽപിക്കാം.



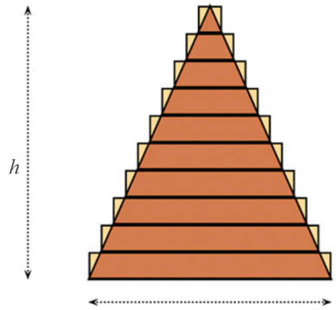
പലകകളുടെ കനം കുറയുകയും, എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്നതിനനുസരിച്ച്, അവയുടെ അടുക്ക് കൂടുതൽ സ്തൂപികാസമാനമാകും.



അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക, സ്തൂപികയടെ വ്യാപ്തത്തോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഉദാഹരണമായി, 10 പലകകളാണ് ഉപയോഗിച്ചതെന്നു കരുതുക. ഓരോ പലകയും ഒരു സമചതുരസ്തംഭമാണല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം തുല്യമായിട്ടെടുക്കാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ, ഒരു പലകയുടെ ഉയരം $\frac{1}{10}h$ ഇനി ഓരോ പലകയുടേയും പാദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

സ്തൂപികയേയും അതിനെ പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പലകകളുടെ അടുക്കിനേയും ശീർഷത്തിലൂടെ കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ, ഇത്തരമൊരു രൂപം കിട്ടും:



മുകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വലുതായി വരുന്നുണ്ടല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം വർധിക്കുന്നത്, ഓരോ പലകയിലും $\frac{1}{10}h$ എന്ന നിര

ക്കിലാണ്. ഇവയെല്ലാം സദൃശമായതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട്?) പാദങ്ങളും ഇതേ നിരക്കിൽത്തന്നെ കൂടണം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദം b എന്നെടുത്താൽ, മുകളിൽനിന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പാദം $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, ..., b$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ...b^2 \times \frac{1}{10}h$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്, അവയുടെ തുകയോ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2}+\frac{2^2}{10^2}+...+\frac{9^2}{10^2}+\frac{10^2}{10^2}\right) = \frac{1}{1000}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

ഇത്തരം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനൊരു മാർഗം, **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുകകൾ** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

അപ്പോൾ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക

$$\frac{1}{1000}b^2h \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = \frac{1}{6}b^2h \times \frac{10}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{21}{10} = \frac{1}{6}b^2h \times 1.1 \times 2.1$$

ഇനി ഇതുപോലെ 100 പലകകൾ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (അതേതായാലും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല).

പലകകളുടെ കനം $\frac{1}{100}h$ ആകും; പാദങ്ങളുടെ വശം $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, ..., b$ എന്നിങ്ങനെയാകും. വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+100^2\right) = \frac{1}{100^3}b^2h \times \frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201$$

$$= \frac{1}{6}b^2h \times \frac{100}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{210}{100}$$

$$= \frac{1}{6}b^2h \times 1.01 \times 2.01$$

പലകകളുടെ എണ്ണം 1000 ആക്കിയാലോ? കണക്കുകൂട്ടാതെ തന്നെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1.001 \times 2.001$$

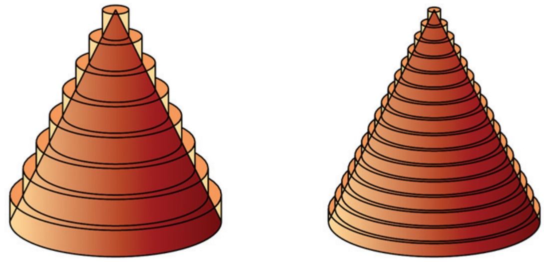
എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ തുകകൾ ഏതു സംഖ്യയോടാണ് അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്?

ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം. അതായത്

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}b^2h$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

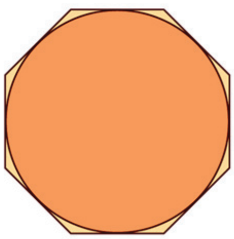
സമചതുരപ്പലകകളടുക്കി, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശം രൂപങ്ങളു ണ്ടാക്കിയതുപോലെ, വട്ടപ്പലകകളടുക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂ പങ്ങൾ ചമയ്ക്കാം:



ഇതിലൂടെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം (ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ)

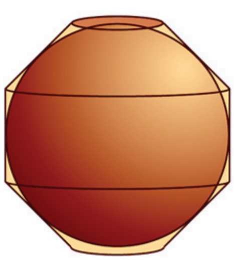
ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഇതിന്, ആദ്യം ഗോളത്തിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള ഒരു വൃത്തവും വശങ്ങളെല്ലാം അതിനെ തൊടുന്ന ഒരു സമബഹുഭുജവും സങ്കൽപ്പിക്കുക.



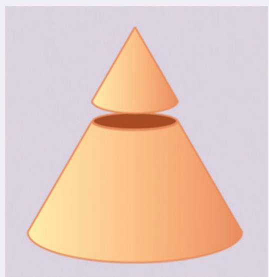
ഇനി ഈ രൂപം ഒന്നു കറങ്ങിയാൽ, ഉള്ളിലൊരു ഗോളവും, പുറത്തു മറ്റൊരു രൂപവും കിട്ടും;

ഈ ചിത്രത്തിൽ, പുറത്തുള്ള രൂപത്തിനെ രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠവും (അടുത്ത പുറം നോക്കുക), ഒരു വൃത്തസ്തംഭവുമായി ഭാഗിക്കാം:



ചെറുതും വലുതും

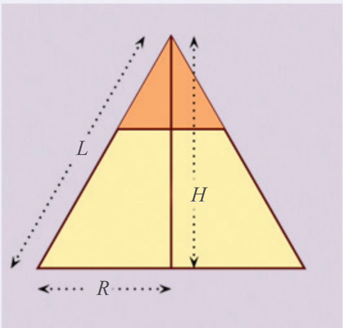
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിലൊരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക കിട്ടും.

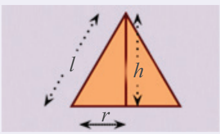


ചെറിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും വലിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

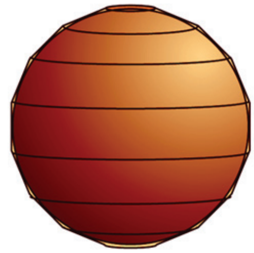
പാദത്തിന്റെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരമിവയെല്ലാം വലിയ സ്തൂപികയ്ക്ക് R, H, L എന്നും ചെറുതിന് r, h, l എന്നുമെടുത്താൽ, ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$



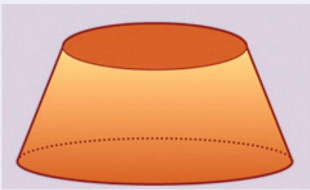


ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ രൂപം, ഗോളത്തോട് കൂടുതൽ അടുക്കും:

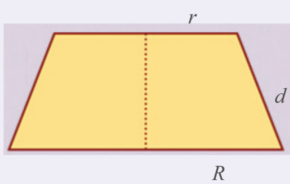


വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക വെട്ടിയെടുത്താൽ താഴെ മിച്ചം വരുന്ന ഭാഗത്തിന് വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം (frustum of a cone) എന്നാണ് പേര്.



ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകളിലെത്തെയും താഴത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും, ചരിവുയരവും അറിയാമെങ്കിൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?



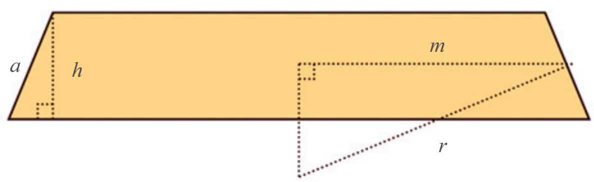
വലിയ സ്തൂപികയുടെയും, ചെറിയ സ്തൂപികയുടെയും ചരിവുയരങ്ങൾ L, l എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ $d = L - l$. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്,

$$\begin{aligned} \pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl) \\ &= \pi\big(R(l+d) - rl\big) \\ &= \pi(Rl + Rd - rl) \end{aligned}$$

ഇതിൽ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ആയതിനാൽ, $Rl = rL$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

$$\begin{aligned} \pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L-l) + Rd\big) \\ &= \pi(rd + Rd) \\ &= \pi(r+R)d \end{aligned}$$

ഈ സ്തൂപികാപീഠങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, അവയിൽ ഒന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇതിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം m എന്നും, ഉയരം h എന്നുമെടുക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, അതിനെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം a എന്നുംകൂടി എടുത്താൽ, ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും.



ഇതിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകയാൽ

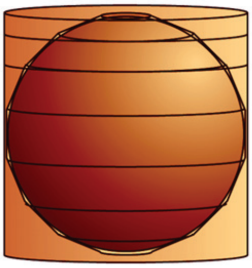
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

$$am = rh$$

ഇതു കറങ്ങിയുണ്ടാകുന്ന പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $2\pi ma$ ആണെന്ന് **പീഠവും സ്തംഭവും** എന്ന ഭാഗത്തു കാണാം (അവസാനത്തെ പുറം). മുകളിലെ സമവാക്യപ്രകാരം, ഇത് $2\pi rh$ നു തുല്യമാണ്. അതായത്, പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം h ഉം ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി? മുകളിൽ കണ്ട ഗോളത്തിന്റെ ഏകദേശരൂപത്തിലെ ഓരോ സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, അതേ ഉയരവും, ഗോളത്തിന്റെ ആരവുമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്.



അതിനാൽ, ഈ ഏകദേശരൂപത്തിന്റെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ കൂട്ടിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നതോ? വലിയൊരു വൃത്തസ്തംഭം:

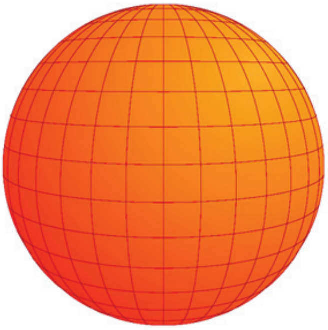
വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അത് കൂടുതൽ വൃത്തസമാനമാകും; ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം, ഗോളസമാനമാകും. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വശങ്ങൾ എത്ര കൂടിയാലും, ഈ രൂപത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് തന്നെ. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം r ഉം, ഉയരം $2r$ ഉം ആയതിനാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

ഇതുതന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും.

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

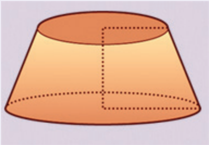


നെടുകെയും കുറുകെയുമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗോളത്തിനെ കളങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത്തരമൊരു കളത്തിന്റെ മൂലകളെ ഗോളകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, സമചതുരസ്തൂപിക പോലുള്ള ഒരു രൂപം കിട്ടും:

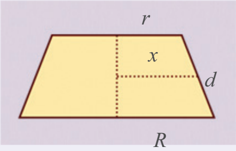
ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഗോളം; അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണ്. ഇനി ഗോളത്തിലെ കളങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഗോളത്തെ തൊടുന്ന ചെറു സമചതുരങ്ങളാക്കിമാറ്റിയാൽ, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന ഒരു രൂപം കിട്ടും; അത് ശരിയായ സമചതുരസ്തൂപികകൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ്. ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം ഉയരം, ഗോളത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാണ്. ഇത് r എന്നും, ഒരു സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് a എന്നുമെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}ar$ എന്നു കിട്ടും. ഗോളത്തെ പൊതിഞ്ഞുനിൽക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം. ഈ സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്ത

പീഠവും സ്തംഭവും

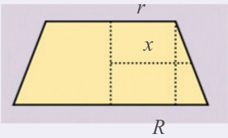
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $\pi(r+R)d$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ മധ്യത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം x എന്നെടുത്താൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും:



ഇങ്ങനെ ഒരു വരകൂടി വരച്ചാലോ?



വലതുവശത്തെ രണ്ടു സദൃശമട്ടത്രികോണങ്ങളിൽനിന്ന്,

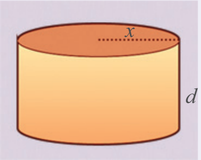
$$\frac{x-r}{R-r}=\frac{1}{2}$$

എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$x=\frac{1}{2}(R+r)$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, $2\pi xd$

ഇത്, പാദത്തിന്റെ ആരം x ഉം, ഉയരം d യും ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവല്ലേ?



ത്തിന്റെ തുകയാണല്ലോ. സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലവുമാകും. അപ്പോൾ ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദപ്പരപ്പളവുകളുടെ തുക, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവാണ്. അത് s എന്നെടുത്താൽ, രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}sr$ എന്നുകിട്ടും.

ഗോളത്തിലെ കളങ്ങൾ ചെറുതാകുകയും അവയുടെ എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്തോറും ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം കൂടുതൽ ഗോളത്തോടടുക്കും; s എന്നത്, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവിനോടും. അത് $4\pi r^2$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

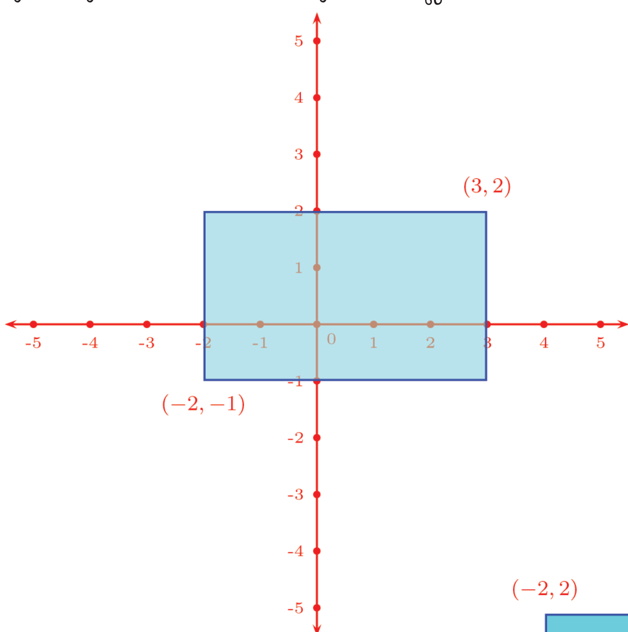
$$\frac{1}{3}\times 4\pi r^2\times r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

എന്ന സംഖ്യയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു. ഇതു തന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.

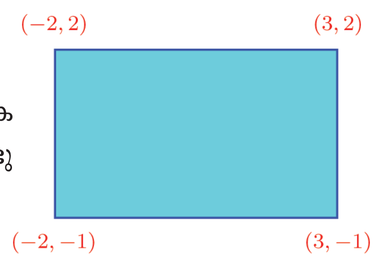
9 ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

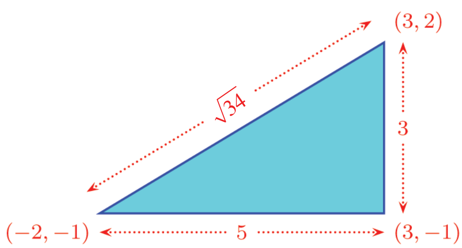
ത്രികോണക്കണക്കുകൾ

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമല്ലെങ്കിൽ, അവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ:



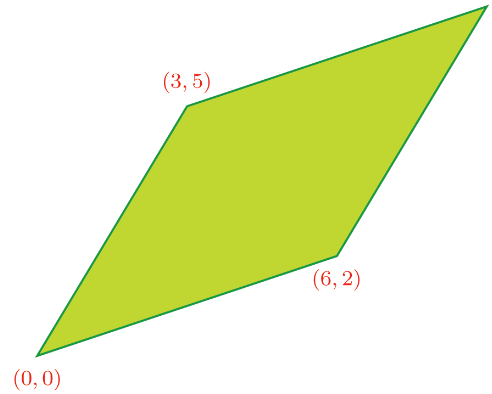
മാത്രമല്ല, അക്ഷങ്ങൾ നോക്കാതെ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാമെന്നും കണ്ടു:





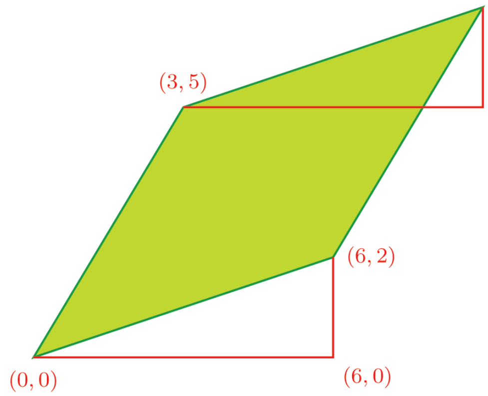
ഇത്തരമൊരു ചതുരം ഉപയോഗിച്ചാണ്, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളിൽ നിന്ന് അവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കിയത്. ശരിക്കു പറഞ്ഞാൽ, ഈ കണക്കുകൂട്ടലിൽ ചതുരം മുഴുവൻ ഉപയോഗിച്ചിട്ടില്ല; അതിന്റെ പകുതിയായ മട്ടത്രികോണം മാത്രമേ ഉപയോഗിച്ചുള്ളൂ.

ഇങ്ങനെ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകൾ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആധാരബിന്ദുവും മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി വരച്ച ഈ സാമാന്തരികം നോക്കുക:



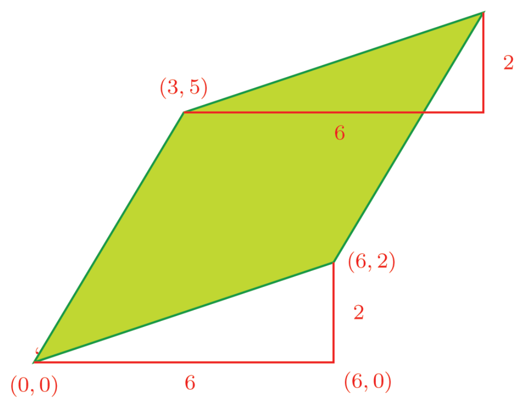
ഇതിന്റെ നാലാം മൂല കണ്ടുപിടിക്കണം.

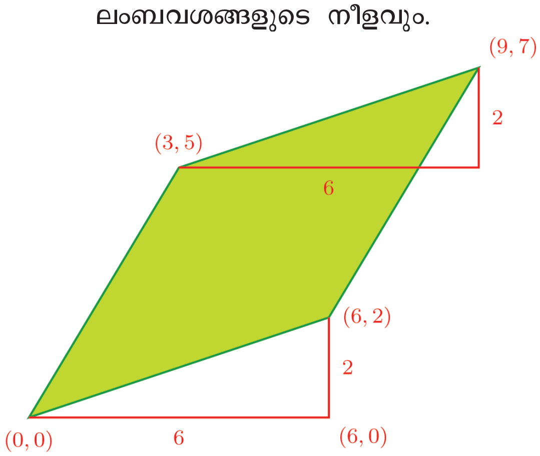
അതിന് മുകളിലെയും താഴത്തെയും വശങ്ങൾ കർണങ്ങളും, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ വരകൾ ലംബവശങ്ങളുമായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം:



ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കർണവും, അതിലുള്ള രണ്ടു കോണുകളും തുല്യമാണ് (കാരണം?). അതിനാൽ അവയുടെ ലംബവശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

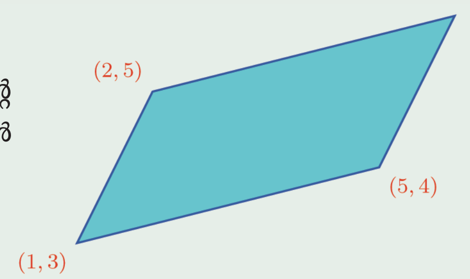
താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം എളുപ്പം കണക്കാക്കാം. അതു തന്നെയാണ് മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളവും.





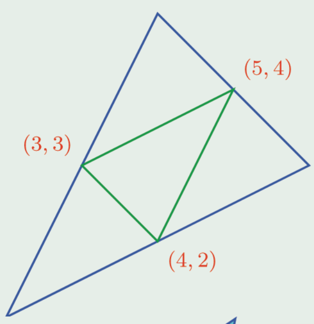
ഇനി മുകളിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വലതു മൂല (9, 5) എന്നും, തുടർന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂല (9, 7) എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ. (എങ്ങനെ?)

(1) ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

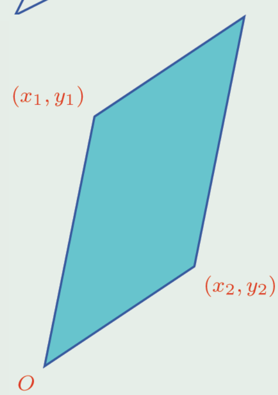


(2) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നത്:

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.



(3) (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ആധാരബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ സമീപവശങ്ങളായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

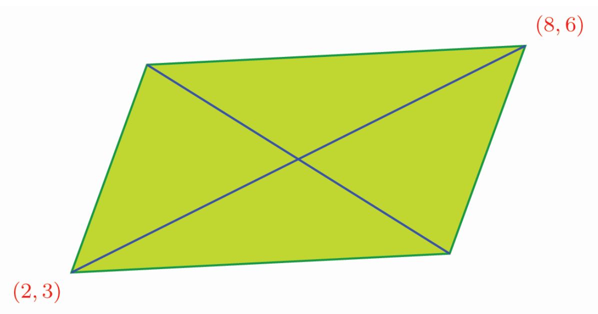


(4) ഏതു സാമാന്തരികത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളുടെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

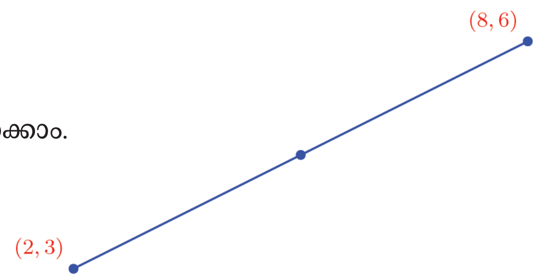
അംശബന്ധം

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

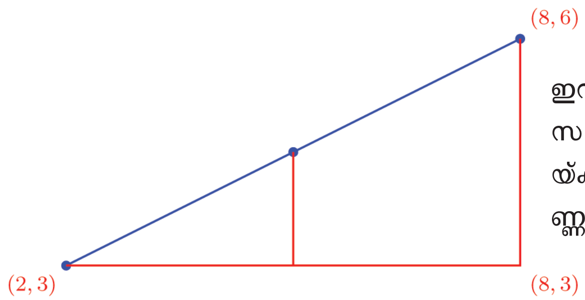
(2, 3), (8, 6), എന്നിവ എതിർമൂലകളായ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാജികളാണല്ലോ. അപ്പോൾ വികർണങ്ങൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു അവയുടെ മധ്യബിന്ദു ആണ്.



ഇനി വികർണം മാത്രം വരച്ചുനോക്കാം.

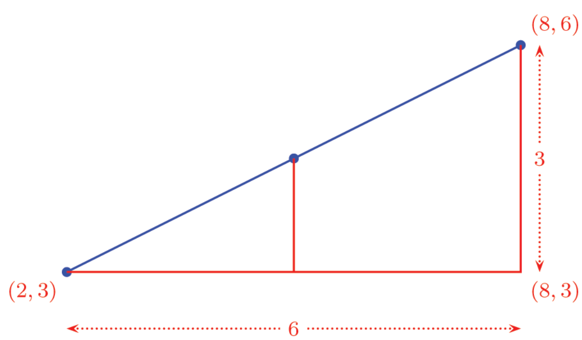


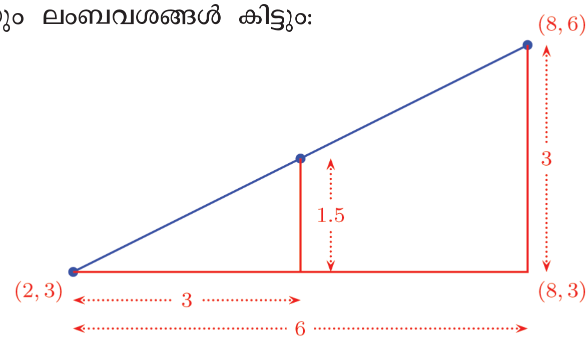
ഇവിടെയും ലംബവശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം - മുഴുവൻ വരയും കർണമായ ഒരെണ്ണം, ഒരു പകുതി കർണമായ മറ്റൊരെണ്ണം:

ഇവയിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും, അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണത്തിന്റെയും കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്. ഇതിൽനിന്ന് ഈ ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം (എങ്ങനെ?)

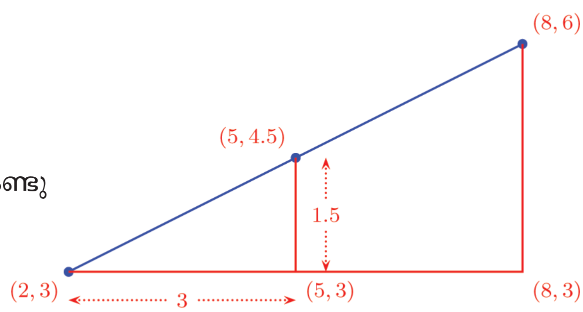
അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്.

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വലുതിന്റെ കർണത്തിന്റെ പകുതിയായതിനാൽ, അതിന്റെ ലംബവശങ്ങളും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ പകുതി തന്നെ. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ അറിയാം: അങ്ങനെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും ലംബവശങ്ങൾ കിട്ടും:



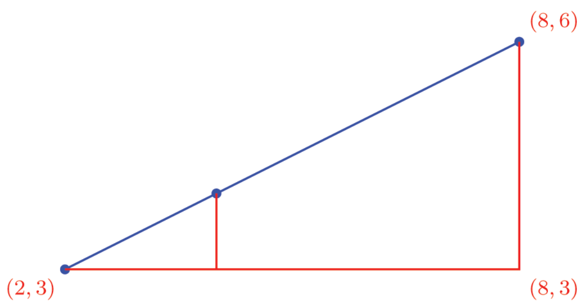


ഇനി നമുക്കാവശ്യമായ മധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:



ഇതുപോലെ രണ്ടറ്റങ്ങളിലെ ബിന്ദുക്കൾ $(-3, 5)$, $(7, 3)$ ആയ വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചുനോക്കൂ

മധ്യബിന്ദുവിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി, മുകളിലെ വികർണക്കണക്കിലെ വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഈ രീതിതന്നെ, വേണ്ട വ്യത്യാസം വരുത്തി, ഉപയോഗിക്കാം;

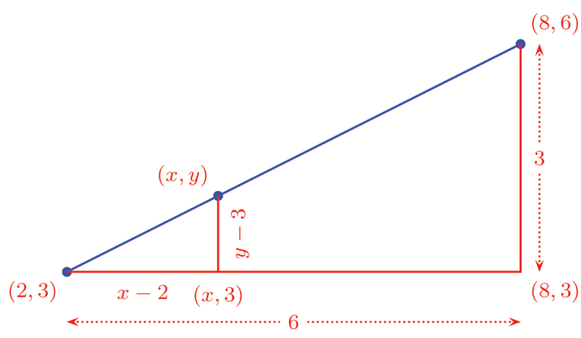


ഇവിടെ, വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : 2$ ആയതിനാൽ, ചെറിയ ഭാഗം, മൊത്തം വരയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്.

അതായത്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം തന്നെയാണ്. ഇനി മധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെതന്നെ ഇവിടെയും തുടരാം.

അല്പം വ്യത്യസ്തമായി ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ചെയ്തു നോക്കാം.

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട സൂചകസംഖ്യകളെ (x, y) എന്നെടുക്കാം; അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം ഇങ്ങനെയാണ്:



ത്രികോണങ്ങളുടെ ലംബവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{1}{3}$$

ഇതിൽ നിന്ന് $\quad \frac{x-2}{6} = \frac{1}{3}; \quad \frac{y-3}{3} = \frac{1}{3}$ എന്നും തുടർന്ന്

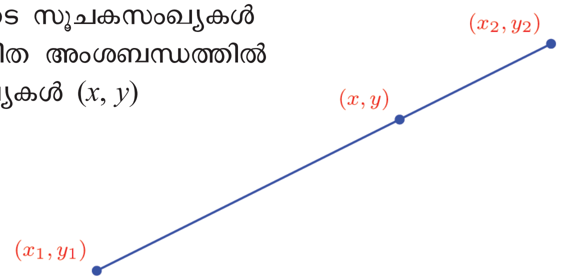
$$x = 6 \times \frac{1}{3} + 2 = 4$$

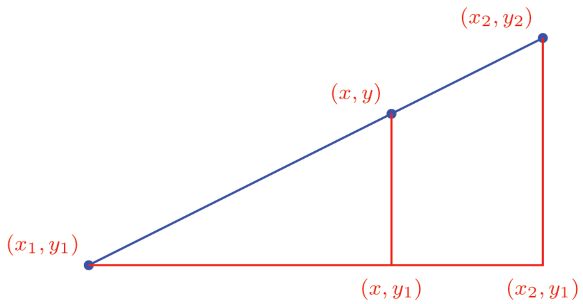
$$y = 3 \times \frac{1}{3} + 3 = 4$$

എന്നും കണക്കാക്കാം. അതായത്, വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(4, 4)$.

ചിത്രം വരയ്ക്കാതെതന്നെ ഇത്തരമൊരു കണക്കു ചെയ്യാൻ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്ത രീതി പൊതുവായി നോക്കാം.

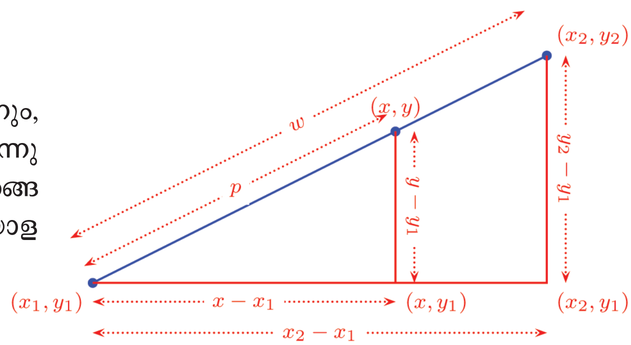
വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നും, വരയെ നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നുമെടുക്കാം:





നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ ലംബവശങ്ങളുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; വര മുഴുവൻ കർണമായി ഒന്നും, വരയുടെ ഒരു ഭാഗം കർണമായി മറ്റൊന്നും:

ചെറിയ കർണത്തിന്റെ നീളം p എന്നും, വലിയ കർണത്തിന്റെ നീളം w എന്നുമെടുത്താൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം.



ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തുല്യമാണെന്നത് അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{p}{w}$$

ഇതിലെ p, വരയുടെ ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ നീളവും, w മുഴുവൻ വരയുടെ നീളവുമാണ്; ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം അറിയാമെങ്കിൽ, ഭാഗവും, മുഴുവനും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ $\frac{p}{w}$ അറിയാം. ഇനി മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് x, y ഇവ കണക്കാക്കാം:

$$x = x_1 + \frac{p}{w}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{p}{w}(y_2 - y_1)$$

ഉദാഹരണമായി (2, 4), (8, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാം. ഈ ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ, വരയിൽ (2, 4) മുതൽ (x, y) വരെയുള്ള ഭാഗം, മുഴുവൻ വരയുടെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗമാണ്. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങളനുസരിച്ച്,

$$x = 2 + \frac{3}{8} \times (8 - 2) = 4\frac{1}{4}$$

$$y = 4 + \frac{3}{8} \times (7 - 4) = 5\frac{1}{8}$$

അതായത് നമ്മൾ അന്വേഷിച്ച ബിന്ദു $\left(4\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{8}\right)$

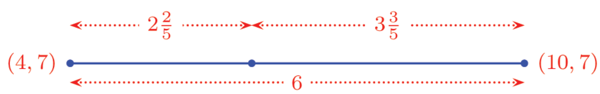
രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണെങ്കിൽ ഇതുപോലെ ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. പക്ഷേ അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു എളുപ്പം കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, (4, 7), (10, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ് (x-അക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം 7) ഈ വരയെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

ഈ വരയുടെ നീളം $10 - 4 = 6$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ വരയുടെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാം:

$$6 \times \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$6 \times \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$$



അപ്പോൾ ഈ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(6\frac{2}{5}, 7\right)$ എന്നു കാണാം.

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട പല സന്ദർഭങ്ങളുമുണ്ട്. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു എന്താണ്?

മധ്യബിന്ദുവാകുമ്പോൾ, വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ, മുഴുവൻ വരയുടെ പകുതി

യാണ്. അതായത്, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിൽ $\frac{p}{w}$ എന്നത്, $\frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കണം. അതായത്,

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദു

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

(1) A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(3, 2), (8, 7)$. AB എന്ന വരയിൽ

i) $AP : PB = 2 : 3$ ആകുന്ന P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

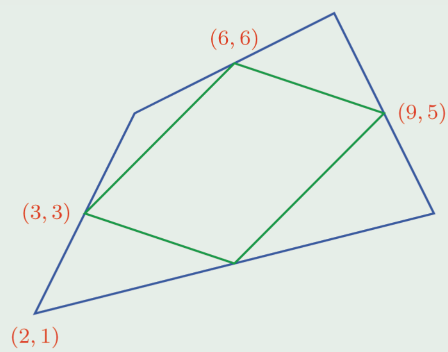
ii) $AQ : QB = 3 : 2$ ആകുന്ന Q എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ക്രമത്തിൽ $(2, 1), (5, 3), (8, 7), (4, 9)$ എന്നിങ്ങനെയാണ്?

i) എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

ii) ഈ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചിത്രത്തിലെ വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നത്:



i) ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലാം മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ii) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

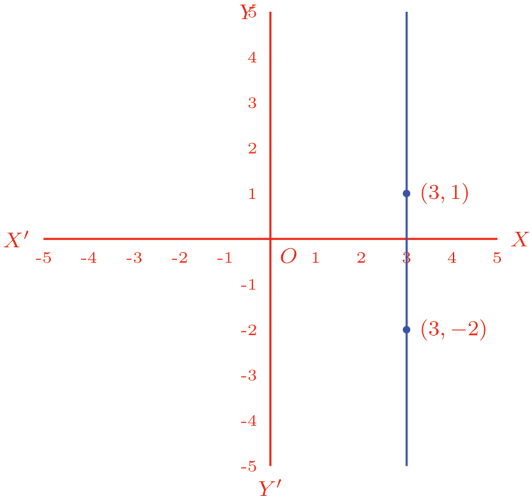
(4) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $(3, 5), (9, 13), (10, 6)$ എന്നിവയാണ്. ഈ ത്രികോണം സമപാർശ്വമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

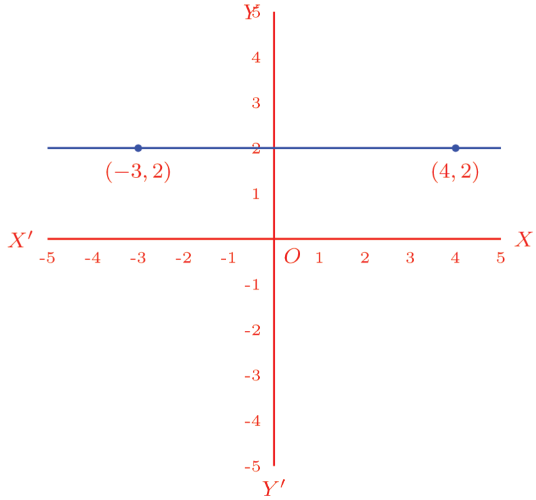
(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $(-1, 5), (3, 7), (1, 1)$ എന്നിവയാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(6) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $(1, 2)$ ഉം, അതിലെ ഒരു ബിന്ദു $(3, 2)$ ഉം ആണ്. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റം കണ്ടുപിടിക്കുക.

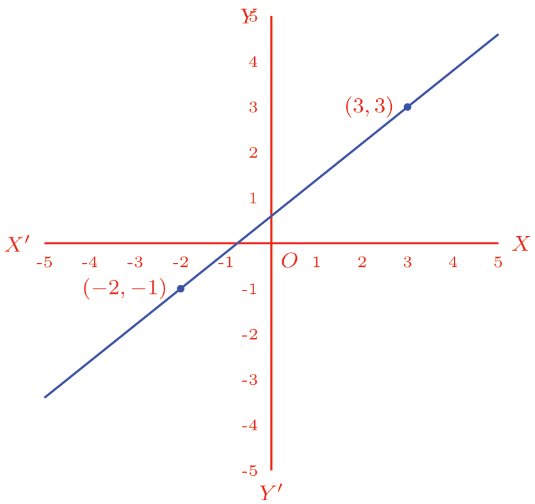
വരക്കണക്ക്

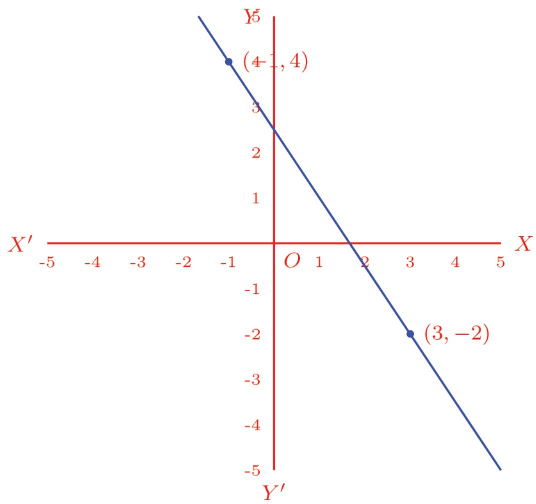
ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചും ഒരു വര (ഒരു വര മാത്രം) വരയ്ക്കാം. അത് ഇരുവശത്തേക്കും എത്ര വേണമെങ്കിലും നീട്ടുകയും ചെയ്യാം. ബിന്ദുക്കളുടെ x സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെങ്കിൽ, വര y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും; y സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെങ്കിൽ, വര x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും;



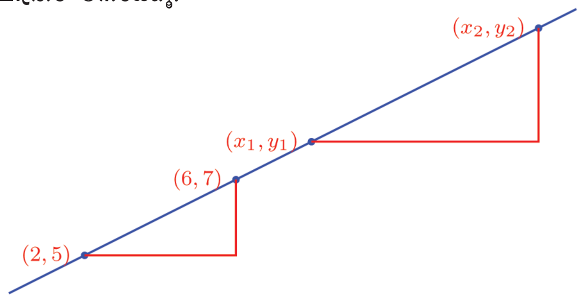


x സൂചകസംഖ്യകളും, y സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിൽ, വര അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാതെ ചരിഞ്ഞിരിക്കും:

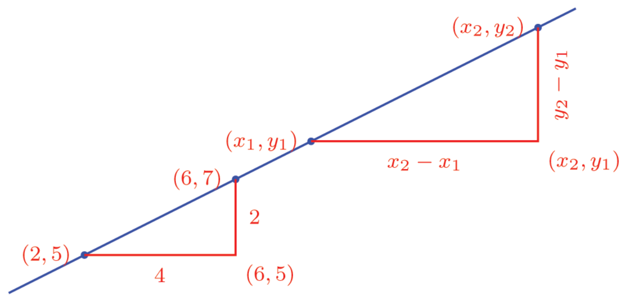




ഇത്തരമൊരു ചരിഞ്ഞ വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ബിന്ദുവിലും x-സൂചകസംഖ്യയും y-സൂചകസംഖ്യയും മാറും. ഈ മാറ്റത്തിനൊരു കണക്കുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



(2, 5), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് (x_1, y_1), (x_2, y_2); വരയുടെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങൾ കർണങ്ങളും, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ ലംബവശങ്ങളുമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളും വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ.



അപ്പോൾ

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ഇത് ഇങ്ങനെയുമെഴുതാം:

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

ഇതിൽ (x_1, y_1), (x_2, y_2) വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുമാവാം.

> (2, 5), (6, 7) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അവയുടെ y-വ്യത്യാസം, x-വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിലും പറയാം. ഈ വരയിലൂടെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു തുടങ്ങി മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലെത്തുമ്പോൾ, x- സൂചകസംഖ്യയും, y-സൂചകസംഖ്യയും മാറും; ഈ മാറ്റത്തിന്റെ കണക്ക് ഇതാണ്:

> $(2, 5), (6, 7)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y യിലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

$(2, 5), (6, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലോ?

ഉദാഹരണമായി, $(1, 4), (5, 12)$ എന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ $(1, 4)$ ൽ നിന്ന് $(5, 12)$ ലേക്ക് എത്തുമ്പോൾ, x സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടി; y സൂചകസംഖ്യ 8 ഉം. അതായത്, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് y ലെ മാറ്റം. ഈ വരയിലെ ഏതു രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലും ഇതു തന്നെയാണ് സംഭവിക്കുന്നത്:

> $(1, 4), (5, 12)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

ഈ രണ്ടു വരകളിലും x കൂടുമ്പോൾ y ഉം കൂടുന്നു. മറിച്ചും സംഭവിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $(3, 6), (7, 4)$ എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താൽ, x സൂചകസംഖ്യ 4 കൂടുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ 2 കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്; അപ്പോൾ

> $(3, 6), (7, 4)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന്റെ പകുതിയുടെ ന്യൂനമാണ്.

ഇതിലെല്ലാം പൊതുവെ കാണുന്നതെന്താണ്?

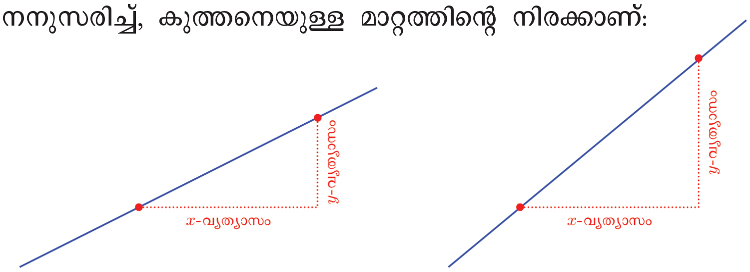
> **അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏതു വരയിലും y സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റം, x സൂചകസംഖ്യയിലെ മാറ്റത്തെ നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ്.**

ഇങ്ങനെയുള്ള മാറ്റത്തിന് ഒരു പേരുണ്ടല്ലോ:

> **അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏതു വരയിലും y ലെ മാറ്റം, x ലെ മാറ്റത്തിന് ആനുപാതികമാണ്.**

x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിൽ, y സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; അതിനാൽ, ഇത്തരമൊരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y വ്യത്യാസം 0 ആണ്. ഇത് x വ്യത്യാസത്തെ 0 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇവിടെയും y വ്യത്യാസം, x വ്യത്യാസത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. പക്ഷേ x, y മാറ്റം ആനുപാതികമല്ല.

ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ, x വ്യത്യാസമെന്നത് വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റവും y വ്യത്യാസമെന്നത് കുത്തനെയുള്ള മാറ്റവുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, വിലങ്ങനെയുള്ള മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച്, കുത്തനെയുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്:

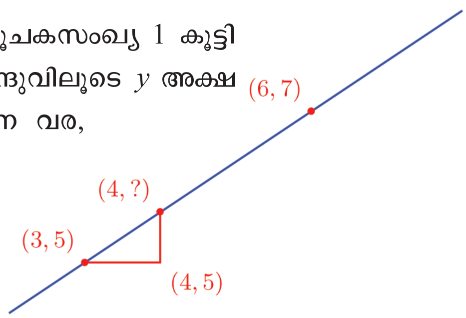


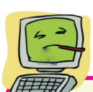
മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഒരു വരയിലെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ മാറ്റത്തിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരം, വരയുടെ ചരിവിന്റെ ഒരളവാണ്. ഈ സംഖ്യയെ വരയുടെ ചരിവ് (Slope) എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്.

രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ ആശയം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, (3, 5), (6, 7) എന്നി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കാം. ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ x മാറ്റം 3 ഉം y മാറ്റം 2 ഉം ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വരയിലെവിടെയും x മാറ്റം 3 ആകുമ്പോൾ y മാറ്റം 2 ആകും. അതായത് ഈ വരയിലെവിടെയും x സൂചകസംഖ്യ 1 മാറുമ്പോൾ, y സൂചകസംഖ്യ $\frac{2}{3}$ മാറും.

ഇനി (3, 5) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 1 കൂട്ടി 4 ആക്കിയാലോ? (4, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ആദ്യത്തെ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലോ:





ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ച ഒരു വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാൻ slope ഉപയോഗിച്ച് വരയിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ x വ്യത്യാസം 1 ആയാണ് കാണിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ y വ്യത്യാസമാണ് വരയുടെ ചരിവ്

ഈ ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 3 നോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്.

അപ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കിട്ടാൻ 5 നോട് $\frac{2}{3}$ കൂട്ടണം. അതായത്, $\left(4, 5\frac{2}{3}\right)$ ഈ വരയിലെ ബിന്ദുവാണ്.

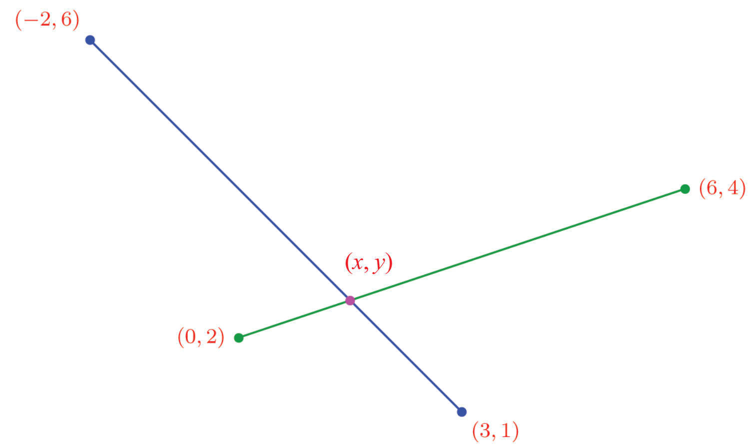
ഇതേ രീതിയിൽ, ഏതു സംഖ്യയും x സൂചകസംഖ്യയായ ഒരു ബിന്ദു ഈ വരയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ വരയിൽ x സൂചകസംഖ്യ 9 ആയ ബിന്ദു ഏതാണ്?

3 നോട് 6 കൂട്ടിയതാണ് 9; അപ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കിട്ടാൻ 5 നോട് $6 \times \frac{2}{3} = 4$ കൂട്ടണം. അതായത് (9, 9) ഈ വരയിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവാണ്.

(3, 5), (6, 7), (9, 9) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെ x സൂചകസംഖ്യകളായ 3, 6, 9 എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? y സൂചക സംഖ്യകളായ 5, 7, 9 തമ്മിലോ? ഇതുപോലെ ഈ വരയിൽ, സൂചകസംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളായ മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

രണ്ടു വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാനും ഇതേ ആശയം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി (0, 2), (6, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും, (3, 1), (−2, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുക്കാം.



അപ്പോൾ (x, y) എന്ന ബിന്ദു രണ്ടു വരയിലുമുണ്ട്. x, y മാറ്റങ്ങൾ എല്ലാ വരയിലും ആനുപാതികമായതിനാൽ, ആദ്യത്തെ വരയിൽ നിന്ന്.

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{4-2}{6-0}$$

എന്നും, രണ്ടാമത്തെ വരയിൽ നിന്ന്

$$\frac{y-1}{x-3} = \frac{6-1}{-2-3}$$

എന്നും കിട്ടും. ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$x - 3y = -6$$
$$x + y = 4$$

ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാകുന്ന സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗം ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതുപയോഗിച്ച് x ഉം y ഉം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$x = 1\frac{1}{2} \qquad y = 2\frac{1}{2}$$

അതായത്, വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണ്.

(1) (1, 3), (2, 5), (3, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) (−1, 4), (1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ഉം $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ഉം സമാന്തരശ്രേണികളാണ്. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഒരു വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

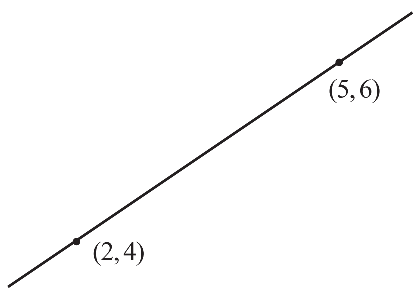
(4) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരിയിലാണെങ്കിൽ $(3x_1 + 2y_1, 3x_1 - 2y_1)$, $(3x_2 + 2y_2, 3x_2 - 2y_2)$, $(3x_3 + 2y_3, 3x_3 - 2y_3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളും ഒരേ വരയിലായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക. 3, 2 എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് പകരം മറ്റേത് രണ്ട് സംഖ്യകളെടുത്താലും ഇത് ശരിയാകുമോ?

രൂപങ്ങളും സമവാക്യങ്ങളും

(2, 4), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{6-4}{5-2} = \frac{2}{3}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ



(1, 3), (5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും (2, 4), (6, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{3}{4}$ തന്നെയാണ്. ഓരോ ജോടിയും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

ഈ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

വീണ്ടും ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$2x - 3y + 8 = 0$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കും. അതായത്,

(p, q) എന്ന സൂചകസംഖ്യകളുള്ള ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ $2p - 3q + 8 = 0$ ആയിരിക്കും

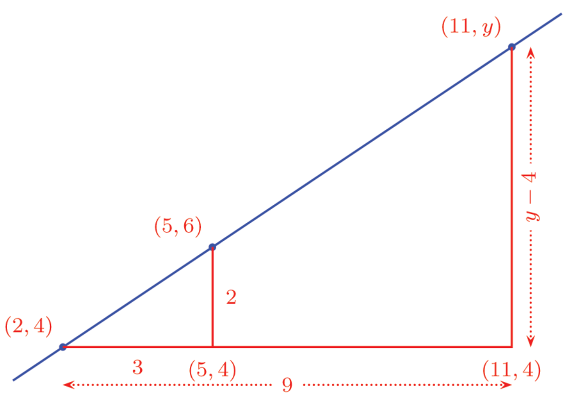
മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി സംഖ്യകളെടുത്താൽ, അവ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു ഈ വരയിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കുമോ?

ഉദാഹരണമായി, $x = 11, y = 10$ എന്നെടുത്താൽ

$$2x - 3y + 8 = 22 - 30 + 8 = 0$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $(11, 10)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണോ?

നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ $(11, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ഈ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുമല്ലോ. ഈ ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 11 തന്നെയാണ്; y സൂചകസംഖ്യ y എന്നെടുക്കാം;



ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{y-4}{11-2} = \frac{2}{3}$$

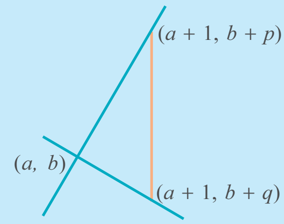
എന്നു കിട്ടും.

ഇത് ലഘൂകരിച്ചാൽ $y = 10$ എന്നു കിട്ടും. അതിനാൽ $(11, 10)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണ്.

ചരിവും ലംബവും

സമാന്തര വരകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളുടെ ചരിവുകൾ തമ്മിലെന്താണു ബന്ധം?

ചരിവുകൾ p, q ആയ രണ്ടു വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു (a, b) എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ $(a + 1, b + p)$ എന്ന ബിന്ദു, ആദ്യത്തെ വരയിലാണ്; $(a + 1, b + q)$ എന്ന ബിന്ദു രണ്ടാമത്തെ വരയിലും. (കാരണം?)



വരകൾ ലംബമാണെങ്കിൽ,

$$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$$

എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണ്; രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ് കർണം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ വർഗം $p^2 + 1$, $q^2 + 1$ എന്നിവയും, കർണത്തിന്റെ നീളം $|p - q|$ ഉം ആയതിനാൽ.

$$(p^2 + 1) + (q^2 + 1) = (p - q)^2$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$2 = -2pq$$

അഥവാ

$$pq = -1$$

അതായത്,

പരസ്പരം ലംബമായ വരകളിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, മറ്റേ വരയുടെ ചരിവിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ ന്യൂനമാണ്.

ഇനി $2p - 3q + 8 = 0$ ആകുന്ന തരത്തിൽ p, q എന്ന ഏതോ ഒരു ജോടി സംഖ്യകൾ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. $(p, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $(2, 4)$, $(5, 6)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ 2x − 3y + 8 = 0 എന്ന് എഴുതിയാൽ ഈ സമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന വര കിട്ടും. a, b, c എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിച്ച് ax + by + c = 0 എന്ന് Input Bar ൽ എഴുതുക. സ്ലൈഡറുകൾ നീക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് വരയ്ക്ക് വരുന്ന മാറ്റം നോക്കുക.

വരയുമായി (p, y) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു എന്നെടുത്താൽ, ഉദാഹരണത്തിലേതുപോലെ

$$\frac{y-4}{p-2} = \frac{2}{3}$$

എന്നു കിട്ടും. ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$y = \frac{2}{3}(p-2)+4$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കാം. ഇനി $2p - 3q + 8 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$$q = \frac{2}{3}(p-2)+4$$

എന്നുമെഴുതാം. അപ്പോൾ $y = q$ അതായത്, (p, q) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

> $(2, 4), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളായ സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും, $2x - 3y + 8 = 0$ എന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിപ്പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

> $(2, 4), (5, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $2x - 3y + 8 = 0$

ഇതുപോലെ ഏതു വരയിലെയും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, അതിന്റെ സമവാക്യം എഴുതാം.

$(0, 0), (1, 1)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം നോക്കാം. ഈ വരയിലെ ഒരു ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ,

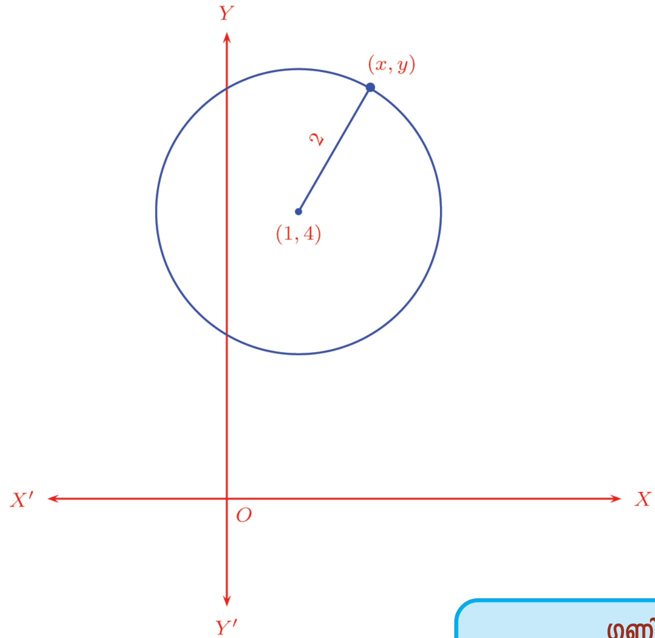
$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{1-0}$$

എന്നു കിട്ടുമല്ലോ. ഇത് ലഘൂകരിച്ചാൽ $y = x$ എന്നാകും. ഇതാണ് ഈ വരയുടെ സമവാക്യം.

ഇതിൽ നിന്ന് ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x സൂചകസംഖ്യയും y സൂചകസംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

വരകൾക്കു മാത്രമല്ല, മറ്റു ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾക്കും സമവാക്യമുണ്ടാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രം $(1, 4)$ എന്ന ബിന്ദുവും, ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം

നോക്കാം. ഈ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിനും കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും അകലം 2 ആണ്:



ഈ അകലത്തിന്റെ വർഗം $(x-1)^2+(y-4)^2$ ആണെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗമായതിനാൽ

$$(x-1)^2+(y-4)^2=4$$

വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചക സംഖ്യകൾ ഈ സമവാക്യവും അനുസരിക്കും; മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഏതു ജോടി സംഖ്യകൾ എടുത്താലും, അവ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

അങ്ങനെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം ഇതാണ്. വേണമെങ്കിൽ ഇത് വിസ്തരിച്ച്

$$x^2+y^2-2x-8y+13=0$$

എന്നും എഴുതാം.

അപ്പോൾ, കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 1 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

ഗണിതസമന്വയം

ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോടികളാക്കുന്നതിലൂടെ, ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കിയും, മറിച്ചും, പഠിക്കുന്ന രീതിയാണ് ദേക്കാർത്തേ തുടങ്ങി വച്ചത്. അതുവരെ ഗണിതത്തിലെ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ശാഖകളായിരുന്ന ബീജഗണിതത്തേയും, ജ്യാമിതിയേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന ഈ രീതിക്ക്, വിശകലനജ്യാമിതി (Analytic Geometry) എന്നാണ് പേര്.

ഗണിതചിന്തയിലും, ഗണിതം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിലുമെല്ലാം വമ്പിച്ച മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കിയ കലനം (Calculus) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ അടിസ്ഥാനം, ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള ഈ പുതിയ വീക്ഷണമാണ്. ദ്വന്ദ്വങ്ങളുടെ സമന്വയത്തിലൂടെയാണല്ലോ പുരോഗതി ഉണ്ടാകുന്നത്.

ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ (x, y) എന്നെടുത്താൽ, കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം x^2+y^2; ഇത് ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിന് തുല്യമായതിനാൽ

$$x^2+y^2=1$$

ഇതാണ് ഈ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

(1) (1, 2), (2, 4) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതിൽ x-സൂചകസംഖ്യകൾ 3, 4, 5, ... എന്നിങ്ങനെ തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എന്താണ്?

(2) (−1, 3), (2, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ, $(x + 3, \; y + 2)$ എന്ന ബിന്ദുവും ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

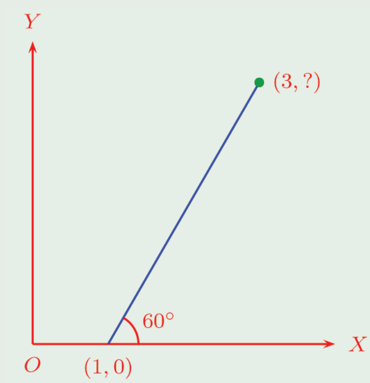
(3) x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും, $(x, 2x + 3)$ എന്ന ബിന്ദു (−1, 1), (2, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുവാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ ചരിഞ്ഞ (നീല) വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 3 ആണ്.

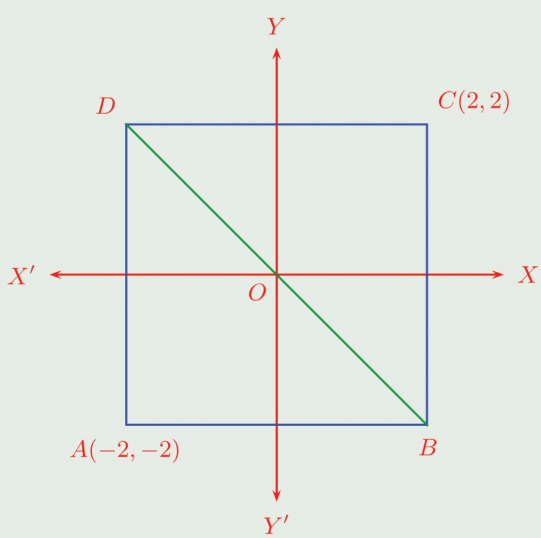
i) അതിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

ii) വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്?

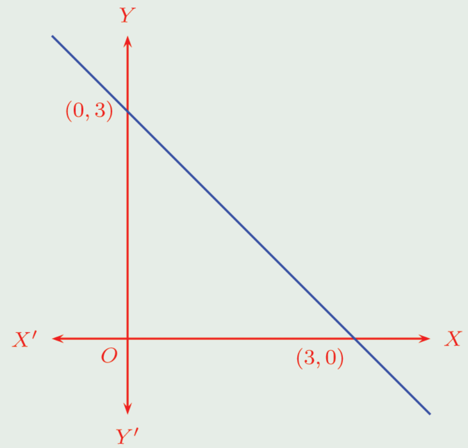
iii) വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.



(5) ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ ഒരു സമചതുരമാണ്. BD എന്ന വികർണത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവിന്റെയും x, y സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുക പൂജ്യമാണെന്ന് സമർഥിക്കുക.



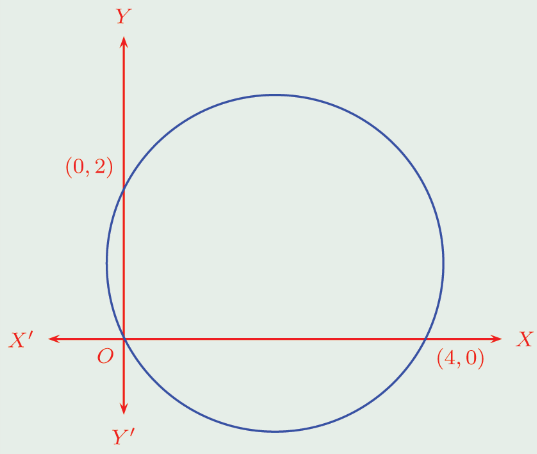
(6) ചിത്രത്തിൽ x, y അക്ഷങ്ങളെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന വരയിലെ ഏത് ബിന്ദുവിന്റെയും x, y സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുക 3 ആയിരിക്കുമെന്ന് സമർഥിക്കുക.



(7) കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും, ആരം 5 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിലെ എട്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(8) (0, 1), (2, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു (x, y) എന്നെടുത്താൽ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ വൃത്തം x അക്ഷത്തെ മുറിച്ച് കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(9) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്താണ്?



മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ x, y ഇവയെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും സമവാക്യം എഴുതിയാൽ, അത് അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്ന ചിത്രം കാണാം. ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ഓരോന്നായി അതിൽ കൊടുത്തു നോക്കൂ:

- $2x\hat{}2 + 2y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 + 3y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 - 3y\hat{}2 = 4$
- $2x\hat{}2 + 3y = 4$

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഒരു വരയിലെ ഏത് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെയും y സൂചകസംഖ്യകളിലെ മാറ്റം, x സൂചക സംഖ്യകളിലെ മാറ്റത്തിനാനുപാതികമാണെന്ന് സമർഥിക്കുന്നു.			
• രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു കേന്ദ്രവും, ഒരു നിശ്ചിത ആരവുമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്നു.			

ബഹുപദങ്ങൾ

ഘടകങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, അവയുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

x, y എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ഇതിൽ y ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്തു നോക്കാം.

x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - 1,\ x^2 - 2,\ x^2 - \frac{1}{4}$ ഇവയെല്ലാം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളാണ്, $x - 1,\ x + 1,\ x - \sqrt{2},\ x + \sqrt{2},\ x - \frac{1}{2},\ x + \frac{1}{2}$ ഇവയെല്ലാം ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളും.

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങളിലെല്ലാം, ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയിരിക്കുകയാണ്.

ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയെ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയാൽ, ഗുണിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ഘടകങ്ങൾ എന്നാണല്ലോ പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $12 = 2 \times 6$ ആയതിനാൽ, 2 ഉം, 6 ഉം 12 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. ഇതുപോലെ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ആയതിനാൽ, $x - 1$, $x + 1$ ഇവ $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദം $q(x)$, $r(x)$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെങ്കിൽ $q(x)$, $r(x)$ ഇവയെ $p(x)$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

ആണല്ലോ. അതായത്,

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

അപ്പോൾ $x-1$, $x-2$ എന്നീ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ $x^2 - 3x + 2$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

ഇതിൽ മറ്റൊരു കാര്യമുണ്ട്:

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ എന്നെഴുതിയാൽ, $p(1)$ എന്താണ്?

ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, $p(x)$ നെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതാം;

$$p(x) = (x-1)(x-2)$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$p(1) = (1-1) \times (1-2) = 0 \times (-1) = 0$$

ഇതുപോലെ $p(2) = 0$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത് $p(x) = 0$ ആകാൻ, x ആയി എടുക്കേണ്ട സംഖ്യകളാണ് 1 ഉം 2 ഉം. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, $p(x) = 0$, (അതായത് $x^2 - 3x + 2 = 0$) എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകൾ. x ആയി മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്താൽ $p(x) = 0$ കിട്ടുമോ?

$(x-1)(x-2) = 0$ ആകണമെങ്കിൽ $x-1$, $x-2$ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്ന് 0 ആകണമല്ലോ.

വേറൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം;

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

എന്നു ഗുണിച്ചെഴുതാം. മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ എന്ന മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളാണ് $x-1$, $x-2$, $x-3$ എന്നിവ.

ഇവിടെയും

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$p\,(1) = 0, p\,(2) = 0, p\,(3) = 0$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇതിലും $p\,(x) = 0$ അതായത്,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ. ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന പൊതുതത്വം എന്താണ്?

$x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ, $p\,(a) = 0$ ആണ്.

അൽപംകൂടി വിശദമായി പറഞ്ഞാൽ,

$p\,(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി

$$p\,(x) = (x - a_1)\,(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

എന്നു പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, a_1, a_2, ..., a_n എന്നീ സംഖ്യകൾ $p\,(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ്.

അപ്പോൾ ഒരു ബഹുപദസമവാക്യപ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ആ ബഹുപദത്തെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതുക എന്നതാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഈ സമവാക്യപ്രശ്നം നോക്കുക.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$x^2 - 5x + 6$ നെ രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. (രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം രണ്ടിൽക്കൂടുതലാവില്ലേ?) അപ്പോൾ,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - a)\,(x - b)$$

എന്നെഴുതിനോക്കാം. ഗുണനഫലം വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (a + b)\,x + ab$$

സമവാക്യത്തിലെ ഇരുവശത്തുമുള്ള ബഹുപദങ്ങളിലെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമാകണം, അതിന്

$$a + b = 5$$
$$ab = 6$$

എന്നു കിട്ടണം.

അതായത്, തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

അൽപം ആലോചിച്ചാൽ,

$$a = 2 \qquad b = 3$$

എന്നെടുത്താൽ ഇതു ശരിയാകുമെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ $x^2 - 5x + 6$ നെ ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം;

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ഇതിൽനിന്ന് $x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ 2 ഉം, 3 ഉം ആണെന്നു കാണാം.

മറ്റൊരു സമവാക്യപ്രശ്നം നോക്കാം:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$x^2 + 2x - 15 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ഇതിൽ

$$a + b = -2$$

$$ab = -15$$

എന്നു കിട്ടും.

3 ഉം, 5 ഉം 15 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്. ഗുണനഫലം ന്യൂനമായതിനാൽ ഒരെണ്ണം ന്യൂനമായെടുക്കണം. -3 ഉം 5 ഉം എടുത്താൽ തുക ശരിയാകില്ല. 3 ഉം, -5 ഉം ശരിയാകും.

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)\big(x - (-5)\big) = (x - 3)(x + 5)$$

അപ്പോൾ $x^2 + 2x - 15 = 0$ എന്ന സമവാക്യപ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ 3ഉം $-$ 5ഉം. ഒരു ഉദാഹരണംകൂടി:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ഇതു പരിഹരിക്കാൻ, പതിവുപോലെ

$$x^2 - x - 1 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ,

$$a + b = 1$$

$$ab = -1$$

ഇതെങ്ങനെ സാധിക്കും?

a, *b* ഇവ എണ്ണൽസംഖ്യകൾതന്നെ ആവണമെന്നില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഊഹിച്ചും തിരുത്തിയും ഇതു ചെയ്യാൻ കഴിയില്ല. മറ്റൊരു

മാർഗം നോക്കാം.

എട്ടാംക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സർവസമവാക്യം ഓർത്തെടുക്കണം.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

ഇതിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം.

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

നമ്മുടെ കണക്കിൽ $a + b = 1$, $ab = -1$ ആയതിനാൽ

$$(a-b)^2 = 1^2 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

ഇതിൽനിന്ന് $a - b = \pm\sqrt{5}$

എന്നു കിട്ടും

$a - b = \sqrt{5}$ എന്നെടുത്താൽ a, b ഇവയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും ഇങ്ങനെയാകും:

$$a + b = 1$$
$$a - b = \sqrt{5}$$

തുകയും വ്യത്യാസവും അറിയാമെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

$$a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

$a - b = -\sqrt{5}$ എന്നാണ് എടുക്കുന്നതെങ്കിലോ?

$$a = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \quad b = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

എന്നു കിട്ടും. (ചെയ്തു നോക്കൂ.) ഏതായാലും

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ $x^2 - x - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ എന്നു കാണാം.

ഇനി മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം:

$2x^2 - 7x + 6$ നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എങ്ങനെ എഴുതും?

ആദ്യം ബഹുപദത്തിനെ ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right)$$

ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $x^2 - \frac{7}{2}x + 3$ നെ രണ്ട് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം.

$$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = (x - a)(x - b)$$
$$= x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നെഴുതിയാൽ

$$a + b = \frac{7}{2}$$
$$ab = 3$$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$(a - b)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 3$$
$$= \frac{49}{4} - 12 = \frac{1}{4}$$
$$a - b = \pm\frac{1}{2}$$

$a - b = \frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ,

$$a + b = \frac{7}{2};\quad a - b = \frac{1}{2}$$

ഇതിൽ നിന്ന് $a = 2,\ b = \frac{3}{2}$ എന്നും കിട്ടും.

$a - b = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുത്താൽ, $a = \frac{3}{2},\ b = 2$ എന്നു കിട്ടും (ചെയ്തുനോക്കൂ).

എങ്ങനെയായാലും

$$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)$$

അപ്പോൾ

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)$$
$$= (2x - 3)(x - 2)$$

എല്ലാ ബഹുപദങ്ങളെയും ഇങ്ങനെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിയണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കാം. ഇത് $x - a,\ x - b$ എന്നീ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമാണെങ്കിൽ,

$$x^2 + 1 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$$a + b = 0$$

$$ab = 1$$

എന്നും കിട്ടണം. കഴിഞ്ഞ കണക്കിലെപ്പോലെ a യും b യും കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 0 - 4 = -4$$

ഒരു സംഖ്യയുടെയും വർഗം ന്യൂനസംഖ്യ ആവില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ സമവാക്യങ്ങൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ ഇല്ല.

അതായത്, $x^2 + 1$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

(1) ചുവടെയുള്ള രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക. ഓരോന്നിലും $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളും എഴുതുക.

i)	$p(x) = x^2 - 7x + 12$	ii)	$p(x) = x^2 + 7x + 12$
iii)	$p(x) = x^2 - 8x + 12$	iv)	$p(x) = x^2 + 13x + 12$
v)	$p(x) = x^2 - 2x + 1$	vi)	$p(x) = x^2 + x - 1$
vii)	$p(x) = 2x^2 - 5x + 2$	viii)	$p(x) = 6x^2 - 7x + 2$

(2) $p(1) = 0$, $p(-2) = 0$ ആകുന്ന ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) $p\left(1+\sqrt{3}\right) = 0$, $p\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$ ആകുന്ന ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4) $p(1) = 0$, $p(\sqrt{2}) = 0$, $p(-\sqrt{2}) = 0$ ആകുന്ന ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) $x^2 + x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

ബഹുപദശിഷ്ടം

$x - a$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ $p(a) = 0$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഇനി $p(x)$ എന്നൊരു ബഹുപദവും a എന്നൊരു സംഖ്യയുമെടുത്ത് $p(a)$ കണക്കാക്കിയപ്പോൾ 0 കിട്ടിയില്ലെന്നു കരുതുക. $x - a$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമല്ലെന്നു പറയാമോ?

$x - a$ ഘടകമാണെങ്കിൽ $p(a)$ പൂജ്യമാകണം. ഇവിടെ $p(a)$ പൂജ്യമല്ല; അതിനാൽ $x - a$ ഘടകവുമല്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള തത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുമ്പോൾ $p(a) \neq 0$ എങ്കിൽ, $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമല്ല.

ഉദാഹരണമായി $p(x) = x^2 - 3x + 3$ എന്നും $a = 1$ എന്നുമെടുത്താൽ $p(a) = 1$ എന്നാണ് കിട്ടുന്നത്. അപ്പോൾ $x - 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല എന്നു പറയാം.

പക്ഷേ,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ; അപ്പോൾ

$$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2) + 1$$

എന്നെഴുതാം. ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ മറ്റൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ ഘടകമല്ലെങ്കിൽ, ഗുണിതവും ശിഷ്ടവും ചേർത്ത് എഴുതുന്ന പോലെയാണിത്. 6 എന്ന സംഖ്യ 15 എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകമല്ല. എന്നാൽ

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

എന്നെഴുതാം.

എണ്ണൽസംഖ്യകളിലെപ്പോലെ ബഹുപദങ്ങളിലും ഹരണഫലം, ശിഷ്ടം എന്നുതന്നെ പറയാം. അതായത്,

$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2) + 1$ എന്നതിൽ $(x - 2)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ, $x^2 - 3x + 3$ നെ $x - 1$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഹരണഫലമെന്നും 1 എന്ന സംഖ്യയെ ഈ ഹരണത്തിലെ ശിഷ്ടമെന്നുമാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ

$$x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(x - 2) - 1$$

എന്നെഴുതാം; അപ്പോൾ $x^2 - 3x + 1$നെ $x - 1$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം $x - 2$, ശിഷ്ടം -1.

ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചപോലെതന്നെ, ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $x^2 - 3x - 10$ നെ $x - 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുള്ള ഹരണഫലം $x - a$ എന്നും ശിഷ്ടം b എന്നുമെടുക്കാം. അതായത്,

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x - a) + b$$

ആശയവും അർഥവും

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നകസംഖ്യകളും അഭിന്നകസംഖ്യകളും ഉണ്ടാക്കിയതെന്നു കണ്ടു; മാത്രമല്ല ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതികസാഹചര്യങ്ങൾ തന്നെയാണ് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾക്ക് ആധാരമെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

14 മിഠായി, 3 പേർക്കു തുല്യമായി വീതിക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, മുഴുവനായി കൊടുക്കാൻ പറ്റാതെ 2 മിഠായി ശേഷിക്കുന്നതും, 14 മീറ്റർ നീളമുള്ള ചരട്, 3 മീറ്റർ നീളമുള്ള കഷണങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, നീളം തികയാതെ 2 മീറ്ററിന്റെ ഒരു കഷണം ബാക്കി വരുന്നതുമൊക്കെയാണ്, 14 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽക്കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം 2 ആണ് എന്ന ഗണിത പ്രസ്താവനയാകുന്നത്.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കുമ്പോൾ,

-14 നെ -3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടമെന്താണ്?

എന്ന ചോദ്യത്തിനെന്താണർഥം?

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഗുണനം വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ ഇങ്ങനെയാകും.

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 - (a + 2)x + (2a + b)$$

ഇനി രണ്ടു വശത്തുള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$$a + 2 = 3$$

$$2a + b = -10$$

ഇതിൽ ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽനിന്ന് $a = 1$ എന്നും, ഇത് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച്, $b = -12$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x - 1) - 12$$

അതായത്, $x^2 - 3x - 10$ നെ $x - 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം $x - 1$, ശിഷ്ടം -12.

ശിഷ്ടമെന്നാൽ

ശിഷ്ടം എന്ന ആശയം, പൂർണസംഖ്യകൾക്കെല്ലാമായി വികസിപ്പിക്കാൻ, ആദ്യം എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽത്തന്നെ ഈ ആശയം ഗണിതപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കണം.

a എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയെ b എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂജ്യമോ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കണം
3. $r < b$ ആയിരിക്കണം

$x^2 - 3x - 10$ നെ $x - 2$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനു പകരം $x + 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - a) + b = x^2 - (a - 2)x + (b - 2a)$$

എന്നെഴുതിയാൽ,

$$a - 2 = 3$$

$$b - 2a = -10$$

ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $a = 5$ എന്നും $b = 0$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

അതായത്, $x + 2$ എന്ന ബഹുപദം $x^2 - 3x - 10$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്; വേണമെങ്കിൽ ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണെന്നു പറയാം.

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെയും ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, ഇതുപോലെ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x^3 - 2x^2 - x + 4$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 3$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം. രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഹരണഫലം $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദവും, ശിഷ്ടം b എന്ന സംഖ്യയും ആയി എടുത്താൽ ശരിയാകില്ല. $(x - 3)(x - a) + b$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം, രണ്ടല്ലേ? നമുക്കു വേണ്ട $x^3 - 2x^2 - x + 4$ ന്റെ കൃത്യങ്കം മൂന്നാണല്ലോ.

അപ്പോൾ ഹരണഫലമായി $x^2 + ax + b$ എന്ന രണ്ടാകൃതി ബഹുപദവും, ശിഷ്ടമായി, c എന്ന സംഖ്യയുമെടുത്ത്, ഇങ്ങനെ എഴുതിനോക്കാം:

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = (x - 3)(x^2 + ax + b) + c$$

സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ ഗുണനക്രിയ ചെയ്ത്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = x^3 + (a - 3)x^2 + (b - 3a)x + (c - 3b)$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$a - 3 = -2$$

$$b - 3a = -1$$

$$c - 3b = 4$$

ഇവയിലെ ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $a = 1$, അത് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലുപയോഗിച്ച് $b = 2$, അത് മൂന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച് $c = 10$ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

അതായത്,

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = (x - 3)(x^2 + x + 2) + 10$$

ഇങ്ങനെ ഏതു ബഹുപദത്തെയും $x - a$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണക്കാക്കാം.

$p(x)$ എന്നൊരു ബഹുപദവും, $x - a$ എന്ന ബഹുപദവുമെടുത്താൽ,

$$p(x) = (x - a)\,q(x) + b$$

എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ $q(x)$ എന്ന ബഹുപദവും b എന്ന സംഖ്യയും കണ്ടുപിടിക്കാം.

ശിഷ്ടം പൂർണസംഖ്യകളിൽ

എണ്ണൽസംഖ്യകളിലെ ശിഷ്ടത്തിന്റെ നിർവചനംതന്നെ അൽപം ഭേദഗതികളോടെ പൂർണസംഖ്യകളിലേക്ക് വ്യാപിപ്പിക്കാം:

a എന്ന പൂർണസംഖ്യയെ b എന്ന പൂർണസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂർണസംഖ്യകളായിരിക്കണം
3. $r = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $0 < r < |b|$ ആയിരിക്കണം

ഉദാഹരണമായി, -14, -3 എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താൽ

1. $-14 = 5 \times (-3) + 1$ എന്നെഴുതാം.
2. 5, 1 പൂർണസംഖ്യകളാണ്
3. $0 < 1 < |-3|$ ആണ്.

അതിനാൽ, -14 നെ -3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം 5, ശിഷ്ടം 1 എന്നാണ് എടുക്കുന്നത്.

ഇതിലെ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം

$$p(x) - b = (x - a)\,q(x)$$

എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദം $x - a$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഗുണിതമല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കുറച്ച് ഗുണിതമാക്കി മാറ്റാം.

ഉദാഹരണമായി $x^3 - 2x^2 + x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽനിന്ന് എന്തു സംഖ്യ കുറച്ചാലാണ് $x - 3$ ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നതെന്നു നോക്കാം.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 = (x - 3)(x^2 + ax + b) + c$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിനെ

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 - c = (x - 3)(x^2 + ax + b)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അതായത്, $x^3 - 2x^2 + x + 2$ ൽനിന്ന് c കുറച്ചാൽ, $x - 3$ ന്റെ ഗുണിതമാകും. അപ്പോൾ c ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട സംഖ്യ. മുമ്പ് ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം a, പിന്നെ b, അവസാനം c എന്നിങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം. നേരിട്ട് c കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്. മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും, സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തുമുള്ള സംഖ്യകൾ തുല്യമാകണം.

വലതുവശം പൂജ്യമാക്കിയാലോ?

അതിന് $x = 3$ എന്നെടുത്താൽപ്പോരേ?

$$3^3 - (2 \times 3^2) + 3 + 2 - c = (3 - 3) \times (x^2 + a \times 3 + b) = 0$$

ഇതു ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ

$$14 - c = 0$$

$$c = 14$$

അപ്പോൾ $x^3 - 2x^2 + x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്ന് 14 കുറച്ചാൽ $x - 3$ ന്റെ ഗുണിതമാകും; അതായത്, $x^3 - 2x^2 + x - 12$ എന്ന ബഹുപദം, $x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്.

ഒരു ബഹുപദത്തിനെ $x - a$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം മാത്രം കണക്കാക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കുമെന്നു നോക്കാം.

ഹരണഫലം ആവശ്യമില്ലാത്തതിനാൽ, അത് $q(x)$ എന്നുതന്നെ എഴുതാം, ശിഷ്ടം b എന്നുമെടുത്താൽ,

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5 = (x - 2)\, q(x) + b$$

b മാത്രമാണ് വേണ്ടത്; അതിനാൽ ഈ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം.

$$b = (x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 5) - (x - 2)\, q(x)$$

ഇതിൽ $x = 2$ എന്നെടുത്താൽ

$$b = (2^4 + (2 \times 2^3) - (6 \times 2^2) + 2 + 5) - (2 - 2) \times q(2) = 15$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, ശിഷ്ടം 15.

ഈ രീതി പൊതുവായി എഴുതി നോക്കാം. $p(x)$ നെ $x - a$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം കാണാൻ

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + b$$

എന്നെഴുതാം.

ഇനി സമവാക്യം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതുക

$$b = p(x) - (x - a)\, q(x)$$

ഇതിൽ $x = a$ എന്നെടുത്താൽ

$$b = p(a) - (a - a)\,(q(a)) = p(a)$$

എന്നും കിട്ടും. അതായത്,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $x - a$ എന്ന ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $p(a)$ എന്ന സംഖ്യയാണ്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ നെ $x + 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം $x + 2 = x - (-2)$ എന്നെഴുതാം. ഇനി മുകളിലെഴുതിയ തത്വമനുസരിച്ച്, ശിഷ്ടം കിട്ടാൻ ആദ്യത്തെ ബഹുപദത്തിൽ $x = -2$ എന്നെടുത്താൽ മതി. അതായത്, ശിഷ്ടം.

$$(-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 5 = -8 - 8 + 8 + 5 = -3$$

ഹരിക്കുന്നത് $2x - 1$ കൊണ്ടാണെങ്കിലോ?

ആദ്യം

$$2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

എന്നെഴുതാം. ഇനി $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ നെ $x - \frac{1}{2}$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ ബഹുപദത്തിൽ $x = \frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കുക.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 2 + 5 = 2\frac{5}{8}$$

$x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ നെ $x - \frac{1}{2}$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $2\frac{5}{8}$ ആയതിനാൽ,

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right) q(x) + 2\frac{5}{8}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതൽപ്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കാം

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = \frac{1}{2}\,(2x - 1)\, q(x) + 2\frac{5}{8}$$

ഇനി $\frac{1}{2} q(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $r(x)$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഇത് ഇങ്ങനെയാകും

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)\, r(x) + 2\frac{5}{8}$$

അതായത്, $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ നെ $2x - 1$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടവും

$2\frac{5}{8}$ തന്നെയാണ്.

ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം മറ്റൊരു ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നറിയാനും മുകളിലെഴുതിയ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം പൂജ്യമായാൽ ഘടകമാണല്ലോ. പൊതുതത്വമനുസരിച്ച് $p(x)$ നെ $x - a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $p(a)$ ആണ്. അപ്പോൾ $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ x ആയി a എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുമ്പോൾ $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

$x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ $p(a) = 0$ ആണെന്ന് ആദ്യംതന്നെ കണ്ടുവല്ലോ. ഇപ്പോൾ ആ തത്വത്തിന്റെ മറുതത്വവുമായി.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $ax + b$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും? $ax + b$ ഘടകമാണോ എന്ന് എങ്ങനെ പരിശോധിക്കും?

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും, ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഘടകമല്ലെങ്കിൽ ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക.

i) $x - 1,\ x^3 + 4x^2 - 3x - 6$ ii) $x + 1,\ x^3 + 4x^2 - 3x - 6$

iii) $x - 2,\ x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ iv) $x + 2,\ x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

v) $2x - 1,\ 2x^3 - x^2 - 8x + 6$ vi) $3x - 1,\ 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$

(2) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും, ആദ്യത്തേതിനെ രണ്ടാമത്തേതുകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കണക്കാക്കുക.

i) $x^3 - 1,\ x - 1$ ii) $x^3 - 1,\ x + 1$

iii) $x^3 + 1,\ x - 1$ iv) $x^3 + 1,\ x + 1$

(3) $p(x) = x^3 + x^2 + x$ എന്ന ബഹുപദവും ഒരു സംഖ്യയും കൂട്ടി $q(x)$ എന്ന ബഹുപദം ഉണ്ടാക്കണം.

i) $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $q(x)$ ന്റെ ഘടകമാകാൻ കൂട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

ii) $x + 1$ എന്ന ബഹുപദം $q(x)$ ന്റെ ഘടകമാകണമെങ്കിൽ, കൂട്ടുന്ന സംഖ്യ എന്തായിരിക്കണം?

(4) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും n ഏതുതരം എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലാണ് ആദ്യത്തെ ബഹുപദം രണ്ടാമത്തെ ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാകുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $x-1, x^n-1$ ii) $x-1, x^n+1$ iii) $x+1, x^n-1$

iv) $x+1, x^n+1$ v) x^2-1, x^n-1

(5) ax^3+bx^2+cx+d എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് x^2-1 എങ്കിൽ $a=-c;\ b=-d$ ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(6) $2x^3-3x^2+5x+1$ ന്റെ കൂടെ ഏത് ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദം കൂട്ടിയാൽ, തുക x^2-1 ഘടകമായ ബഹുപദമായി മാറും?

x^2-4 ന്റെ ഗുണിതമായ ഒരു മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ഗുണകങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? x^2-4 നു പകരം x^2-9 ആയാലോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു, ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുന്നു. • $x-a, x+a$ എന്നിവ $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കാനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു. • ഒരു ബഹുപദത്തെ ഒന്നാം കൃതി ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം ഹരിച്ച് നോക്കാതെ കണക്കാക്കുന്നു.			

11 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ശരിയല്ലാത്ത ശരാശരി

അടുത്തടുത്തു താമസിക്കുന്ന 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം ഇങ്ങനെയാണ്.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

ഇക്കൂട്ടത്തിന്റെ മാധ്യവരുമാനം എത്ര രൂപയാണ്?

വരുമാനമെല്ലാം കൂട്ടി, 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, മാധ്യം 19285 രൂപയെന്നു കിട്ടും.

ഇനി ഈ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ വിശദവിവരങ്ങൾക്കു പകരം, മാധ്യമായ തുക മാത്രം കിട്ടിയാലും ഇവരുടെ മൊത്തത്തിലുള്ള സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി ചിലതെല്ലാം പറയാം;

- ഇവരുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം 19285 രൂപയോട് ഏറെക്കുറെ അടുത്ത തുകകളാണ്.
- ആരുടെയും മാസവരുമാനം 19285 രൂപയിൽനിന്ന് ഏറെക്കൂടുതലോ കുറവോ അല്ല.
- 19285 രൂപയിൽക്കൂടുതൽ മാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും, ഈ തുകയേക്കാൾ കുറഞ്ഞമാസവരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണവും ഏറെക്കുറെ തുല്യമാണ്.

ഇവരുടെ അടുത്തുതന്നെ 175000 രൂപ മാസവരുമാനമുള്ള ഒരാൾ കൂടി താമസമാക്കിയെന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാധ്യവരുമാനം എന്തായി?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} \approx 33441 \text{ രൂപ}$$

ഇനി ഈ വിവരങ്ങളൊന്നും പറയാതെ, ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ മാധ്യം മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെയെല്ലാം മാസവരുമാനം ഏതാണ്ട്

30000 രൂപയാണെന്ന തെറ്റായ ധാരണ ഉണ്ടാകില്ലേ? ഈ സംഖ്യ, ഇതിലെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെയും മാസവരുമാനത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങോളമാണ്.

ഒരു കാര്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള കുറേ സംഖ്യകളെ, പൊതുവായ ധാരണ നൽകാൻ പറ്റിയ ഒരു സംഖ്യയായി ചുരുക്കുക എന്നതാണല്ലോ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നതിന്റെ ഉദ്ദേശം. പക്ഷേ കൂട്ടത്തിലെ മറ്റു സംഖ്യകളേക്കാൾ വളരെ വലുതോ, തീരെ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ (എണ്ണത്തിൽ കുറവായിരുന്നാൽപ്പോലും) മാധ്യത്തെ വളരെയധികം സ്വാധീനിക്കും.

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിൽ, ആദ്യത്തെ പത്തു സംഖ്യകളെക്കാൾ വളരെ വലിയ ഒരേയൊരു സംഖ്യയാണ്, മാധ്യത്തെ വല്ലാതെ മാറ്റിക്കളഞ്ഞത്. ഇതുപോലെ വളരെ വലുതോ ചെറുതോ ആയ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തെ സംബന്ധിച്ച പൊതുധാരണ തെറ്റിക്കുന്ന മറ്റു സന്ദർഭങ്ങൾ പറയാമോ?

മറ്റൊരു ശരാശരി

നമ്മുടെ ഉദാഹരണത്തിലെ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനത്തെക്കുറിച്ച് ശരിയായ സൂചന നൽകുന്ന മറ്റൊരു സംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

വരുമാനങ്ങളെല്ലാം സംഖ്യകളുടെ വലുപ്പക്രമത്തിലെഴുതി, നടുക്കുള്ള സംഖ്യ എടുത്താൽ, 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിനേക്കാൾ കുറവും, വേറെ 5 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം അതിൽ കൂടുതലും ആയിരിക്കുമല്ലോ.

ആദ്യം സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതാം.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

ഇതിൽ നടുക്കുള്ള സംഖ്യ 19500. ഇതിനെ മുകളിലെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ മധ്യമം (median) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അതായത്, ഈ 11 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം 19500 രൂപയാണ്.

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം, ആകെയുള്ള 11 കുടുംബങ്ങളിൽ 5 എണ്ണത്തിന്റെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കുറവും 5 എണ്ണത്തിന്റെ മാസവരുമാനം 19500 നേക്കാൾ കൂടുതലുമാണ്, അതായത് മധ്യമവരുമാനത്തെക്കാൾ കുറഞ്ഞ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും, മധ്യമത്തെക്കാൾ കൂടിയ വരുമാനമുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്.

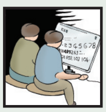
ഇനി ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങൾ മാത്രമെടുത്താലോ? ഇവയുടെ മാസവരുമാനം മാത്രം ക്രമമായെഴുതിയാൽ, നടുക്ക് ഒരു സംഖ്യയ്ക്കു പകരം, 18600, 19500 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വരും.

ഇവിടെയും മധ്യമമായെടുക്കേണ്ടത്, അതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞവയുടെ എണ്ണവും, അതിനേക്കാൾ കൂടിയവയുടെ എണ്ണവും തുല്യമാകുന്ന തരത്തിലാണ്. 18600 നും 19500 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകും. സാധാരണയായി ഇവയുടെ തുകയുടെ പകുതിയാണ് മധ്യമമായി

എടുക്കുന്നത്, അതായത്, ആദ്യത്തെ 10 കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ മാസവരുമാനം $\frac{1}{2}$ (18600 + 19500) = 19050 രൂപ

മധ്യമമായ 19050 രൂപ എന്നത്, മാധ്യമായ 19285 രൂപ എന്നതുപോലെതന്നെ ആദ്യത്തെ പത്തു കുടുംബങ്ങളുടെ സാമ്പത്തികസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ ധാരണ തരുന്നുണ്ടല്ലോ (മാധ്യവും മധ്യമവും തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലതാനും).

പതിനൊന്നാമത്തെ കുടുംബത്തിന്റെ വലിയ വരുമാനം മധ്യമത്തിൽ വലിയ മാറ്റമുണ്ടാക്കുന്നില്ല എന്നതാണ് ഇവിടെ പ്രധാനം. മാത്രമല്ല, കുറേ കുടുംബങ്ങളുടെ മധ്യമ വരുമാനം 19050 രൂപ, അതിലൊരു കുടുംബത്തിന്റെ മാസവരുമാനം 21000 രൂപ എന്നുമാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ഇവയിലെ പകുതിയിലേറെ കുടുംബങ്ങളേക്കാൾ വരുമാനം ഇപ്പറഞ്ഞ കുടുംബത്തിനുണ്ടെന്നും മനസിലാക്കാം.



(1) ലോങ്ജമ്പ് പരിശീലനത്തിൽ ഒരാൾ ചാടിയ ദൂരങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

ദൂരമെല്ലാം മീറ്ററിലാണ്. ഇവയുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും കണ്ടുപിടിക്കുക. അവ തമ്മിൽ വലിയ വ്യത്യാസമില്ലാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(2) കേരളത്തിലെ വിവിധ ജില്ലകളിൽ 2015 സെപ്റ്റംബർ മാസത്തിലെ ഒരാഴ്ച പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് സെന്റിമീറ്ററിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ജില്ല	മഴയുടെ അളവ് (മി.മീ)
കാസർഗോഡ്	66.7
കണ്ണൂർ	56.9
കോഴിക്കോട്	33.5
വയനാട്	20.5
മലപ്പുറം	13.5
പാലക്കാട്	56.9
തൃശ്ശൂർ	53.4
എറണാകുളം	70.6
കോട്ടയം	50.3
ഇടുക്കി	30.5
പത്തനംതിട്ട	56.4
ആലപ്പുഴ	45.5
കൊല്ലം	56.3
തിരുവനന്തപുരം	89.0

ഈ ആഴ്ചയിൽ കേരളത്തിലെ മഴയുടെ മാധ്യവും മധ്യമവും കണക്കാക്കുക. മധ്യമത്തേക്കാൾ മാധ്യം കുറഞ്ഞത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

(3) സമാന്തരശ്രേണിയിലായ കുറേ സംഖ്യകളുടെ മധ്യമവും മാധ്യവും തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ആവൃത്തിയും മധ്യമവും

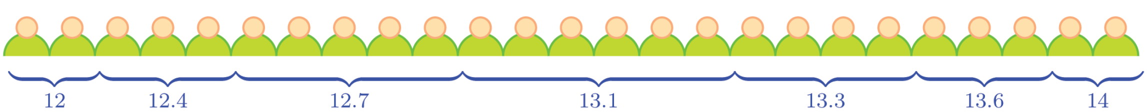
രക്തത്തിലെ ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ്, സാധാരണയായി ഒരു ഡെസിലിറ്ററിൽ (അതായത് 100 മില്ലിലിറ്റർ) എത്ര ഗ്രാം എന്ന തോതിലാണ് പറയുന്നത്. 25 കുട്ടികളുടെ രക്തപരിശോധന നടത്തി, ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവനുസരിച്ച് തരം തിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെലി)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

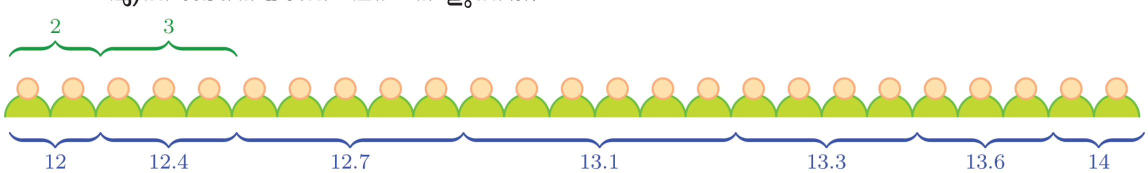
ഇതിൽനിന്നും ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവിന്റെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. മധ്യമം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

നടുക്കു വരുന്നതാണ് മധ്യമം; അതായത്, ഈ പട്ടികയിലെ 25 കുട്ടികളിൽ, 12 പേരുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് മധ്യമത്തെക്കാൾ കുറവായിരിക്കണം; 12 കുട്ടികളുടേത് കൂടുതലും.

ഇതു കണക്കാക്കാൻ, അളവുകളുടെ ക്രമത്തിൽ കുട്ടികളെ നിരത്തി നിർത്തി, പതിമൂന്നാമത്തെ കുട്ടിയുടെ അളവ് എടുത്താൽ മതി. ഇങ്ങനെ നിർത്തുന്നതായി സങ്കൽപ്പിച്ചുനോക്കൂ.

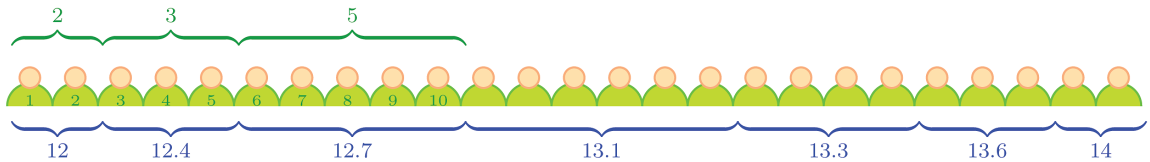


ആദ്യത്തെ 2 കുട്ടികൾക്ക് ഹീമോഗ്ലോബിൻ 12, അടുത്ത 3 കുട്ടികൾക്ക് 12.4 എന്നിങ്ങനെയാണ് വരി നീളുന്നത്.



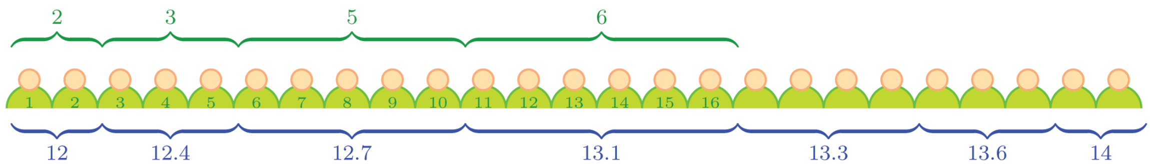
നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണല്ലോ; പട്ടികയിലെ എണ്ണം കൂട്ടിക്കൂട്ടി ഹീമോഗ്ലോബിൻ ശ്രേണിയിൽ ഇയാളുടെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യത്തെ രണ്ടു കൂട്ടത്തിലെ 2 + 3 = 5 കുട്ടികളെ എടുക്കുമ്പോൾ, അളവ് 12.4 വരെയായി, അതായത്, 5-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.4.

വീണ്ടും അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 5 കുട്ടികളെയും കൂട്ടിയാൽ 5 + 5 = 10 കുട്ടികളായി, അളവ് 12.7 ൽ എത്തും.

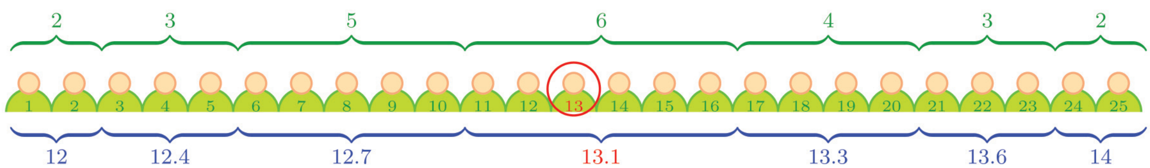


അതായത് 10-ാം കുട്ടിയുടെ അളവ് 12.7

ഇനി അടുത്ത കൂട്ടത്തിലെ 6 കുട്ടികളെക്കൂടി കൂട്ടിയാൽ 10 + 6 = 16 കുട്ടികളായി.



നമുക്കു വേണ്ടത് 13-ാം കുട്ടിയുടെ അളവാണ്. വരിയിലെ 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ അളവ് 13.1 ആണല്ലോ, അപ്പോൾ 13-ാം കുട്ടിയുടെ ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവും 13.1 തന്നെ. ഇതുതന്നെയാണ് അളവുകളുടെ മധ്യമവും.



ചിത്രത്തിനു പകരം ഇതൊരു പട്ടികയാക്കാം.

ഹീമോഗ്ലോബിന്റെ അളവ് (ഗ്രാം/ഡെലി)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
12.0 വരെ	2
12.4 വരെ	5
12.7 വരെ	10
13.1 വരെ	16
13.3 വരെ	20
13.6 വരെ	23
14.0 വരെ	25

പട്ടികയിൽ നിന്നും 11 മുതൽ 16 വരെയുള്ള സ്ഥാനങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ

ഹീമോഗ്ലോബിൻ അളവ് 13.1 ആണെന്നു കാണാം. മൊത്തം കുട്ടികളുടെ നടുക്കുള്ള 13-ാം സ്ഥാനക്കാരനും ഇക്കൂട്ടത്തിലായതിനാൽ, മധ്യമം 13.1 എന്നു കണക്കാക്കാം.

(1) ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ, ഒരു പ്രദേശത്തെ 35 കുടുംബങ്ങളെ മാസ വരുമാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു:

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
4000	3
5000	7
6000	8
7000	5
8000	5
9000	4
10000	3

മധ്യമവരുമാനം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലിചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണം ദിവസക്കൂലിയനുസരിച്ച് എഴുതിയ പട്ടികയാണിത്.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
400	2
500	4
600	5
700	7
800	5
900	4
1000	3

ദിവസക്കൂലിയുടെ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) ഒരു ആശുപത്രിയിൽ, ഒരാഴ്ച പിറന്ന കുട്ടികളെ ഭാരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ശിശുക്കളുടെ എണ്ണം
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

വിഭാഗങ്ങളും മധ്യമവും

ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഉയരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഉയരം (സെ.മീ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
135 – 140	5
140 – 145	8
145 – 150	12
150 – 155	11
155 – 160	5
160 – 165	4
ആകെ	**45**

ഈ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ മധ്യമ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഉയരക്രമത്തിൽ കുട്ടികളെ നിർത്തിയാൽ നടുക്കു വരുന്ന കുട്ടിയുടെ ഉയരമാണ് വേണ്ടത്, ആകെ 45 കുട്ടികളുണ്ട്; നടുക്കു വരുന്നത്, 23-ാം കുട്ടി.

പട്ടികയിൽ ഉയരങ്ങളെ പലതായി ഭാഗിച്ചതിൽ ഏതു വിഭാഗത്തിലാണ് 23-ാം കുട്ടി എന്ന് ആദ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഓരോ വിഭാഗത്തിലുമുള്ളവരെ ചേർക്കുമ്പോൾ ആകെ എത്ര കുട്ടികളാകുമെന്നു നോക്കാം.

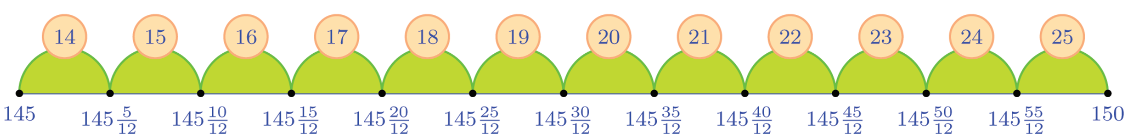
ഉയരം	എണ്ണം
140 നേക്കാൾ കുറവ്	5
145 നേക്കാൾ കുറവ്	13
150 നേക്കാൾ കുറവ്	25
155 നേക്കാൾ കുറവ്	36
160 നേക്കാൾ കുറവ്	41
165 നേക്കാൾ കുറവ്	45

പട്ടികയനുസരിച്ച് 145 സെന്റിമീറ്റർവരെ ഉയരമുള്ളവരെ ഒന്നിച്ചെടുക്കുമ്പോൾ, വരിയിലെ 13-ാം കുട്ടിവരെയായി. 150 സെന്റിമീറ്റർവരെ ഉയരമുള്ളവരെ ക്കൂടി ചേർത്തപ്പോൾ 25-ാം കുട്ടിവരെയായി. ഈ രണ്ടു കുട്ടികൾക്കിടയി ലാണല്ലോ നമുക്കുവേണ്ട 23-ാം കുട്ടി. അപ്പോൾ, ഇയാളുടെ ഉയരം 145 സെന്റിമീറ്ററിനും 150 സെന്റിമീറ്ററിനും ഇടയിലാണെന്നും കിട്ടി.

ഉയരം കൃത്യമാക്കാൻ എന്തു ചെയ്യും?

14-ാം കുട്ടി മുതൽ 25-ാം കുട്ടി വരെയുള്ള 12 പേരുടെ ഉയരം 145 സെന്റിമീ റ്ററിനും 150 സെന്റിമീറ്ററിനും ഇടയിലാണ് എന്നല്ലാതെ ഇക്കൂട്ടത്തിലെ ഓരോ കുട്ടിയുടെയും ഉയരം അറിയില്ലല്ലോ.

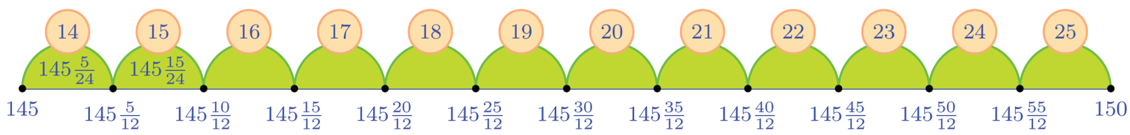
അപ്പോൾ ചില സങ്കൽപങ്ങൾ വേണ്ടിവരും (വിഭാഗപ്പട്ടികയിൽനിന്ന് മാധ്യം കണക്കാക്കാനും ചില സങ്കൽപങ്ങൾ വേണ്ടിവന്നല്ലോ) 145 സെന്റിമീറ്റർ മുതൽ 150 സെന്റിമീറ്റർ വരെയുള്ള 5 സെന്റിമീറ്ററിനെ 12 സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ഓരോ ഭാഗത്തിലും ഒരു കുട്ടി എന്നെടുക്കാം.



ഇതിലോരോ ഉപവിഭാഗത്തിലെയും കുട്ടിയുടെ ഉയരം ഈ ഉപവിഭാഗ ത്തിന്റെ കൃത്യം നടുവിലാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ 14-ാം കുട്ടി യുടെ ഉയരം 145 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, $145\frac{5}{12}$ സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും ഒത്ത നടുക്ക്. അതായത്, $145\frac{5}{24}$ സെന്റിമീറ്റർ.

അടുത്ത കുട്ടിയുടെയോ?

$145\frac{5}{12}$ സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $145\frac{10}{12}$ സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും നടുക്ക്, അതായത് $145\frac{15}{24}$ സെന്റിമീറ്റർ



തുടർന്നുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും ഉയരം കണക്കാക്കാമോ? ഉയരം കൂടുന്നതിന്റെ തോതെന്താണ്? ഇതുവരെ കണക്കാക്കിയതെല്ലാം നോക്കാം.

- 14 -ാം കുട്ടിയുടെ ഉയരം $145\frac{5}{24}$
- തുടർന്നുള്ള ഓരോ കുട്ടിയുടെയും ഉയരം $\frac{5}{12}$ സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂടുന്നു.
- 14 -ാം കുട്ടിയിൽ നിന്ന് 23-ാം കുട്ടിയിലെത്തുമ്പോൾ ആകെ 9 കുട്ടികൾ

അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയായില്ലേ?

14 -ാം പദം $145\frac{5}{24}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{5}{12}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 23-ാം പദമെന്താണ്?

23-ാം കുട്ടിയുടെ ഉയരം

$$145\frac{5}{24} + \left(9\times\frac{5}{12}\right) = 145 + \frac{95}{24} = 148\frac{23}{24} \approx 148.9 \text{ സെന്റിമീറ്റർ}$$

പടമൊന്നും വരയ്ക്കാതെ ഇതുപോലൊരു കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം. ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പണിയെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം, പ്രായമനുസരിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തിയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
25 – 30	6
30 – 35	8
35 – 40	12
40 – 45	20
45 – 50	16
50 – 55	6
ആകെ	68

മധ്യമപ്രായം കണക്കാക്കണം. ഇതിൽ ആളുകളുടെ എണ്ണം 68 എന്ന ഇരട്ട സംഖ്യ ആയതിനാൽ, ആളുകളെ പ്രായമനുസരിച്ച് ക്രമപ്പെടുത്തി, 34, 35 സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്നവരുടെ പ്രായത്തിന്റെ തുകയുടെ പകുതി എടുക്കണം. ആദ്യം കൂട്ടാവൃത്തികളെഴുതാം.

പ്രായം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
30 നേക്കാൾ കുറവ്	6
35 നേക്കാൾ കുറവ്	14
40 നേക്കാൾ കുറവ്	26
45 നേക്കാൾ കുറവ്	46
50 നേക്കാൾ കുറവ്	62
55 നേക്കാൾ കുറവ്	68

ഇതനുസരിച്ച്, പ്രായക്രമത്തിൽ 27 മുതൽ 46 വരെയുള്ള സ്ഥാനത്തു വരുന്ന 20 പേർ, 40 നും 45നും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ളവരാണ്. നമുക്കാവശ്യമായ 34 ഉം 35ഉം സ്ഥാനത്തുള്ളവർ ഇക്കൂട്ടത്തിലാണല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ 40 മുതൽ 45 വരെയുള്ള 5 വർഷത്തെ 20 സമ ഭാഗങ്ങളാക്കി, ഈ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിലും ഒരാൾ വീതമുണ്ടെന്നും, അത്തരമൊരാളുടെ പ്രായം ഉപവിഭാഗത്തിന്റെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ ഓരോ ഉപവിഭാഗത്തിന്റെയും നീളം $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ വർഷം.

ഇതനുസരിച്ച് 27-ാം സ്ഥാനത്തുള്ള ആളുടെ പ്രായം, 40 വർഷത്തിന്റെയും $40\frac{1}{4}$ വർഷത്തിന്റെയും നടുക്ക്; അതായത് $40\frac{1}{8}$ വർഷം. തുടർന്നുള്ള ഓരോരുത്തരുടെയും പ്രായം $\frac{1}{4}$ വർഷം വീതം കൂടുമെന്നാണ്. സങ്കൽപം, അപ്പോൾ 34-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം.

$$40\frac{1}{8} + \left(7\times\frac{1}{4}\right) = 40 + \frac{15}{8} = 41\frac{7}{8} \text{ വർഷം}$$

35-ാം സ്ഥാനത്തുള്ളയാളുടെ പ്രായം

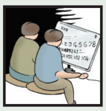
$$41\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = 42\frac{1}{8} \text{ വർഷം}$$

ഇനി മധ്യമപ്രായം കിട്ടാൻ, ഈ പ്രായങ്ങളുടെ തുകയുടെ പകുതി എടുക്കണം

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{7}{8}+42\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

അങ്ങനെ മധ്യമപ്രായം 42 എന്നു കാണാം.

?



(1) ഒരു പ്രദേശത്തെ കുറേ വീടുകളെ വൈദ്യുതി ഉപയോഗമനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച പട്ടിക ഇങ്ങനെയാണ്.

വൈദ്യുതി ഉപയോഗം (യൂണിറ്റ്)	വീടുകളുടെ എണ്ണം
80 – 90	3
90 – 100	6
100 – 110	5
110 – 120	8
120 – 130	9
130 – 140	4

വൈദ്യുതി ഉപയോഗത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ കണക്കു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച മാർക്ക് അനുസരിച്ച് എണ്ണംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
0 – 10	4
10 – 20	10
20 – 30	12
30 – 40	9
40 – 50	5

ക്ലാസിലെ മധ്യമ മാർക്ക് കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ ഉദ്യോഗസ്ഥർ ഒരു വർഷം കൊടുത്ത ആദായ നികുതിയുടെ പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ആദായ നികുതി (രൂപ)	ഉദ്യോഗസ്ഥരുടെ എണ്ണം
1000 – 2000	8
2000 – 3000	10
3000 – 4000	15
4000 – 5000	18
5000 – 6000	22
6000 – 7000	8
7000 – 8000	6
8000 – 9000	3

ആദായനികുതിയുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ഒരു കൂട്ടം അളവുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് മാധ്യം ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയാത്ത സന്ദർഭങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.			
• ഒരു കൂട്ടം അളവുകളുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വിഭാഗ പട്ടികയിൽ നിന്നും മധ്യമം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം വിശദീകരിക്കുന്നു.			