സ്റ്റാൻഡേർഡ് VII

ഗണിതം

ഭാഗം - 2

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2016

KT- 513-1/Maths (M)-7(Vol-2)

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛ്വല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
E-mail : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2014, Reprint : 2016
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ഗണിതത്തിൽ കുറെയേറെക്കാര്യങ്ങൾ
നാം മനസ്സിലാക്കി.
ഇനി അതിന്റെ ഉയർന്നതലങ്ങളിലേക്ക്
നാം കടക്കുകയാണ്;
സംഖ്യാപ്രത്യേകതകൾ നിറഞ്ഞ
അങ്കഗണിതത്തിന്റെ ലോകത്തേക്ക്,
ജ്യാമിതിയുടെയും ബീജഗണിതത്തിന്റെയും
പുതിയ തലങ്ങളിലേക്ക്,
ഗണിതത്തിന്റെ യുക്തി തിരിച്ചറിയാനും
പുതിയ കണ്ടെത്തലുകൾ നടത്താനും.

ആത്മവിശ്വാസത്തോടെ മുന്നോട്ടു പോകാം.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചന

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

അനിൽകുമാർ എം.കെ.
എച്ച്.എസ്.എ. എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.
എസ്.എസ്. വയനാട്

അരുൺലാൽ എം.ജെ.
യു.പി.എസ്.എ. എ.യു.പി.എസ്.
എരമംഗലം, കോഴിക്കോട്

കുഞ്ഞബ്ദുള്ള എം.
യു.പി.എസ്.എ., മുയിപ്പോത്ത്
എം.യു.പി.എസ്, കോഴിക്കോട്

തുളസീധരൻ പിള്ള കെ.ജി.
പി.ഡി. ടീച്ചർ, ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കരുകോൺ, കൊല്ലം

ബാലഗംഗാധരൻ വി.കെ.
ജി.എം.എച്ച്.എസ്.എസ്., കാലിക്കറ്റ്
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ക്യാമ്പസ്, മലപ്പുറം

മണികണ്ഠൻ കെ.ഒ.വി.
യു.പി.എസ്.എ., പാട്ടിയമ്മ. എ.യു.പി.എസ്,
കണ്ണൂർ

രാജേഷ് കെ.പി.
ലക്ചറർ, ഡയറ്റ്, കണ്ണൂർ

രാമാനുജം ആർ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി, എം.എൻ.കെ.എം.ജി.എച്ച്.
എസ്.എസ്, പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

സുനിൽകുമാർ വി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ., ജനത എച്ച്.എസ്.എസ്
തേമ്പാംമൂട്, തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. കൃഷ്ണൻ ഇ.
പ്രൊഫസർ (റിട്ട.), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. വിജയകുമാർ എ.
പ്രൊഫസർ, കൊച്ചി സർവകലാശാല, കൊച്ചി

ചിത്രകാരൻ

ധനേശൻ എം.വി.
എ.വി.എസ്.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്, കരിവള്ളൂർ, കണ്ണൂർ

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

സുജിത് കുമാർ. ജി
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഡോ. ലിഡ്സൺരാജ് ജെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഉള്ളടക്കം

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ICT സാധ്യത

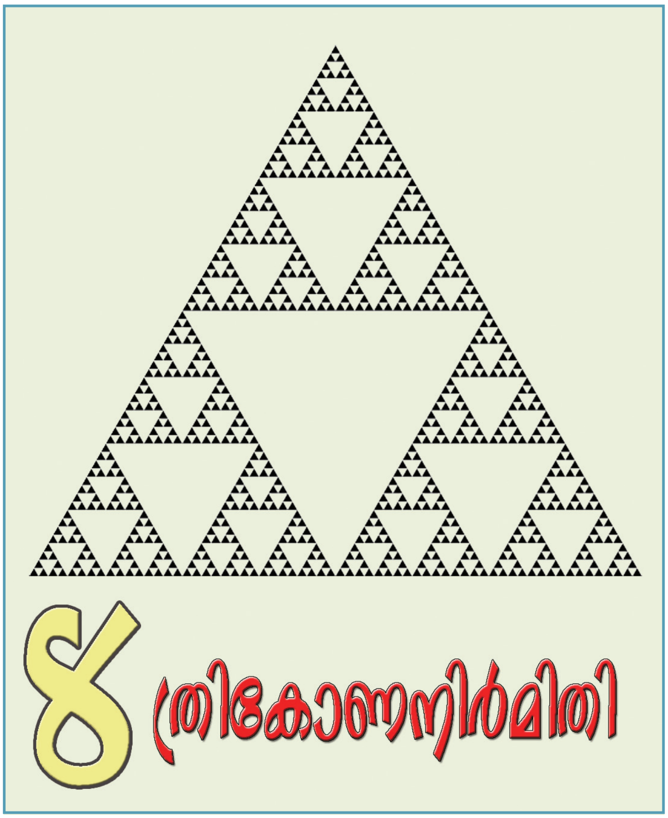
കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം

പ്രോജക്ട്

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

8

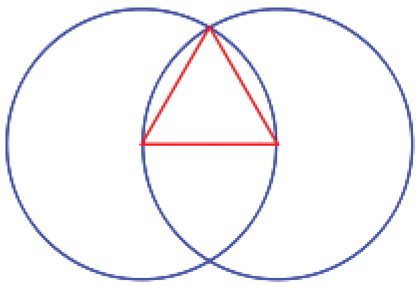
ത്രികോണനിർമിതി



വൃത്തവും ത്രികോണവും

ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന യൂക്ലിഡ് ആണ് ജ്യാമിതി യുടെ ആചാര്യനായി കരുതപ്പെടുന്നത്, അദ്ദേഹം എഴുതിയ 'എലമെന്റ്സ്' ആണ് ജ്യാമിതിയിലെ ആദ്യത്തെ പ്രാമാണിക ഗ്രന്ഥം.

വശങ്ങൾക്ക് നിശ്ചിത നീളമുള്ള സമഭുജ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതിന് യൂക്ലിഡിന്റെ രീതി ഇങ്ങനെയാണ്:



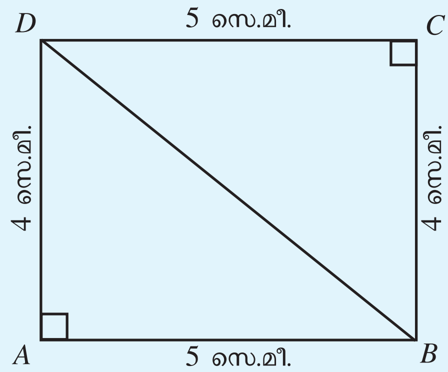
മധ്യകാലയൂറോപ്പിലെ പള്ളികളിലും മറ്റും രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്ന ഈ രൂപം ധാരാളം ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ചതുരത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ

മട്ടം ഉപയോഗിച്ച് ചതുരം വരച്ചത് ഓർമയുണ്ടല്ലോ.

$AB = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 4$ സെന്റിമീറ്റർ ആയി $ABCD$ എന്ന ചതുരം വരയ്ക്കൂ.

ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും എതിർമൂലകളെ യോജി പ്പിച്ചാലോ?



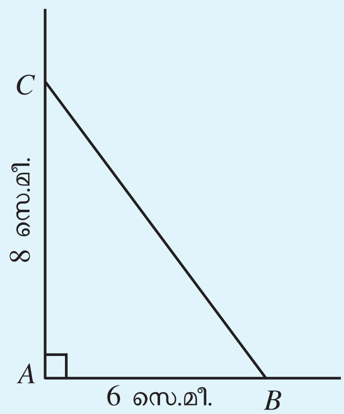
രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടിയല്ലോ. അവ ഏതെല്ലാമാ ണ്? ഓരോ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

ഇനി ലംബവശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

ആദ്യം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരയ്ക്കുക. അവ ചേരുന്ന ബിന്ദുവിന് A എന്ന് പേരും കൊടുക്കാം.

A യിൽ നിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു വരയിൽ B യും, 8 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ മറ്റേ വരയിൽ C യും അടയാ ളപ്പെടുത്തുക.

B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു വേണ്ട ത്രികോണമായില്ലേ.



BC യുടെ നീളം അളന്നെഴുതൂ.

ഇതുപോലെ ലംബവശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററും 7 സെന്റിമീ റ്ററും ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ചുനോക്കൂ.

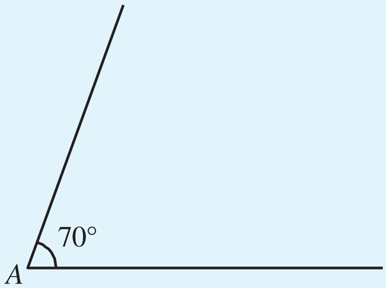
മറ്റൊരു ത്രികോണം

ഇപ്പോൾ വരച്ച രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞിരുന്നു; അവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ മട്ടവും. കോൺ മട്ടമല്ലെങ്കിൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

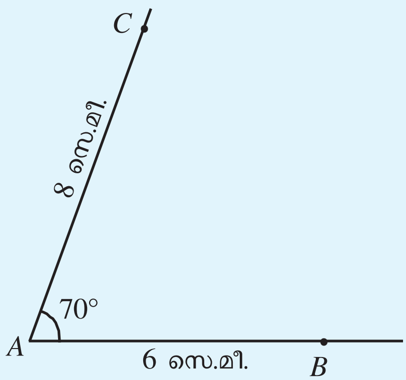
ഉദാഹരണമായി,

$AB = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $AC = 8$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 70°$ ആയി ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

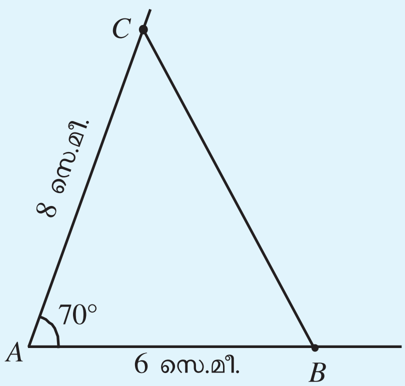
ആദ്യം $70°$ അളവുള്ള ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുക:



ഇനി ഒരു വരയിൽ A യിൽ നിന്നും 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള B എന്ന ബിന്ദുവും മറ്റേ വരയിൽ 8 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള C എന്ന ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തണം.

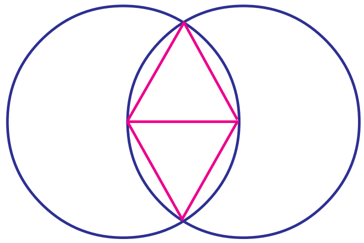


ഇനി B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ തന്നിരിക്കുന്ന അളവിലുള്ള ത്രികോണമായി.

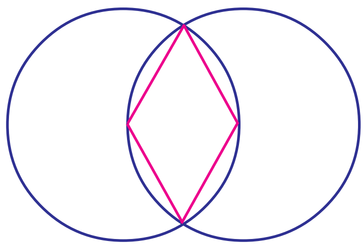


പുതിയ രൂപങ്ങൾ

സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാനുപയോഗിച്ച ചിത്രത്തിൽ, മുകളിലും താഴെയുമായി രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

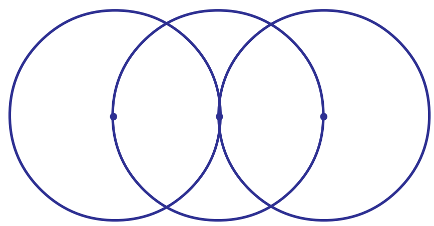


ഇതിലെ നടുവിലുള്ള വര മായ്ച്ചാലോ?

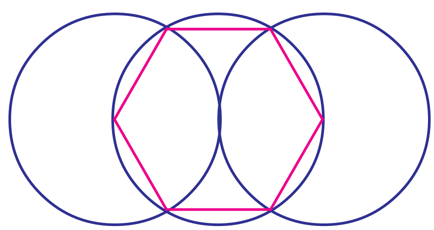


ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

ഇങ്ങനെ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്കു പകരം മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാലോ?



വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങളും അവ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങളും ചിത്രത്തിലേതുപോലെ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന രൂപം നോക്കൂ.

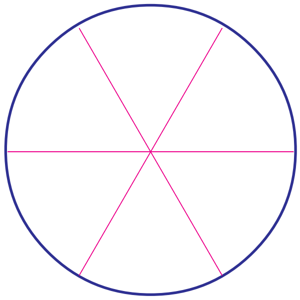


ഈ രൂപത്തിന്റെ പേരെന്താണ്?

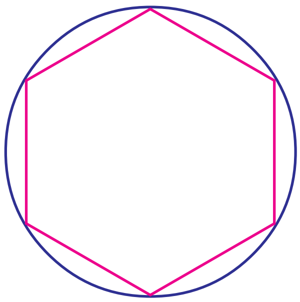
വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന് എന്തു പ്രത്യേകതയാണുള്ളത്?

വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ

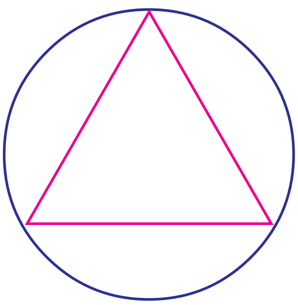
ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ ഒരു മട്ടത്തിന്റെ മൂല ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തെ ആറു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ അറിയാമല്ലോ:



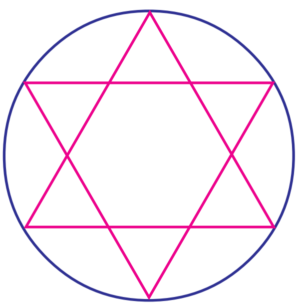
ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങളെല്ലാം യോജിപ്പിച്ചാൽ ചുവടെയുള്ള ചിത്രം കിട്ടും.



ഒന്നിടവിട്ട കുത്തുകൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ?



വിട്ടുകളഞ്ഞ കുത്തുകൾ കൂടി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇങ്ങനെയൊരു നക്ഷത്രം കിട്ടും.



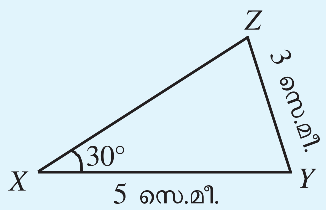
ഇതുപോലെ, ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

- $MN = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle M = 70°$, $ML = 5$ സെന്റിമീറ്റർ.
- $PQ = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $QR = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle Q = 50°$.
- $XY = 6.5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle Y = 110°$, $YZ = 7.5$ സെന്റിമീറ്റർ.
- $CD = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $DE = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle D = 60°$.

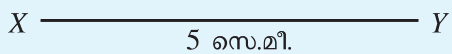
മറ്റൊരു കോൺ

രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളവും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണിന്റെ അളവും ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ നാം ഇതുവരെ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചത്. മറ്റൊരു കോണിന്റെ അളവറിഞ്ഞാലും ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

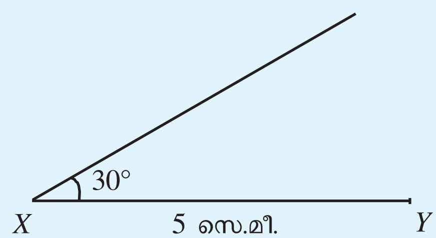
ഉദാഹരണമായി, $XY = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $YZ = 3$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle X = 30°$ ആയി XYZ എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ആദ്യം വെറുതെ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അളവുകൾ എഴുതാം.



കൃത്യമായ അളവിൽ വരയ്ക്കാൻ ആദ്യം 5 സെ.മീ. നീളത്തിൽ XY വരച്ച് തുടങ്ങാം:

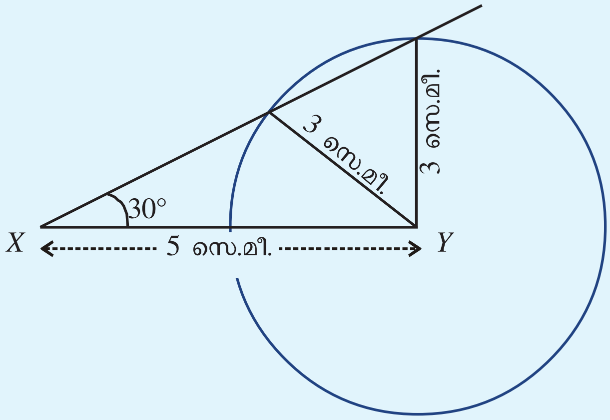


ഇനി X എന്ന ബിന്ദുവിൽ $30°$ അളവുള്ള ഒരു കോൺ വരയ്ക്കണം:



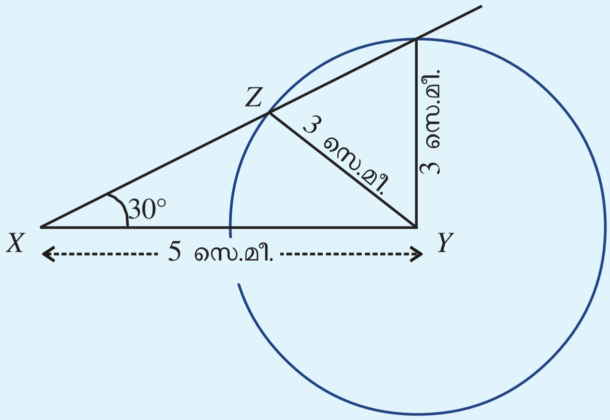
തുടർന്ന് Z ന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കണം. Y യിൽ നിന്നും 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവാണ് Z; അത് മുകളിലെ വരയിലും ആയിരിക്കണം.

Y ൽ നിന്നും 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും, Y കേന്ദ്രമായി 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലാണല്ലോ. ഈ വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

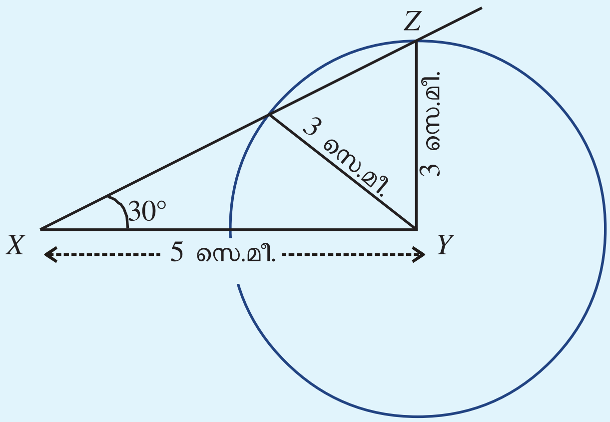


വൃത്തത്തിലെ എത്ര ബിന്ദുക്കളാണ് മുകളിലത്തെ വരയിലുമുള്ളത്?

അതിൽ ഒരെണ്ണം Z ആയി എടുത്താൽ ഉദ്ദേശിച്ച ഒരു ത്രികോണം കിട്ടും.



രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദു Z ആയി എടുത്താലോ?



വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ, അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 60^0 എന്നീ അളവുകളിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

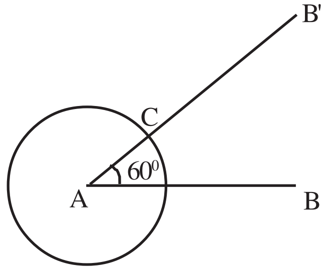
ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ.

ഇനി വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററും 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയി (കോൺ 60^0 തന്നെ) വരച്ചുനോക്കൂ. കോണുകൾ മാറിയോ?

ഇവിടെ ഓരോ ത്രികോണത്തിലും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരച്ചുനോക്കാം.

Min = 0, Max = 10 ആകത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. നീളം 2a വരുന്നതു പോലെ ഒരു വര AB വരയ്ക്കുക. (Segment with given length ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം)

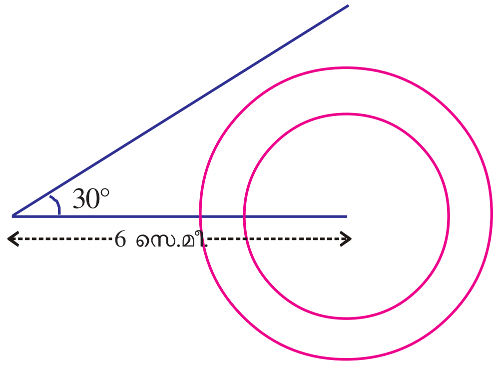
Angle with given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB യുമായി 60^0 ചരിവിൽ ഒരു വര AB' വരയ്ക്കുക. Circle with Center and Radius ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് A യിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായി a എന്ന് നൽകുക. വൃത്തം ചരിഞ്ഞ വരയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഇനി ചിത്രത്തിലെ വരകളും കോണും വൃത്തവും മറച്ചുവയ്ക്കാം. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC പൂർത്തിയാക്കുക. Distance or Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിലും Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ വശങ്ങളുടെ നീളവും കോണളവുകളും കാണാം, ഇനി സ്ലൈഡർ മാറ്റി നോക്കൂ. വശങ്ങൾ എങ്ങനെയാണ് മാറുന്നത്?

കോണുകളോ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് 30^0 ചരിവിൽ മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കുക. മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി, പല ആര മെടുത്ത് കുറേ വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കൂ.



ആരം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ എടുത്താലാണ്, വൃത്തം മുകളിലെ വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്?

ആരം ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകുമ്പോഴാണ് വൃത്തം വരയെ രണ്ടിടങ്ങളിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്?

$AB = 6$ സെന്റിമീറ്ററും $\angle B = 30°$ യും ആയി ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. AC യുടെ നീളം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കണം?

AC യുടെ നീളം ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ ആകുമ്പോഴാണ് ഈ അളവുകളിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്?

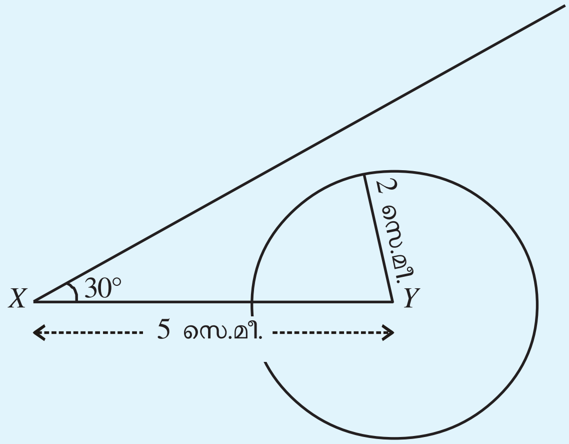
ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്തുനോക്കാം. നീളം 6 ആയി AB എന്ന വരയും $\angle BAB' = 30°$ ആകത്തക്ക വിധം AB' എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. ഒരു സ്ലൈഡർ 'a' നിർമിക്കുക. Circle with center and Radius ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് B യിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന ജാലകത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായി a എന്ന് നൽകുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. എപ്പോഴൊക്കെയാണ് വൃത്തം AB' എന്ന വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്?

ഈ കണക്കിൽ YZ ന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താലോ?

ഇപ്പോഴും രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നുണ്ടോ?

YZ ന്റെ നീളം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ എത്ര ത്രികോണം കിട്ടും?

2 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താലോ?



ഇപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

YZ ന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താലോ? എത്ര ത്രികോണം കിട്ടും?

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരച്ചുനോക്കൂ.

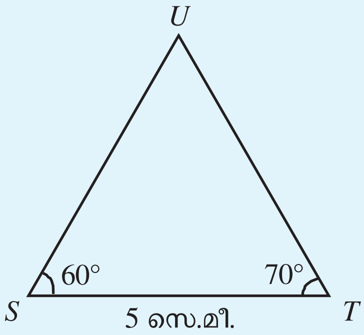
- $AB = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 40°$
- $PQ = 8$ സെന്റിമീറ്റർ, $PR = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle Q = 50°$
- $XY = 4$ സെന്റിമീറ്റർ, $YZ = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle X = 70°$

രണ്ടു കോണുകൾ

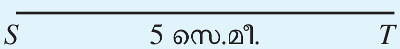
ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും രണ്ടു കോണുകളുടെ അളവും പറഞ്ഞാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

$ST = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle S = 60°$, $\angle T = 70°$ എന്നീ അളവുകളിൽ STU എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

ആദ്യം ഒരു ഏകദേശചിത്രം വരച്ചു വയ്ക്കാം.

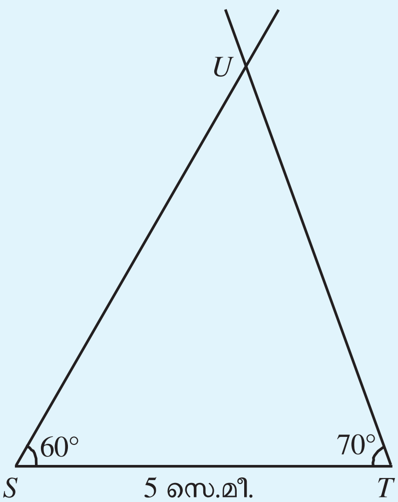


5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ST വരച്ചു തുടങ്ങാം.



ഇനി U ന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്തണം.

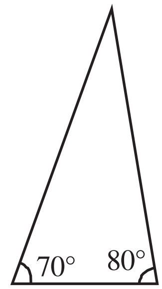
S ൽ നിന്ന് $60°$ ചരിവിലും T യിൽ നിന്ന് $70°$ ചരിവിലും ഉള്ള വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ് U.



- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.
- $YZ = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle Y = 45°$, $\angle Z = 65°$
- $MN = 6.5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle M = 60°$, $\angle N = 55°$
- $AB = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$ എന്നീ അളവുകളിൽ ΔABC വരയ്ക്കുക. കോൺ $\angle C$ എത്രയാണ്? BC, CA ഇവയുടെ നീളം അളന്ന് എഴുതുക.
- $PQ = 4.5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle P = 70°$, $\angle Q = 70°$ എന്നീ അളവുകളിൽ ΔPQR വരയ്ക്കുക. $\angle R$ എത്രയാണ്? PR, RQ ഇവയുടെ നീളം അളന്ന് എഴുതുക.

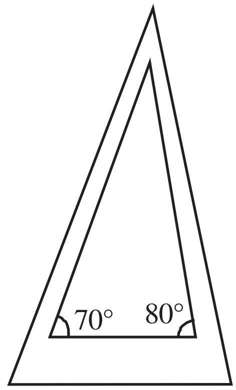
സമാന്തര ത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമായി 70^0, 80^0 എന്നീ ചരിവുകളിൽ മറ്റു രണ്ടു വരകൾ വരച്ച് ഒരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുക.



ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ കോൺ എത്രയാണ്?

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി മൂന്നു വരകൾ വരച്ച് മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അളന്നു നോക്കൂ. ഇതുപോലെ വേറെയും ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. കോണുകൾ മാറുന്നുണ്ടോ?

ഈ പ്രവർത്തനം ജിയോജിബ്രയിൽ ചെയ്തു നോക്കാം. Min = 0, Max = 2 വരത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ a നിർമിക്കുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതിനകത്തായി ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Dilate Object from Point by Factor ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിലും D യിലും ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് വരുന്ന ജാലകത്തിൽ Factor എന്നതിന് a എന്ന് നൽകി OK നൽകുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റിനോക്കൂ. Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണങ്ങൾക്കുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അവയുടെ കോണളവുകൾ എത്രയാണെന്ന് അറിയാൻ കഴിയും. D യുടെ സ്ഥാനം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളോട് ചേർന്നു നിൽക്കത്തക്കവിധം മാറ്റി നോക്കൂ.

മാറാത്ത ബന്ധം

$AB = 6,\ \ AC = 2\ BC$ ആകത്തക്കവിധത്തിലുള്ള ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ? ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

നീളം 6 ആയി ഒരു രേഖ AB വരയ്ക്കുക. ഉചിതമായ ഒരു min വിലയും ഒരു max വിലയും നൽകി ഒരു സ്ലൈഡർ 'a' നിർമിക്കുക. B കേന്ദ്രമായി 'a' ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തവും A കേന്ദ്രമായി '2a' യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C,D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, BC എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഇനി വൃത്തങ്ങൾ മറയ്ക്കാം. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. സ്ലൈഡറിൽ right click ചെയ്ത് Animation നൽകിയാലും മതി. C എന്ന ബിന്ദുവിൽ right click ചെയ്യുമ്പോൾ വരുന്ന മെനുവിൽ Trace on എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് '✓' അടയാളം നൽകുക. ഈ ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത എന്താണ്? AD, BD എന്നീ വരകൾകൂടി വരച്ച് D എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ trace കൂടി നൽകി നോക്കൂ.

a യുടെ മാറ്റം പതുക്കെയാക്കിയാൽ ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ പാത കുറച്ചുകൂടി വ്യക്തമാകും. (ഇതിനായി സ്ലൈഡറിൽ right click ചെയ്യുക. Object Properties → Slider → Increment)

AC = 2 BC എന്നതിനു പകരം AC = 3 BC, 2 AC = 3 BC എന്നിങ്ങനെ ബന്ധങ്ങൾ ഉള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. ഇവയിലെല്ലാം, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സഞ്ചാര പാത എന്താണ്? AC = BC ആകുമ്പോഴോ?

അവസാനം വരച്ച ത്രികോണത്തിൽ $\angle Q$ ന്റെ അളവിനു പകരം $\angle R$ ന്റെ അളവ് $70°$ എന്നാക്കിയാലോ?

നാം ഇതുവരെ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും ആ വശത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളുടെ അളവുമാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്.

$\angle P, \angle R$ എന്നിവയുടെ അളവാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

$\angle P, \angle Q$ എന്നിവയുടെ അളവുകളാണ് ആവശ്യമുള്ളത്.

$\angle Q$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

$$\angle Q = 180° - (70° + 70°) = 40°$$

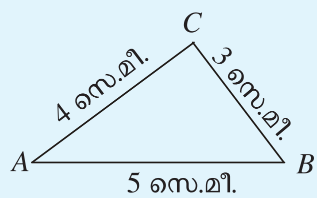
ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ.

മൂന്നു വശങ്ങൾ

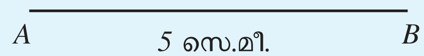
മൂന്നു വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞാലും ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.

$AB = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 3$ സെന്റിമീറ്റർ, $AC = 4$ സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

ഒരു ഏകദേശചിത്രം വരച്ച് അളവുകൾ എഴുതാം.



ആദ്യം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB വരയ്ക്കാം.

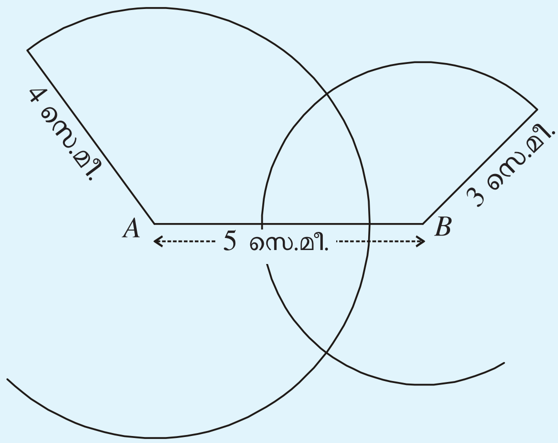


ഇനി C യുടെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കണം.

A യിൽ നിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലും B യിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലുമുള്ള ബിന്ദുവാണ് C.

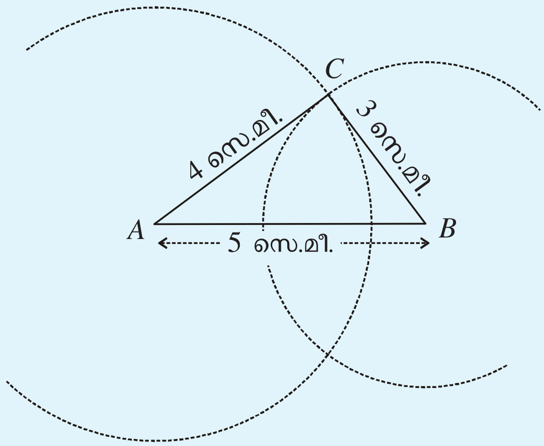
A യിൽ നിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും A കേന്ദ്രമായി 4 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലാണ്.

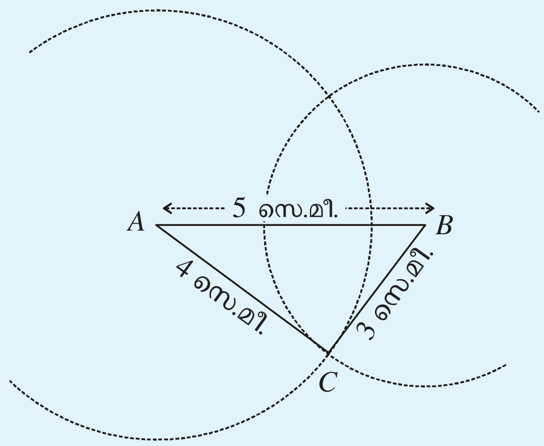
ഇതുപോലെ B കേന്ദ്രമായി 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ B യിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ലഭിക്കും.



ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും A യിൽ നിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്ററും B യിൽ നിന്നു 3 സെന്റിമീറ്ററും അകലത്തിലാണല്ലോ.

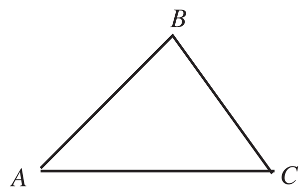
ഇവയിൽ ഏതുപയോഗിച്ചും ത്രികോണം വരയ്ക്കാം.





നേരായ മാർഗം

ചിത്രം നോക്കൂ.



A യിൽനിന്ന് C യിലെത്താൻ, AC എന്ന വരയിലൂടെ നേരേ പോകാം. അല്ലെങ്കിൽ, AB യിലൂടെ B യിൽ ചെന്ന്, അവിടെനിന്ന് BC യിലൂടെ C യിലെത്താം. ഏതു വഴിക്കാണ് ദൂരം കുറവ്?

ഇതിൽനിന്ന്, ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കിട്ടുന്നുണ്ടോ?

ഈർക്കിൽക്കണക്ക്

ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ട് ഈർക്കിലുകൾ എടുക്കുക. അതിലൊന്ന് ഒടിച്ച് രണ്ടു കഷണങ്ങളാക്കുക.

ഈ മൂന്ന് ഈർക്കിലുകൾ കൊണ്ട് ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ പറ്റുമോ?

ഇനി ഇതിലെ വലിയ ഈർക്കിലിൽനിന്ന് ചെറിയൊരു കഷണം ഒടിച്ചുകളയുക.

ഇപ്പോൾ ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ സാധിക്കുന്നുണ്ടോ?

മാറാത്ത ചുറ്റളവ്

ചുറ്റളവ് 15 യൂണിറ്റ് വരത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ? ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം. വശങ്ങളുടെ നീളം നിയന്ത്രിക്കുന്നതിനായി രണ്ടു സ്ലൈഡറുകൾ ആദ്യം നിർമിക്കണം. Min = 0, Max = 7.5 വരത്തക്കവിധത്തിൽ a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിക്കുക. Segment with Given Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് നീളം, a ആയി AB എന്ന രേഖ വരയ്ക്കുക. ഇനി മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾക്കും കൂടി നീളം എന്താവണം?

ചുറ്റളവ് 15 യൂണിറ്റ്. അപ്പോൾ

$$AC + BC = 15 - AB = 15 - a$$

ഇതിൽ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം b ആയാൽ അടുത്ത വശത്തിന്റെ നീളം എന്താകണം? ഇതു പയോഗിച്ചാണ് അടുത്ത രണ്ടു വശങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത്. A കേന്ദ്രമായി ആരം b ആയി ഒരു വൃത്തവും B കേന്ദ്രമായി ആരം 15 - a - b ആയി മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. Distance or Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനകത്ത് ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണെന്ന് കാണാൻ സാധിക്കും. സ്ലൈഡറുകൾ ഉപയോഗിച്ച് a, b ഇവയുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. ഒരേ ചുറ്റളവുള്ള വ്യത്യസ്ത ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടുന്നില്ലേ?

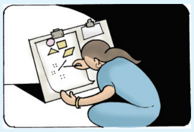
ഇതുപയോഗിച്ച് മനോഹരമായ ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം. AD, BD എന്നീ വരകൾകൂടി വരയ്ക്കുക.

AC, BC, AD, BD എന്നീ വരകളുടെയും C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെയും Trace on നൽകുക. a യുടെ വില ഉറപ്പിച്ചുകൊണ്ട് b യുടെ സ്ലൈഡറിന് animation നൽകുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചിത്രം നോക്കൂ. C,D എന്നിവ സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത എന്താണ്?

ഇനി ഈ അളവുകളിലെല്ലാം ത്രികോണം വരച്ചുനോക്കൂ.

- $PQ = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $QR = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $PR = 4$ സെന്റിമീറ്റർ
- $XY = 7.5$ സെന്റിമീറ്റർ, $YZ = 6.5$ സെന്റിമീറ്റർ, $XZ = 5.5$ സെന്റിമീറ്റർ
- $DE = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $EF = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $DF = 7$ സെന്റിമീറ്റർ.

- $AB = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $AC = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 85°$. ഈ അളവുകളുള്ള ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക.
- $PQ = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle Q = 60°$, $PR = 7$ സെന്റിമീറ്റർ ഈ അളവുകളിൽ ത്രികോണം PQR വരയ്ക്കുക. മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം അളന്നെഴുതുക.
- $MN = 8$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle M = 60°$, $\angle N = 50°$. ത്രികോണം MNT വരയ്ക്കുക.
- $XY = 6$ സെന്റിമീറ്റർ, $YZ = 7$ സെന്റിമീറ്റർ, $XZ = 7$ സെന്റിമീറ്റർ ഈ അളവുകളിൽ ത്രികോണം XYZ വരയ്ക്കുക.



പ്രോജക്ട്

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 10 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

5 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 9 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഇനി 5 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 8.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററിൽ കുറവായിരിക്കണം?

ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?

എന്തുകൊണ്ടാണ് ചില അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയാത്തത്?

ഇനി താഴെ കൊടുത്തവയിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ അളവുകളാവുന്നത് ഏതൊക്കെയാണ് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കൂ.

- 8 സെ.മീ., 6 സെ.മീ., 13 സെ.മീ.
- 2 സെ.മീ., 5 സെ.മീ., 8 സെ.മീ.
- 5 സെ.മീ., 4 സെ.മീ., 9 സെ.മീ.
- 4 സെ.മീ., 6 സെ.മീ., 7 സെ.മീ.

മാറാത്ത കോൺ

$AB = 5, \angle C = 60°$ ആയി ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ? ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

നീളം 5 ആയി AB വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider a നിർമിക്കുക. Angle with Given size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം B യിലും പിന്നീട് A യിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് വരുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി a എന്ന് നൽകി OK ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ $\angle BAB'$ എന്നത് a യുടെ വിലയാകത്തക്ക വിധം ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. ഇതേ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ആദ്യം A യിലും പിന്നീട് B യിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി 120° - a എന്ന് നൽകി, Clockwise എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് OK ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ A' എന്ന പുതിയ ബിന്ദു ലഭിക്കും. Ray through Two Points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB', BA' എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. ഇനി ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകളും ബിന്ദുക്കളും മറ്റും മറച്ചു വയ്ക്കാം. Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അതിന്റെ കോണളവുകൾ കാണാൻ കഴിയും. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. AC, BC എന്നീ വരകളുടെയും C എന്ന ബിന്ദുവിനും Trace on നൽകി സ്ലൈഡറിന് Animation നൽകുക. C എന്ന ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത എന്താണ്?

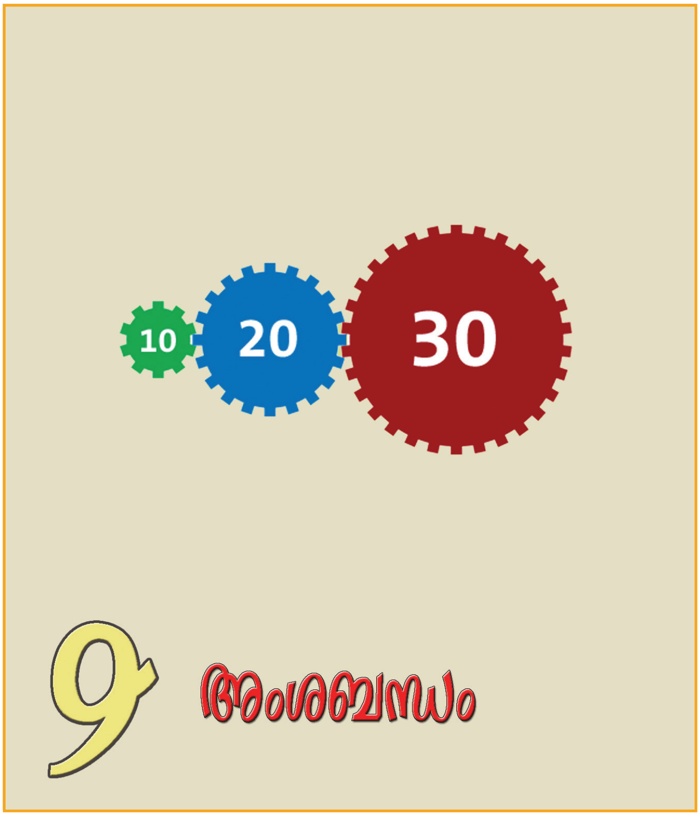
C യിലെ കോൺ 60° എന്നതിനുപകരം മറ്റു കോണളവുകളിലും ചെയ്തുനോക്കൂ. ഈ കോൺ മാറ്റാനും ഒരു സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിക്കാം.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ടുവശങ്ങളുടെയും ഒരു കോണിന്റെയും അളവുകൾ അറിഞ്ഞാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.			
• ഒരു വശത്തിന്റെയും രണ്ടു കോണുകളുടെയും അളവുകൾ അറിഞ്ഞാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.			
• മൂന്നു വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ അറിഞ്ഞിരുന്നാൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.			
• ചില അളവുകളിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയാത്തതിന്റെ കാരണം യുക്തിസഹമായി സമർഥിക്കുന്നു.			
• കൃത്യതയോടെയും സൂക്ഷ്മതയോടെയും ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.			
• ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളുടെ നിർമാണത്തിന് 'ജിയോജിബ്ര'യിലെ സാധ്യതകൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു.			

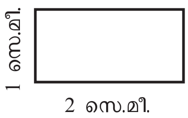
9

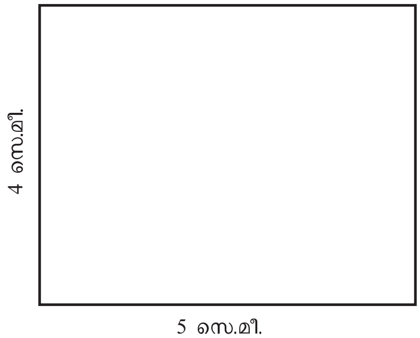
അംശബന്ധം



ഒരേ രൂപം

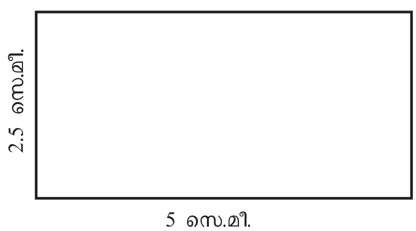
ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടു ചതുരങ്ങളിലും നീളം വീതിയേക്കാൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്.





എന്നാൽ ഈ രണ്ടു ചതുരങ്ങളും തമ്മിൽ വലുപ്പത്തിൽ മാത്രമല്ല, രൂപത്തിലും വ്യത്യാസമുണ്ടല്ലോ. വലിയ ചതുരത്തിൽ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അത്ര പ്രകടമല്ല. ഇനി നീളം 50 സെന്റിമീറ്ററും വീതി 49 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം വലിയ കടലാസിൽ വരച്ചു നോക്കൂ. വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒട്ടും പ്രകടമാവില്ല. അതായത്, ഈ ചതുരം ഒരു സമചതുരത്തോട് വളരെ അടുത്തു നിൽക്കും.

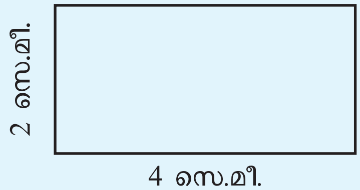
ആദ്യത്തെ ചെറിയ ചതുരത്തിൽ നീളം, വീതിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. ഇനി ഈ ചതുരം നോക്കൂ.

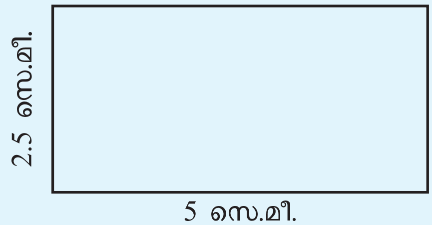


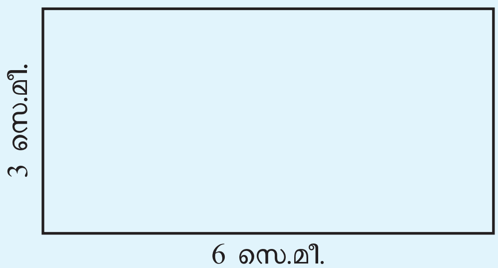
ഇതിലും നീളം വീതിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെ. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിലും രണ്ടിന്റെയും രൂപം ഒരുപോലെയല്ലേ?

വീതിയും നീളവും

ഈ ചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ.







ഇവയുടെയെല്ലാം വീതിയും നീളവും തമ്മിൽ പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

എല്ലാ ചതുരങ്ങളിലും നീളം വീതിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ (വീതി നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നും പറയാം).

ഇക്കാര്യം കണക്കിന്റെ ഭാഷയിൽ പറയുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

> ഈ ചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വീതിയും നീളവും ഒന്നിനു രണ്ട് എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് (in the ratio one to two).

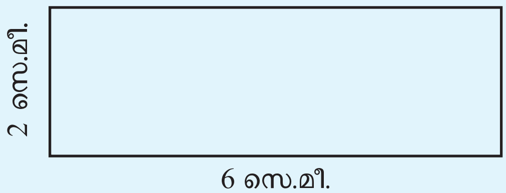
“ഒന്നിനു രണ്ട്” എന്നതിനെ ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 1 : 2 എന്നാണ്. അതായത്

> ഈ ചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വീതിയും നീളവും 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

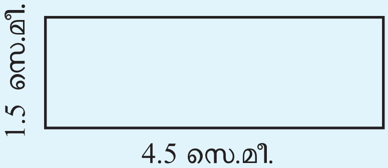
വീതി 1 സെന്റിമീറ്ററും നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരത്തിലും നീളം വീതിയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ. വീതി 1 മീറ്ററും നീളം 2 മീറ്ററും ആയാലും ബന്ധം ഇതു തന്നെ.

അപ്പോൾ ഈ ചതുരങ്ങളിലും വീതിയും നീളവും ഒന്നിനു രണ്ട് (1 : 2) എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. മറിച്ചും പറയാം: ഈ ചതുരങ്ങളിലെല്ലാം നീളവും വീതിയും രണ്ടിന് ഒന്ന് (2 : 1) എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?



ഇനി ഈ ചതുരത്തിലോ?



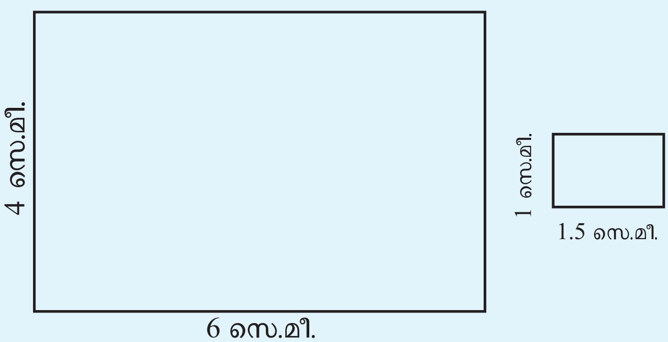
രണ്ടിലും നീളം വീതിയുടെ മൂന്നു മടങ്ങല്ലേ? അപ്പോൾ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

വീതി 2 സെന്റിമീറ്ററും നീളം 1 മീറ്ററും ആയാലോ?

വീതിയുടെ എത്ര മടങ്ങാണ് നീളം?

1 മീറ്ററെന്നാൽ 100 സെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ചതുരത്തിൽ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 50 ആണ്.

ഇനി ഈ രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ നോക്കൂ:



തോതു മാറിയാൽ

ഈ ഫോട്ടോ നോക്കൂ.

ഇതിന്റെ ചെറിയ വശം 2 സെന്റിമീറ്ററും വലിയ വശം 3 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതായത് ചെറിയ വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശം.

ചെറിയ വശം 3 സെന്റിമീറ്ററും, വലിയ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററും ആക്കിയാലോ?

ഇപ്പോഴും വലിയ വശം ചെറിയ വശത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുതന്നെ.

ഇനി ചെറിയ വശം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആക്കുമ്പോൾ വലിയ വശവും 1 സെന്റിമീറ്റർതന്നെ കൂട്ടി 4 സെന്റിമീറ്റർ ആക്കിയാലോ?

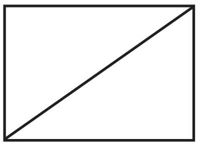
ചിത്രം ശരിയാണോ?

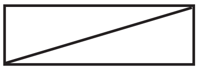
ടെലിവിഷൻ ഗണിതം

ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളുടെ വലുപ്പം പൊതുവെ 14 ഇഞ്ച്, 17 ഇഞ്ച്, 20 ഇഞ്ച് എന്നിങ്ങനെയാണ് പറയുന്നത്. എന്താണ് ഇതിന്റെ അർഥം?

ടെലിവിഷൻ സ്ക്രീൻ ഒരു ചതുരമാണല്ലോ. അതിന്റെ വികർണത്തിന്റെ അളവുകളാണ് അവയെല്ലാം.

ഇതുകൊണ്ടുമാത്രം ടെലിവിഷന്റെ വലുപ്പം നിശ്ചയിക്കാമോ? നീളവും വീതിയും വ്യത്യസ്തമായ ചതുരങ്ങളുടെ വികർണം തുല്യമാകാമല്ലോ:





സ്ക്രീനിന്റെ വലുപ്പം എത്രതന്നെയായാലും അതിന്റെ നീളവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഇപ്പോഴത്തെ ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളിൽ 16 : 9 ആണ്. കുറേക്കാലം മുമ്പുള്ള ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളിൽ ഈ അംശബന്ധം 4 : 3 ആയിരുന്നു. വികർണത്തിന്റെ വലുപ്പം തുല്യമായ രണ്ടു ടെലിവിഷൻ സ്ക്രീനുകളിൽ ഈ വ്യത്യാസം നോക്കൂ.

4 : 3

16 : 9

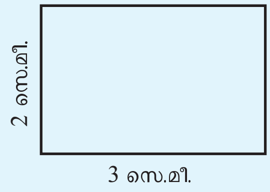
രണ്ടിലും നീളം വീതിയുടെ ഒന്നര മടങ്ങല്ലേ?

ഇത് അംശബന്ധമായി പറയുന്നതെങ്ങനെ?

ഒന്നിന് ഒന്നര എന്നു പറയാം. പക്ഷേ, സാധാരണയായി അംശബന്ധം പറയുമ്പോൾ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഒഴിവാക്കുകയാണ് പതിവ്.

വീതി 2 സെന്റീമീറ്റർ എന്നെടുത്താലോ?

2 ന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങ് എത്രയാണ്?



അപ്പോൾ ഇത്തരം ചതുരങ്ങളിൽ വീതിയും നീളവും രണ്ടിനു മൂന്ന് എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു പറയാം. 2 : 3 എന്നെഴുതുകയും ചെയ്യാം.

ഇവിടെ അംശബന്ധം 4 : 6 എന്നു പറഞ്ഞുകൂടേ?

അങ്ങനെ പറഞ്ഞാലും തെറ്റില്ല. പക്ഷേ, സാധാരണയായി കഴിയുന്നത്ര ചെറിയ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് അംശബന്ധം പറയാറുള്ളത്.

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയുടെ രണ്ടര മടങ്ങാണ് എന്നത് അംശബന്ധമായി പറയുന്നതെങ്ങനെ?

വീതി 1 സെന്റീമീറ്ററാണെങ്കിൽ, നീളം $2\frac{1}{2}$ സെന്റീമീറ്റർ.

വീതി 2 സെന്റീമീറ്ററാണെങ്കിലോ?

നീളം 5 സെന്റീമീറ്റർ.

അപ്പോൾ വീതിയും നീളവും 2 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു പറയാം.

വീതിയുടെ ഒന്നേകാൽ മടങ്ങാണ് നീളമെങ്കിലോ?

വീതി 1 സെന്റീമീറ്ററാണെങ്കിൽ, നീളം $1\frac{1}{4}$ സെന്റീമീറ്റർ.

വീതി 2 സെന്റീമീറ്ററാണെങ്കിൽ, നീളം $2\frac{1}{2}$ സെന്റീമീറ്റർ.

അപ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യ ഒഴിയുന്നില്ല.

ഇനി വീതി 4 സെന്റീമീറ്ററാക്കിയാൽ നീളം എത്രയാകും?

അപ്പോൾ ഇത്തരം ചതുരങ്ങളിൽ വീതിയും നീളവും 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

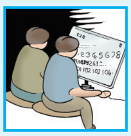
ഇവിടെയെല്ലാം മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ?

വീതിയും നീളവും ഒരേ മടങ്ങായി നീട്ടിയാലും ഒരേ ഭാഗമായി ചുരുക്കിയാലും അംശബന്ധം മാറുന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി , ചുവടെപ്പറയുന്ന വീതിയും നീളവും നോക്കുക.

വീതി	നീളം
3 സെ.മീ.	9 സെ.മീ.
6 സെ.മീ.	18 സെ.മീ.
1 മീ.	3 മീ.
$\frac{1}{2}$ മീ.	$1\frac{1}{2}$ മീ.
$1\frac{1}{2}$ മീ.	$4\frac{1}{2}$ മീ.

ഇവയിലെല്ലാം, വീതിയുടെ 3 മടങ്ങ് ആണ് നീളം. മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ നീളത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ് വീതി.

അംശബന്ധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, വീതിയും നീളവും 1 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്; നീളവും വീതിയും 3 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.



- ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കഴിയുന്നത്ര ചെറിയ എണ്ണൽസംഖ്യകളുപയോഗിച്ചു പറയുക:
  - വീതി 8 സെന്റിമീറ്റർ, നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ
  - വീതി 8 മീറ്റർ, നീളം 12 മീറ്റർ
  - വീതി 20 സെന്റിമിറ്റർ, നീളം 1 മീറ്റർ
  - വീതി 40 സെന്റിമീറ്റർ, നീളം 1 മീറ്റർ
  - വീതി 1.5 സെന്റിമീറ്റർ, നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ

പതാകകൾ

നമ്മുടെ ദേശീയപതാകയുടെ ചിത്രം വരയ്ക്കുമ്പോൾ നിറങ്ങൾ മാത്രം ശരിയായാൽപ്പോരാ, ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ശരിയാകണം. ഇത് 2 : 3 ആണ്.

അതായത്, ദേശീയപതാക വരയ്ക്കുമ്പോൾ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററായെടുത്താൽ, വീതി 2 സെന്റിമീറ്റർതന്നെ ആയിരിക്കണം.

വിവിധ രാജ്യങ്ങളുടെ പതാകകളിൽ ഈ അംശബന്ധം വ്യത്യസ്തമാണ്. ഉദാഹരണമായി ഓസ്ത്രേലിയയുടെ പതാകയിൽ ഇത് 1 : 2 ആണ്.

ജർമനിയുടെ പതാകയിൽ ഈ അംശബന്ധം 3 : 5 ആണ്.

ഭിന്നങ്ങളില്ലാതെ

ഒരു നിശ്ചിത ഏകകം ഉപയോഗിച്ച് നീളവും മറ്റും അളക്കുമ്പോൾ എപ്പോഴും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കിട്ടില്ല എന്ന വസ്തുതയിൽ നിന്നാണ് ഭിന്നസംഖ്യ എന്ന ആശയം ഉണ്ടായത്. രണ്ട് അളവുകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ വേണ്ടത്ര ചെറിയ ഏകകം ഉപയോഗിച്ചാൽ രണ്ടിനേയും എണ്ണൽസംഖ്യയാക്കാമോ എന്ന ചിന്തയാണ് അംശബന്ധം എന്ന ആശയത്തിന് ആധാരം.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു ചരടുകൊണ്ട് അളക്കുമ്പോൾ ഒരു വസ്തുവിന്റെ നീളം $\frac{2}{5}$ എന്നും മറ്റൊന്നിന്റെ നീളം $\frac{3}{5}$ എന്നും കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. ചരടിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം ഏകകമായെടുത്താൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ നീളം 2 എന്നും രണ്ടാമത്തേതിന്റെ നീളം 3 എന്നും പറയാം. നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2 : 3 എന്നു പറയുന്നതിന്റെ അർത്ഥം ഇതാണ്.

രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ നീളം ചരടിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും $\frac{1}{5}$ ഭാഗവും ആണെങ്കിലോ?

രണ്ടിന്റെയും നീളം എണ്ണൽസംഖ്യയായി കിട്ടാൻ, ചരടിന്റെ എത്ര ഭാഗം ഏകകമായി എടുക്കണം?

- ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ ചില ചതുരങ്ങളുടെ വീതി, നീളം, അവ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്നിവയിൽ രണ്ടെണ്ണം തന്നിട്ടുണ്ട്. മൂന്നാമത്തേത് കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

വീതി (സെ.മീ.)	നീളം (സെ.മീ.)	അംശബന്ധം
6	8	
3		3 : 4
1		3 : 4
	1	3 : 4
6	15	
2		2 : 5
1		2 : 5
	1	2 : 5

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയും നീളവും 1 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് എന്നു പറഞ്ഞാൽ എന്താണ് അർഥം? അത് ഏതുതരം ചതുരമാണ്?

മറ്റ് അളവുകൾ

രണ്ടു കയറുകൾ; ചെറുതിന്റെ നീളം $\frac{1}{3}$ മീറ്റർ, വലുതിന്റെ നീളം $\frac{1}{2}$ മീറ്റർ. ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

പലരീതിയിൽ കണക്കാക്കാം. $\frac{1}{3}$ ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് $\frac{1}{2}$ എന്നു നോക്കാം:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

അപ്പോൾ ചെറിയ കയറിന്റെ നീളത്തിന്റെ $\frac{3}{2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ കയറിന്റെ നീളം. അതായത് $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങ്.

ചെറുതിന്റെ നീളം 1 ആയി എടുത്താൽ വലുതിന്റെ നീളം $1\frac{1}{2}$; പകരം 2 ആയി എടുത്താൽ 3.

അതിനാൽ ചെറുതിന്റെയും വലുതിന്റെയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ചതുരങ്ങളുടെ വീതിയും നീളവും പോലെ ചെറുതിനെയും വലുതിനെയും ഒരേ മടങ്ങായി നീട്ടുന്നത് സങ്കൽപ്പിക്കാം; അപ്പോഴൊന്നും അംശബന്ധം മാറില്ലല്ലോ.

രണ്ടു കയറിന്റെയും നീളം രണ്ടു മടങ്ങാക്കിയാലോ?

ചെറുതിന്റെ നീളം $\frac{2}{3}$ മീറ്ററും വലുതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററുമാകും; ഭിന്നസംഖ്യ ഒഴിവായില്ല.

ഭിന്നസംഖ്യ ഒഴിവാക്കാൻ എത്ര മടങ്ങാക്കണം?

ആറു മടങ്ങാക്കിയാലോ?

$\frac{1}{3}$ ന്റെ 6 മടങ്ങ് 2.

$\frac{1}{2}$ ന്റെ 6 മടങ്ങ് 3.

ചെറുതിന്റെ നീളം 2 മീറ്റർ, വലുതിന്റെ നീളം 3 മീറ്റർ. അപ്പോൾ അംശബന്ധം 2 : 3.

ഇനിയുമൊരു വഴിയുണ്ട്.

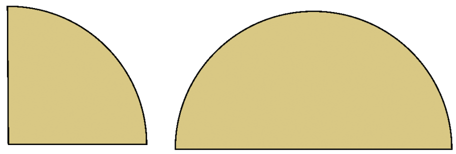
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അതായത്, ചെറിയ കയറിനെ $\frac{1}{6}$ മീറ്റർ നീളമുള്ള 2 കഷണങ്ങൾ ചേർന്നതായും വലിയ കയറിനെ $\frac{1}{6}$ മീറ്റർ നീളമുള്ള 3 കഷണങ്ങൾ ചേർന്നതായും സങ്കൽപ്പിക്കാം. ഇങ്ങനെ നോക്കിയാലും അംശബന്ധം 2 : 3 എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ. ഒരു പാത്രം നിറയ്ക്കാൻ അരക്കുപ്പി വെള്ളം മതി. അതിനേക്കാൾ വലിയ ഒരു

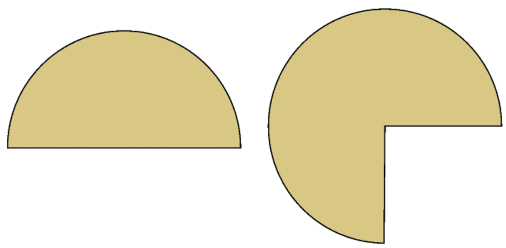
വൃത്തബന്ധങ്ങൾ

ചുവടെയുള്ള വൃത്തഭാഗങ്ങൾ നോക്കൂ.



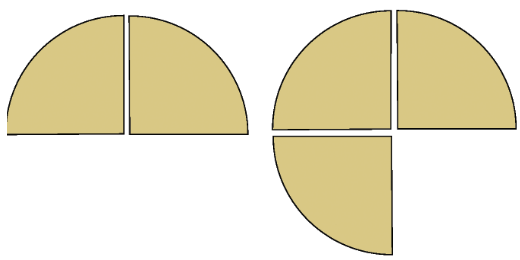
ചെറിയ കഷണം ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗവും വലിയ കഷണം ആ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗവുമാണ്. അതായത് വലിയ കഷണത്തിന് ചെറിയ കഷണത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങു വലുപ്പമുണ്ട്. അപ്പോൾ ചെറുതിന്റെയും വലുതിന്റെയും വലുപ്പങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2 ആണ്.

ഇനി ഈ കഷണങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഇവയുടെ വലുപ്പങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

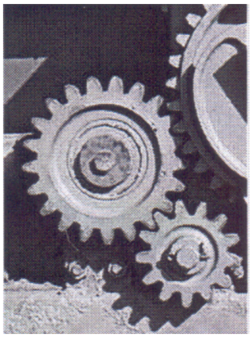
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കൊണ്ട് അളന്നുനോക്കാം. ഇതിലെ ചെറിയ കഷണത്തിൽ അത്തരം രണ്ടെണ്ണമുണ്ട്. വലിയ കഷണത്തിലോ?



അപ്പോൾ ഈ കഷണങ്ങളുടെ വലുപ്പങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ചലനവും അംശബന്ധവും

കളിവണ്ടികളോ പഴയ ക്ലോക്കുകളോ അഴിച്ചു നോക്കിയിട്ടുണ്ടോ? അവയിൽ പല വലുപ്പത്തിലുള്ള പൽച്ചക്രങ്ങൾ കാണാം. ചിത്രം നോക്കൂ.



ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ ചെറിയൊരു ഭാഗമാണിത്. ഇതിൽ മുഴുവനായി കാണുന്ന പൽച്ചക്രങ്ങളിൽ ചെറുതിന് 13 പല്ലും വലുതിന് 21 പല്ലുമാണുള്ളത്. ചെറിയ ചക്രം 21 തവണ കറങ്ങിക്കഴിയുമ്പോൾ വലിയ ചക്രം 13 തവണ മാത്രമേ കറങ്ങിയിട്ടുണ്ടാവുകയുള്ളൂ.

ഇങ്ങനെ പൽച്ചക്രങ്ങളുടെ പല്ലുകളുടെ എണ്ണം നിശ്ചിത അംശബന്ധങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചാണ് യന്ത്രങ്ങൾ കറങ്ങുന്നതിന്റെ വേഗം നിയന്ത്രിക്കുന്നത്.

പാത്രം നിറയ്ക്കാൻ മുക്കാൽകുപ്പി വെള്ളം വേണം. ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെയും വലിയ പാത്രത്തിന്റെയും ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ഇവിടെ

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ കുപ്പിയുടെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം വെള്ളം 2 തവണ ഒഴിച്ചാൽ ചെറിയ പാത്രം നിറയും; വലിയ പാത്രം നിറയാൻ കുപ്പിയുടെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം വെള്ളം തന്നെ 3 തവണ ഒഴിക്കണം. ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെയും വലിയ പാത്രത്തിന്റെയും ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3.

മറ്റൊരു കണക്ക്: രാജുവിന്റെ കൈയിൽ 200 രൂപയും റഹീമിന്റെ കൈയിൽ 300 രൂപയുമുണ്ട്. രാജുവിന്റെയും റഹീമിന്റെയും കൈയിലുള്ള തുകകളുടെ അംശബന്ധം എന്താണ്?

രണ്ടുപേരുടെ കൈയിലും നൂറു രൂപാനോട്ടുകളാണുള്ളതെന്നു കരുതിയാൽ, രാജുവിന്റെ കൈയിൽ 2 ഉം, റഹീമിന്റെ കൈയിൽ 3 ഉം ആണുള്ളത്. അതായത് അംശബന്ധം 2 : 3.

കണക്കൽപ്പം മാറ്റി, രാജുവിന്റെ കൈയിൽ 250 രൂപയും, റഹീമിന്റെ കൈയിൽ 350 രൂപയുമാണെന്നെടുത്താലോ?

തുകകൾ 50 രൂപാ നോട്ടുകളായി കണക്കാക്കിയാൽ, രാജുവിന്റെ കൈയിൽ 5 നോട്ടുകൾ, റഹീമിന്റെ കൈയിൽ 7; അംശബന്ധം 5 : 7.

തുകകൾ 225 രൂപയും 325 രൂപയുമാണെങ്കിലോ?

ഓരോന്നിനെയും 25 രൂപ വീതമുള്ള പൊതികളായി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ, രാജുവിന്റെ കൈയിൽ $225 \div 25 = 9$ പൊതി, റഹീമിന്റെ കൈയിൽ $325 \div 25 = 13$ പൊതി; അംശബന്ധം 9 : 13.

ഒരു കണക്കുകൂടി നോക്കാം. ഒരു ക്ലാസിൽ 25 പെൺകുട്ടികളും 20 ആൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. പെൺകുട്ടികളുടെയും ആൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

പെൺകുട്ടികളെയും ആൺകുട്ടികളെയും 5 പേർ വീതമുള്ള സംഘങ്ങളാക്കിയാൽ, പെൺകുട്ടികളുടെ 5 സംഘങ്ങളും ആൺകുട്ടികളുടെ 4 സംഘങ്ങളുമുണ്ടാകും. അപ്പോൾ അംശബന്ധം 5 : 4.

ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകളിലെല്ലാം, കഴിയുന്നത്ര ചെറിയ എണ്ണൽസംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് അംശബന്ധങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

- രണ്ടു പെൻസിലുകൾ; ചെറുതിന്റെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും വലുതിന്റെ നീളം 9 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. വലുതിന്റെയും ചെറുതിന്റെയും നീളങ്ങൾ എന്ത് അംശബന്ധത്തിലാണ്?
- ഒരു സ്കൂളിൽ 120 ആൺകുട്ടികളും 140 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
- ഒരു സമ്മേളനത്തിൽ 96 സ്ത്രീകളും 144 പുരുഷന്മാരും പങ്കെടുത്തു. സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണവും പുരുഷൻമാരുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു ചരടുകൊണ്ട് ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അളന്നപ്പോൾ വീതി, ചരടിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗവും നീളം ചരടിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗവും എന്നു കണ്ടു. വീതിയും നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
- ഒരു വലിയ കുപ്പി നിറയ്ക്കാൻ $3\frac{1}{2}$ ഗ്ലാസ് വെള്ളവും ചെറിയ കുപ്പി നിറയ്ക്കാൻ $2\frac{1}{4}$ ഗ്ലാസ് വെള്ളവും വേണം. വലിയ കുപ്പിയുടെയും ചെറിയ കുപ്പിയുടെയും ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

ചേരുവകളുടെ ബന്ധം

ഇഡ്ഡലിയുണ്ടാക്കാൻ, അമ്മുവിന്റെ അമ്മ രണ്ടു കിണ്ണം അരിയും ഒരു കിണ്ണം ഉഴുന്നുമെടുത്താണ് അരയ്ക്കുന്നത്.

വിരുന്നുകാർ വരുന്നതിന്റെ തലേന്ന് നാലു കിണ്ണം അരിയെടുത്തു. എത്ര കിണ്ണം ഉഴുന്നെടുക്കണം?

രുചിയും ഗുണവും മാറാതിരിക്കാൻ, അരിയെടുത്തതിന്റെ പകുതിയാണ് ഉഴുന്നെടുക്കേണ്ടത്.

അപ്പോൾ നാലു കിണ്ണം അരിക്ക് രണ്ടു കിണ്ണം ഉഴുന്നെടുക്കണം.

അരിയും ഉഴുന്നും 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കണം എന്നു പറയാം.

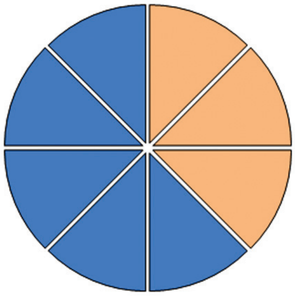
ഇനി മറ്റൊരു മിശ്രിതക്കണക്ക്: അബുവിന്റെ വീടിന്റെ ചുമരുകൾക്ക് ചായം തേയ്ക്കാൻ ആദ്യം 25 ലിറ്റർ പച്ചയും, 20 ലിറ്റർ വെള്ളയും പെയിന്റ് കലർത്തിയെടുത്തു. ഇതു

സിമന്റും മണലും

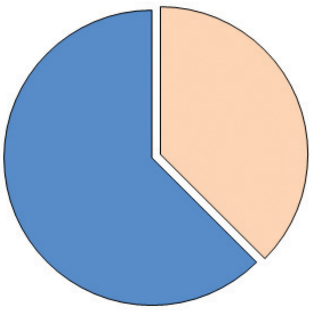
സിമന്റും മണലും ഒരു നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ചേർത്താണ് കെട്ടിടനിർമാണത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എന്നാൽ എല്ലാ ആവശ്യങ്ങൾക്കും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലല്ല ഇവ ചേർക്കുന്നത്. ഒരു ചട്ടി സിമന്റും അഞ്ച് ചട്ടി മണലും ചേർത്ത് മിശ്രിതമുണ്ടാക്കുമ്പോൾ സിമന്റും മണലും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 5 ആണ് എന്നു പറയാം. ഒരു ചാക്ക് സിമന്റും അഞ്ച് ചാക്ക് മണലും ഉപയോഗിച്ചാലും അംശബന്ധം ഇതുതന്നെ. എന്നാൽ ഇഷ്ടിക കെട്ടുന്നതിന് ഇത്രയും സിമന്റ് വേണ്ടിവരില്ല. അവിടെ ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് 1 : 10 എന്നോ 1 : 12 എന്നോ ഉള്ള അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കും സിമന്റും മണലും ചേർക്കുന്നത്.

ഭാഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

ഒരു വസ്തുവിന്റെ തന്നെ ഭാഗങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യാനും അംശബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം; ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രത്തിൽ ഇളംനിറമുള്ള ഭാഗം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗമാണ്; കടുംനിറമുള്ള ഭാഗം വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗവും.



ഇവ രണ്ടും ചേർന്നാൽ മുഴുവൻ വൃത്തമായി. ഈ രണ്ടുഭാഗങ്ങളുടെയും വലുപ്പം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 5



ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധം $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ എന്ന രണ്ടു ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ഇത്തരം സന്ദർങ്ങളിലെല്ലാം രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, തുക 1 ഉം ഛേദങ്ങൾ തുല്യവും ആയ ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ്.

മതിയാകാതെ വന്നപ്പോൾ വീണ്ടും 15 ലിറ്റർ പച്ചയെടുത്തു. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ള ചേർക്കണം?

ആദ്യത്തെ നിറം തന്നെ കിട്ടണമെങ്കിൽ, നിറങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറരുത്.

ആദ്യം പച്ചയും വെള്ളയും എന്ത് അംശബന്ധത്തിലാണ് കലർത്തിയത്?

അതായത്, 5 ലിറ്റർ പച്ചയ്ക്ക് 4 ലിറ്റർ വെള്ള എന്നാണ് കണക്ക്.

ഈ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെ ആകണമെങ്കിൽ 15 ലിറ്റർ പച്ചയ്ക്ക് എത്ര ലിറ്റർ വെള്ള ചേർക്കണം?

5 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 15?

അപ്പോൾ 4 ലിറ്ററിന്റെ 3 മടങ്ങ് വെള്ള ചേർക്കണം; അതായത് 12 ലിറ്റർ.

ഇതേ പച്ചനിറം കിട്ടാൻ, 16 ലിറ്റർ വെള്ളയുടെ കൂടെ എത്ര ലിറ്റർ പച്ച ചേർക്കണം?

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ദോശയുണ്ടാക്കാൻ, 6 കിണ്ണം അരിക്ക് 2 കിണ്ണം ഉഴുന്ന് എന്നാണ് കണക്ക്. 9 കിണ്ണം അരിയെടുത്താൽ, എത്ര കിണ്ണം ഉഴുന്നെടുക്കണം?
- നിസാറിന്റെ വീടിന്റെ ചുവര് തേയ്ക്കുന്നതിന് സിമന്റും മണലും 1:5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഉപയോഗിച്ചത്. ഇതിനായി 45 ചാക്ക് സിമന്റ് വാങ്ങി എത്ര ചാക്ക് മണൽ വാങ്ങണം?
- വീടിന് ചായം തേയ്ക്കുമ്പോൾ 24 ലിറ്റർ ചായത്തിന്റെ കൂടെ 3 ലിറ്റർ ടർപെന്റൈൻ ആണ് ചേർത്തത്. 32 ലിറ്റർ ചായത്തിന്റെ കൂടെ എത്ര ലിറ്റർ ടർപെന്റൈൻ ചേർക്കണം?
- ഒരു പഞ്ചായത്തിലെ ഒന്നാം വാർഡിൽ സ്ത്രീകളുടെയും പുരുഷൻമാരുടെയും എണ്ണം 11:10 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇവിടെ 3311 സ്ത്രീകളാണുള്ളത്. ഇവിടെ എത്ര പുരുഷന്മാരുണ്ട്? ആകെ ജനസംഖ്യ എത്രയാണ്?
- ഒരു സ്കൂളിലെ അധ്യാപകരിൽ സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണവും പുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 5:1 ആണ്. 6 പേർ പുരുഷന്മാരാണ്. സ്ത്രീകൾ എത്രയാണ്?
- അലിയും അജയനും ചേർന്ന് ഒരു കട തുടങ്ങി. അലി 5000 രൂപയും അജയൻ 3000 രൂപയുമാണ് മുതൽ മുടക്കിയത്. ഒരു മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കിട്ടിയ ലാഭം അവർ മുടക്കുമുതലിന്റെ അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചു. അലിക്ക് 2000 രൂപ കിട്ടി. അജയന് എത്ര രൂപ കിട്ടി? ആകെ എത്ര രൂപയാണ് ലാഭം കിട്ടിയത്?

ഭാഗക്കണക്ക്

ഇഡ്ഡലി ഉണ്ടാക്കാൻ അരിയും ഉഴുന്നും 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് എടുക്കുന്നതെന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. അരിയും ഉഴുന്നും കൂടി ആകെ 9 കിണ്ണമാണ് എടുത്തത്. ഇതിൽ അരി എത്ര കിണ്ണമാണ്?

2 കിണ്ണം അരിയും 1 കിണ്ണം ഉഴുന്നുമെടുത്താൽ ആകെ 3 കിണ്ണമായി.

ഇവിടെ ആകെ 9 കിണ്ണം എടുത്തിട്ടുണ്ട്.

3 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 9?

അംശബന്ധം പാലിക്കാൻ, അരിയും ഉഴുന്നും 3 മടങ്ങു തന്നെ എടുക്കണം.

അപ്പോൾ അരി 6 കിണ്ണം, ഉഴുന്ന് 3 കിണ്ണം.
മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു സഹകരണസംഘത്തിൽ 600 പുരുഷന്മാരും 400 സ്ത്രീകളും അംഗങ്ങളാണ്. ഇവരിൽനിന്ന് 30 പേരുടെ പ്രവർത്തകസമിതി ഉണ്ടാക്കണം. അതിൽ പുരുഷന്മാരുടെയും സ്ത്രീകളുടെയും എണ്ണത്തിന്റെ അംശബന്ധം സംഘത്തിലേതു തന്നെ ആയിരിക്കണം. പ്രവർത്തക സമിതിയിൽ എത്ര പുരുഷന്മാരും എത്ര സ്ത്രീകളും ഉണ്ടായിരിക്കണം?

മൊത്തം സംഘത്തിൽ പുരുഷന്മാരുടെയും സ്ത്രീകളുടെയും അംശബന്ധം 3 : 2 ആണല്ലോ.

3 പുരുഷന്മാരും 2 സ്ത്രീകളും ചേർന്നാൽ 5 പേരായി. ഇവിടെ 30 പേരെയാണ് ആവശ്യം.

5 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 30?

അപ്പോൾ സമിതിയിൽ $3 \times 6 = 18$ പുരുഷന്മാരും $2 \times 6 = 12$ സ്ത്രീകളും ഉണ്ടായിരിക്കണം.

ഒരു കണക്കുകൂടി നോക്കാം. സ്കൂളിലൊരു പച്ചക്കറിത്തോട്ടമുണ്ടാക്കാൻ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലം കയർകെട്ടി തിരിക്കണം. ഹരിയും മേരിയും 24 മീറ്റർ നീളമുള്ള കയർകൊണ്ട് ചതുരമുണ്ടാക്കാൻ തുടങ്ങി. വീതിയും നീളവും 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ നന്നായിരിക്കുമെന്ന് വിമല ടീച്ചർ പറഞ്ഞു. വീതിയും നീളവും എത്ര മീറ്റർ ആയിരിക്കണം?
കയറിന്റെ നീളം 24 മീറ്ററാണ്. അതിനാൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും ഇതുതന്നെ.

വീതിയും നീളവും 3 മീറ്റർ, 5 മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

അംശബന്ധമെന്നാൽ

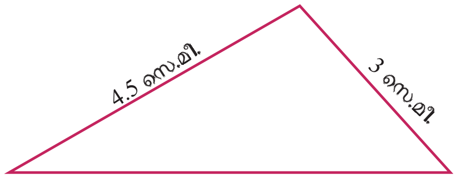
രണ്ടളവുകളുടെ അംശബന്ധം മാത്രം അറിഞ്ഞാൽ അത് ഓരോന്നും എത്രയാണെന്നു പറയാൻ കഴിയില്ല. പക്ഷേ, അവ തമ്മിൽ പലതരത്തിൽ താരതമ്യം ചെയ്യാം.
ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു പാത്രങ്ങളുടെ ഉള്ളളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 എന്നതിനെ ചുവടെപ്പറയുന്നപോലെയെല്ലാം വ്യാഖ്യാനിക്കാം.

- ചെറിയ പാത്രം നിറയ്ക്കാൻ, വലിയ പാത്രത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം വെള്ളം മതി.
- വലിയ പാത്രം നിറയ്ക്കാൻ, ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെ $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ മടങ്ങ് വെള്ളം വേണം.
- ചെറിയ പാത്രത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം വെള്ളമെടുത്താലും, വലിയ പാത്രത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം വെള്ളമെടുത്താലും ഒരേ അളവാണ് കിട്ടുന്നത്.
- രണ്ടു പാത്രത്തിലും നിറയെ വെള്ളമെടുത്ത് മറ്റൊരു പാത്രത്തിലൊഴിച്ചാൽ, അതിന്റെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗം ചെറിയ പാത്രത്തിൽനിന്നും, $\frac{3}{5}$ വലിയ പാത്രത്തിൽനിന്നും കിട്ടിയതാണ്.

രണ്ടു കയറുകളുടെ നീളം 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു പറഞ്ഞാൽ, ഇതുപോലെ ഏതെല്ലാം കാര്യങ്ങളാണ് അതിൽനിന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുക?

മൂന്ന് അളവുകൾ

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ.



ഇതിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണ്, ഏറ്റവും വലിയ വശം. ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ ഒന്നരമടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം.
അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ഏറ്റവും ചെറിയ വശവും ഏറ്റവും വലിയ വശവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 2.
ഏറ്റവും ചെറിയ വശവും ഇടത്തരം വശവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3.
ഇടത്തരം വശവും ഏറ്റവും വലിയ വശവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?
ഇക്കാര്യങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറയാം: 1.5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചരടുകൊണ്ടളന്നാൽ, ഏറ്റവും ചെറിയവശത്തിന്റെ നീളം 2, ഇടത്തരം വശം 3, ഏറ്റവും വലിയ വശം 4.
ഇതു ചുരുക്കി, മൂന്നു വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4 എന്നു പറയാം.

16 ന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് 24?

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

അപ്പോൾ വീതി, 3 മീറ്ററിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങ്; അതായത്

$$3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ മീറ്റർ}$$

നീളം, 5 മീറ്ററിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങ്; അതായത്

$$5 \times 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ മീറ്റർ}$$

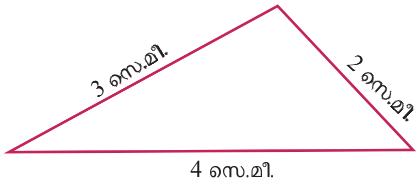
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- സുഹ്റയും സീതയും ചേർന്ന് ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. സുഹ്റ 40000 രൂപയും സീത 30000 രൂപയും മുടക്കി. ലാഭമായി കിട്ടിയ 7000 രൂപ മുടക്കുമുതലിന്റെ അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചു. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ വീതം കിട്ടി?
- ജോണും രമേശും കൂടി ഒരു ജോലി കരാറെടുത്തു. ജോൺ 7 ദിവസവും രമേശ് 6 ദിവസവും ജോലി ചെയ്തു. കൂലിയായി കിട്ടിയ 6500 രൂപ ജോലി ചെയ്ത ദിവസങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചെടുത്തു. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ വീതം കിട്ടി?
- ഒരു രേഖീയ ജോടിയിലെ കോണുകൾ 4:5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഓരോ കോണിന്റെയും അളവ് എത്രയാണ്?
- 9 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB എന്നൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിൽ P എന്ന കുത്തിടണം. AP, PB എന്നിവയുടെ നീളങ്ങൾ 1: 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായിരിക്കണം. A യിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് P അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ടത്? കണക്കുകൂട്ടി അടയാളപ്പെടുത്തുക.
- 15 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനെ 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദു ഇതിൽ അടയാളപ്പെടുത്തണം. നീളങ്ങൾ കണക്കാക്കി ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

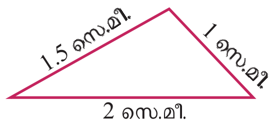
- സീതയും സോബിയും ഒരു തുക 3 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വീതിച്ചപ്പോൾ സീതയ്ക്ക് 480 രൂപ കിട്ടി. ആകെ എത്ര രൂപയാണ് വീതിച്ചത്?
- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമല്ലാത്ത കോണുകൾ 1:4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഈ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.
- 30 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവും വശങ്ങളുടെ നീളം 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇതേ ചുറ്റളവിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2:3 ആയ ചതുരവും 3 : 7 ആയ ചതുരവും വരയ്ക്കുക. മൂന്നു ചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണക്കണക്ക്

വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 2 : 3 : 4 ആയ എത്ര ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്?
വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ ആകാം.



അല്ലെങ്കിൽ 1 സെന്റിമീറ്റർ, 1.5 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ.



സെന്റിമീറ്ററിന് പകരം മീറ്ററാക്കാം.
അങ്ങനെ പലതും.
ഇങ്ങനെയുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഏറ്റവും ചെറിയ വശം ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?
ഇടത്തരം വശമോ?
ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശം?
വശങ്ങളുടെ ബന്ധം 5 : 7 : 8 ഉം ചുറ്റളവ് 80 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?
ചുറ്റളവ് 1 മീറ്ററായാലോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഏറ്റവും ചെറിയ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് പറയുന്നു.			
• രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധത്തെ വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിലുള്ള രണ്ട് അളവുകളിൽ ഒന്നിന്റെ അളവ് അറിഞ്ഞിരുന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ അളവ് എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു സംഖ്യയെ നിശ്ചിത അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.			
• അംശബന്ധം ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			

10

പണമിടപാടുകൾ

കച്ചവടക്കണക്കുകൾ

വളരെ പണ്ടുകാലം മുതൽ തന്നെ മനുഷ്യർ പലതരം കച്ചവടങ്ങൾ നടത്തിയിരുന്നു. ഒരു പശുവിന് രണ്ട് ആട് എന്നോ, ഒരു ചക്കയ്ക്ക് അഞ്ചു മാങ്ങ എന്നോ ഉള്ള കൈമാറ്റക്കച്ചവടങ്ങളാണ് ആദ്യകാലത്തു നടന്നിരുന്നത്.

തുടർന്ന് യഥാർത്ഥ വസ്തുക്കൾക്കുപകരം അവയുടെ വിലയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പലതരം നാണയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങി. ഇത്തരം പണമിടപാടുകൾ കൃത്യമാക്കാൻ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ ആവശ്യമായിവന്നു അങ്ങനെ ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകളും ഗണിതപഠനത്തിന്റെ ഭാഗമായി.

പച്ചക്കറിവില

നാഗർകോവിലിലെയും തിരുവനന്തപുരത്തെയും ചില പച്ചക്കറികളുടെ വിലകളാണ് പട്ടികയിൽ.

പച്ചക്കറിവില (1 കിലോഗ്രാമിന്)		
ഇനം	തിരുവനന്തപുരം	നാഗർകോവിൽ
ബീറ്റ്റൂട്ട്	35 രൂപ	24 രൂപ
കാബേജ്	45 രൂപ	30 രൂപ
കാരറ്റ്	60 രൂപ	50 രൂപ
പച്ചമുളക്	76 രൂപ	60 രൂപ

വിലവ്യത്യാസത്തിനു കാരണമെന്തായിരിക്കും?

- കടത്തുകൂലി
-
-

മജീദ് ഒരു പച്ചക്കറിക്കച്ചവടക്കാരനാണ്. അയാൾ 4000 രൂപയ്ക്ക് ചേന വാങ്ങി. ഒരു കിലോഗ്രാമിന് 20 രൂപയാണ് കൊടുത്തത്. അവിടെ വച്ചുതന്നെ ഒരു കിലോഗ്രാമിന് 25 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റു. ഈ കച്ചവടത്തിൽ അയാൾക്ക് എത്ര രൂപ ലാഭം കിട്ടി?

- എത്ര കിലോഗ്രാം ചേനയാണ് വാങ്ങിയത്?
- ആകെ എത്ര രൂപയ്ക്കാണ് വിറ്റത്?
- വാങ്ങാൻ എത്ര രൂപയാണ് ചെലവായത്?
- ലാഭം എത്ര രൂപയാണ്?

അടുത്ത ദിവസവും മജീദ് കിലോഗ്രാമിന് 20 രൂപവച്ച് 200 കിലോഗ്രാം ചേന വാങ്ങി. അടുത്ത ചന്തയിലെത്തിക്കുന്നതിന് വാഹനത്തിന് 200 രൂപ വാടകയായി. അവിടെ കിലോഗ്രാമിന് 25 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റു. അയാൾക്ക് ആകെ എത്ര രൂപ ലാഭം കിട്ടി?

ഇവിടെ മജീദ് ആകെ എത്ര രൂപയാണ് ചെലവാക്കിയത്? കണ്ടെത്താൻ ചേനയുടെ വിലയോടൊപ്പം വാഹനവാടക കൂടി കൂട്ടണമല്ലോ.

ഒരുമ സഹകരണ സംഘം ഒരു കിലോഗ്രാമിന് 25 രൂപ വച്ച് 100 കിലോഗ്രാം ഗോതമ്പ് വാങ്ങി. അത് കഴുകി ഉണക്കി പൊടിച്ച് കവറിലാക്കുന്നതിന് 500 രൂപ ചെലവായി. ഒരു പാക്കറ്റ് പൊടിക്ക് 35 രൂപ നിരക്കിൽ 100 പാക്കറ്റുകൾ വിൽപ്പനയ്ക്ക് തയാറാക്കി. ഇതിൽ 20 പാക്കറ്റ് ഗോതമ്പുപൊടി കേടായിപ്പോയി. ഈ കച്ചവടത്തിൽ അവർക്ക് ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര രൂപ?

- സെന്റിന് 75000 രൂപ നിരക്കിൽ തോമസ് 10 സെന്റ് സ്ഥലം വാങ്ങി. 50000 രൂപ മുടക്കി ചുറ്റുമതിൽ കെട്ടി. കിണർ കുഴിച്ചതിന് 60000 രൂപയായി. സെന്റിന് 90000 രൂപ നിരക്കിൽ വിറ്റു. ഈ കച്ചവടത്തിൽ അയാൾക്ക് ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര രൂപ?
- ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ക്വിന്റലിന് 19850 രൂപ നിരക്കിൽ 20 ക്വിന്റൽ റബ്ബർഷീറ്റ് വാങ്ങി. അത് കടയിലെത്തിക്കുന്നതിന് 3000 രൂപ ചെലവായി. റബ്ബറിന്റെ വിലയിടിഞ്ഞതിനാൽ ക്വിന്റലിന് 18250 രൂപയ്ക്ക് വിൽക്കേണ്ടിവന്നു. അയാൾക്ക് എത്ര രൂപ നഷ്ടം ഉണ്ടായി?

പഴക്കച്ചവടം

സജിയുടെ പഴക്കടയിലെ വിലവിവരപ്പട്ടികയാണിത്:

ഇനം	വില (1 കിലോഗ്രാമിന്)
ഓറഞ്ച്	60 രൂപ
മുന്തിരി	52 രൂപ
ആപ്പിൾ	110 രൂപ
മാമ്പഴം	65 രൂപ

ക്വിന്റലും ടണ്ണും

ആദ്യകാലത്ത് നീളവും ഭാരവുമെല്ലാം അളക്കാൻ പല സ്ഥലങ്ങളിലും പല ഏകകങ്ങളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഇപ്പോൾ മിക്കവാറും എല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും ഇവയെല്ലാം ഏകീകരിച്ച് മെട്രിക് രീതിയിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

പണ്ടുകാലത്തുതന്നെ ഭാരമളക്കാൻ അടിസ്ഥാന ഏകകത്തിന്റെ നൂറുമടങ്ങ് എന്ന അർത്ഥത്തിൽ പലദേശങ്ങളിലും ക്വിന്റൽ എന്ന ഏകകം ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. മെട്രിക് രീതി നിലവിൽ വന്നപ്പോൾ ഇത് 100 കിലോഗ്രാം എന്ന് നിജപ്പെടുത്തി.

ആദ്യകാലത്ത് ഇംഗ്ലണ്ടിലും മറ്റും ഒരു ടൺ (ton) എന്നാൽ 2240 പൗണ്ട് (ഇന്നത്തെ 1016 കിലോഗ്രാം) എന്നായിരുന്നു കണക്ക്. മെട്രിക് രീതിയിൽ ഒരു ടൺ (tonne) എന്നത് 1000 കിലോഗ്രാം എന്നാണ് കണക്ക്. വേർതിരിച്ചറിയാനായി ഇതിനെ മെട്രിക് ടൺ എന്നും പറയാറുണ്ട്.

മെട്രിക് രീതിയിലെ പൊതുവായ പേരുകളനുസരിച്ച് ഒരു ടൺ എന്നത് ഒരു മെഗാഗ്രാം (1000000 ഗ്രാം) ആണ്.

കച്ചവടശൃംഖല

ഇന്നത്തെ ലോകത്തിൽ പലതരം വസ്തുക്കൾ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്നവരും അവസാനം വാങ്ങി ഉപയോഗിക്കുന്നവർക്കുമിടയിൽ അനേകം കണ്ണികളുണ്ട്. ഉല്പാദകരിൽ നിന്ന് പലതരം കൈമാറ്റങ്ങളിലൂടെയാണ് ഇവ അവസാന ഉപയോക്താവിലെത്തുന്നത് എന്നർത്ഥം. ലളിതമായി പറഞ്ഞാൽ പല ഉല്പാദകരിൽ നിന്നായി കച്ചവട വസ്തുക്കൾ വാങ്ങി സംഭരിക്കുകയും അതു മറ്റു കച്ചവടക്കാർക്കോ സ്ഥാപനങ്ങൾക്കോ വില്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നവരാണ് മൊത്തകച്ചവടക്കാർ (whole salers). ഉല്പന്നങ്ങൾ അവസാനം ഉപയോക്താക്കൾക്ക് വില്ക്കുന്നവരാണ് ചില്ലറ വില്പനക്കാർ (retailer). ഇവരുടെ ഇടയ്ക്ക് മറ്റനേകം കൈമാറ്റങ്ങൾ നടക്കാറുണ്ട്. ഓരോ ഘട്ടത്തിലേയും ചിലവുകളനുസരിച്ച് വില വർദ്ധിക്കുന്നുമുണ്ട്.

അയാൾ ഓറഞ്ചും മാമ്പഴവും കിലോഗ്രാമിന് 50 രൂപയ്ക്കാണ് വാങ്ങുന്നത്. മുന്തിരി കിലോഗ്രാമിന് 40 രൂപയ്ക്കും ആപ്പിൾ 100 രൂപയ്ക്കും. ഏതു കച്ചവടമാണ് അയാൾക്ക് ഏറ്റവും ആദായകരം?

50 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങുന്ന ഓറഞ്ച് 60 രൂപയ്ക്കും അതേ വിലയ്ക്ക് വാങ്ങുന്ന മാമ്പഴം 65 രൂപയ്ക്കുമാണ് വിൽക്കുന്നത്. ഇതിൽ ആദായകരം മാമ്പഴമാണല്ലോ. കാരണം, ഒരേ തുക ചെലവാക്കുമ്പോൾ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നത് മാമ്പഴമാണ്.

100 രൂപയ്ക്ക് ആപ്പിൾ വാങ്ങി 110 രൂപയ്ക്കു വിൽക്കുമ്പോൾ ലാഭം 10 രൂപ.

50 രൂപയ്ക്ക് ഓറഞ്ച് വാങ്ങി 60 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റാൽ എത്ര രൂപ ലാഭം കിട്ടും?

ഇവയിൽ ഏതു കച്ചവടമാണ് മെച്ചമെന്ന് എങ്ങനെ തീരുമാനിക്കും?

50 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ ഓറഞ്ച് വിറ്റപ്പോഴും 100 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ ആപ്പിൾ വിറ്റപ്പോഴും ലാഭം 10 രൂപയാണ്. അതുകൊണ്ട് കുറഞ്ഞ മുതൽമുടക്കുള്ള ഓറഞ്ചിന്റെ കച്ചവടമാണ് കൂടുതൽ ആദായകരം.

മുന്തിരി 40 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങി 52 രൂപയ്ക്കാണ് വിൽക്കുന്നത്.

ഓറഞ്ച് 50 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങി 60 രൂപയ്ക്കാണ് വിൽക്കുന്നത്.

ഇവയിൽ ഏതിന്റെ കച്ചവടമാണ് ആദായകരം?

ഇവ രണ്ടും 100 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയാലോ?

100 രൂപയ്ക്ക് 2 കിലോഗ്രാം ഓറഞ്ച് വാങ്ങാം. അത് $60 \times 2 = 120$ രൂപയ്ക്ക് വിൽക്കുന്നു. ലാഭം 20 രൂപ.

100 രൂപയ്ക്ക് എത്ര കിലോഗ്രാം മുന്തിരി വാങ്ങാം?

80 രൂപയ്ക്ക് 2 കിലോഗ്രാം വാങ്ങാം. മിച്ചമുള്ള 20 രൂപയ്ക്ക് $\frac{1}{2}$ കിലോഗ്രാം കൂടി. ആകെ $2\frac{1}{2}$ കിലോഗ്രാം. ഇത് എത്ര രൂപയ്ക്കാണ് വിൽക്കുന്നത്?

$$52 \times 2\frac{1}{2} = 104 + 26 = 130 \text{ രൂപ}$$

ലാഭം = 30 രൂപ

ഓരോന്നിനും ചെലവായത് 100 രൂപ എന്നു കണക്കാക്കിയപ്പോഴാണ് ഓറഞ്ച് കച്ചവടത്തേക്കാൾ ആദായകരം മുന്തിരിക്കച്ചവടമാണെന്നു തിരിച്ചറിഞ്ഞത്.

ഈ രീതി എളുപ്പമാക്കാൻ ശതമാനം ഉപയോഗിക്കാം.

ഓറഞ്ച് വിൽക്കുമ്പോൾ ലാഭം, ചെലവായതിന്റെ $\frac{10}{50}$ = $\frac{1}{5}$ ഭാഗമാണ്.

ശതമാനത്തിൽ പറഞ്ഞാലോ?

$\frac{1}{5}$ ഭാഗമെന്നാൽ, $\frac{1}{5} \times 100 = 20$ ശതമാനം

മുന്തിരി വിൽക്കുമ്പോഴത്തെ ലാഭം ചെലവായതിന്റെ $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ ഭാഗമാണ്

ഇതിനെ ശതമാനമാക്കിയാൽ $\frac{3}{10} \times 100 = 30\%$.

ഇതുപോലെ,

ആപ്പിളിന്റെ ലാഭം, $\frac{10}{100} \times 100 = 10\%$

മാമ്പഴത്തിന്റെ ലാഭം, $\frac{15}{50} \times 100 = 30\%$

അപ്പോൾ 30% വീതം ലാഭം കിട്ടിയ മുന്തിരിയും മാമ്പഴവുമാണ് കൂടുതൽ ആദായകരം.

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം:

- ഒരാൾ 650 രൂപയ്ക്ക് നാളികേരം വാങ്ങി 598 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റു. നഷ്ടം എത്ര ശതമാനമാണ്?
  52 രൂപയാണ് നഷ്ടം

ഇത് ചെലവായതിന്റെ $\frac{52}{650} = \frac{2}{25}$ ഭാഗമാണ്.

ശതമാനമാക്കിയാൽ $\frac{52}{650} \times 100 = 8\%$

പരമാവധി ചില്ലറ വില

ഇക്കാലത്ത് കുടിവെള്ളമടക്കമുള്ള ദ്രാവകങ്ങളും പലതരം ധാന്യങ്ങളടക്കമുള്ള ഭക്ഷ്യവസ്തുക്കളും സോപ്പ്, പേസ്റ്റ് മുതലായവയുമെല്ലാം കൂടുകളിലും കുപ്പികളിലുമാണ് വില്ക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിൽ ഇങ്ങനെ അടച്ചുവില്ക്കുന്നവയിലെല്ലാം ഏറ്റവും കൂടിയ ചില്ലറ വില (maximum retail price - MRP) രേഖപ്പെടുത്തണമെന്നാണ് നിയമം. എല്ലാ നികുതികളും ചേർന്നതാണ് ഈ വില. പലപ്പോഴും ചില്ലറവില്പനക്കാർ MRP യേക്കാൾ കുറഞ്ഞ വിലയ്ക്ക് സാധനങ്ങൾ വില്ക്കാറുണ്ട്. എന്നാൽ ഈ വിലയെക്കാൾ കൂടുതൽ വാങ്ങുകയാണെങ്കിൽ ഉപയോക്താവിന് ബന്ധപ്പെട്ട അധികാരികൾക്ക് പരാതികൊടുക്കാം.

- 5000 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ അലമാര 5600 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശതമാനം?
- 12000 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ ടി.വി. 10200 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റാൽ നഷ്ടം എത്ര ശതമാനമാണ്?
- അഖിൽ ഒരു മത്സ്യവിൽപ്പനക്കാരനാണ്. ഒരു ദിവസം കിലോഗ്രാമിന് 140 രൂപ നിരക്കിൽ 12 കിലോഗ്രാം മത്സ്യം വാങ്ങി. അത് കടയിൽ എത്തിക്കാൻ 120 രൂപ ചെലവായി. ഇതിൽ 4 കിലോഗ്രാം മത്സ്യം കേടുവന്നു. ബാക്കിയുള്ളത് കിലോഗ്രാമിന് 180 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റു. അയാൾക്ക് ഈ കച്ചവടത്തിൽ ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര ശതമാനം?
- ഒമേഗ സ്റ്റോഴ്സിൽ 1728 രൂപയ്ക്ക് ഒരു സീലിങ് ഫാൻ വിൽക്കുമ്പോൾ 128 രൂപ ലാഭം കിട്ടുന്നു. 2616 രൂപയ്ക്ക് ഒരു പെഡസ്റ്റൽ ഫാൻ വിൽക്കുമ്പോൾ 216 രൂപ ലാഭം കിട്ടുന്നു. ഏതു ഫാൻ വിൽക്കുന്നതാണ് കച്ചവടക്കാരന് കൂടുതൽ ആദായകരം?
- ഒരു ചെറുകിട കച്ചവടക്കാരൻ കിലോഗ്രാമിന് 400 രൂപ നിരക്കിൽ 150 കിലോഗ്രാം കുരുമുളക് വാങ്ങി ഒരു കിലോഗ്രാമിന് 60 രൂപ വീതം ലാഭമെടുത്ത് വിൽക്കുന്നു.
  - വാങ്ങിയത് ആകെ എത്ര രൂപയ്ക്കാണ്?
  - വിറ്റത് ആകെ എത്ര രൂപയ്ക്കാണ്?
  - ആകെ ലാഭം എത്ര രൂപ?
  - ലാഭശതമാനം എത്രയാണ്?

മറ്റു ചില കണക്കുകൾ

ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഇസ്തിരിപ്പെട്ടി 1200 രൂപയ്ക്കാണ് വാങ്ങിയത്. അതു വിൽക്കുമ്പോൾ 12 % ലാഭം ലഭിക്കണമെന്ന് അയാൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. എങ്കിൽ എത്ര രൂപയ്ക്കാണ് ആ ഇസ്തിരിപ്പെട്ടി വിൽക്കേണ്ടത്?

ഇവിടെ 1200 രൂപ കൊടുത്താണ് ഇസ്തിരിപ്പെട്ടി വാങ്ങിയത്.

അതിന്റെ 12% ലാഭം വേണം.

അതായത്, $1200 \times \frac{12}{100} = 144$ രൂപ

അങ്ങനെയും ഒരു കച്ചവടം

ഒരാൾ 10 രൂപയ്ക്ക് 12 പെൻസിൽ എന്ന നിരക്കിൽ വാങ്ങി 10 പെൻസിലിന് 12 രൂപ എന്ന നിരക്കിൽ വില്ക്കുന്നു. ഈ കച്ചവടത്തിൽ ലാഭമാണോ നഷ്ടമാണോ? എത്ര ശതമാനം?

ഇനി വിൽക്കേണ്ട വില കാണാൻ 1200 രൂപയോട് ലാഭം കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ.
നേരിട്ട് 1200 രൂപയുടെ 112% കണ്ടാലും മതി.

$$1200 \times \frac{112}{100} = 1344 \text{ രൂപ}$$

ഒരു കച്ചവടത്തിൽ 10% നഷ്ടമാണെങ്കിൽ മുടക്കിയ തുകയുടെ എത്ര ശതമാനമാണ് വിറ്റവില?

ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വിറ്റവില കണക്കാക്കുക

മുടക്കുമുതൽ	ലാഭം/നഷ്ടം
1500	15% ലാഭം
2400	20% നഷ്ടം
8000	8% ലാഭം
1650	13% നഷ്ടം

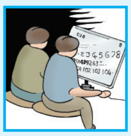
ഒരു സൈക്കിൾ 4500 രൂപയ്ക്ക് വിറ്റപ്പോൾ 10% നഷ്ടം ഉണ്ടായി. ഈ സൈക്കിളിന് കച്ചവടക്കാരൻ ആദ്യം എത്ര രൂപ ചെലവാക്കിയിട്ടുണ്ടാവും? നഷ്ടം 10% ആയതിനാൽ, ആദ്യം ചെലവായതിന്റെ 90% ആണ് വിറ്റവില.
അതായത്,

$$\text{മുടക്കുമുതൽ} \times \frac{90}{100} = 4500$$

ഇതിൽ നിന്ന്, മുടക്കുമുതൽ

$$= 4500 \times \frac{10}{9} = 5000 \text{ രൂപ}$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.



- മുടക്കുമുതൽ കണക്കാക്കുക.

വിറ്റവില	ലാഭം/നഷ്ടം
4440	11% ലാഭം
8280	8% നഷ്ടം
6160	12% നഷ്ടം
1695	13% ലാഭം

- 270 രൂപയ്ക്ക് 10 കിലോഗ്രാം തക്കാളി വാങ്ങി. അതിൽ ഒരു കിലോഗ്രാം തക്കാളി കേടായിപ്പോയി. അയാൾക്ക് 20% ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ളത് ഒരു കിലോഗ്രാമിന് എത്ര രൂപ നിരക്കിൽ വിൽക്കണം?
- ഷൈൻ 9900 രൂപവീതം രണ്ടു മേശ വിറ്റപ്പോൾ ഒരു മേശയ്ക്ക് 10% ലാഭവും മറ്റേ മേശയ്ക്ക് 10%

കച്ചവടം കമ്പ്യൂട്ടറിലൂടെ

കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ വ്യാപകമായതോടെ, ഇന്റർനെറ്റ് വഴിയുള്ള കച്ചവടങ്ങൾ (e-commerce) ആരംഭിച്ചു. ഇത്തരം കച്ചവടം നടത്തുന്ന അനേകം സ്ഥാപനങ്ങൾ ഇന്ത്യയിലുമുണ്ട്. ഇവരുടെ വെബ്സൈറ്റിൽ വില്ക്കുന്ന സാധനങ്ങളുടെ ചിത്രവും വിലയുമെല്ലാം കാണാം. നമുക്ക് വേണ്ടത് തിരഞ്ഞെടുത്ത്, ഇന്റർനെറ്റിലൂടെ തന്നെ ബാങ്കിൽ നിന്ന് പണമടച്ചാൽ അത് വീട്ടിലെത്തിക്കാനുള്ള സംവിധാനം ഏർപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടാകും. ചില സ്ഥാപനങ്ങളും, സാധനം കിട്ടുമ്പോൾ മാത്രം പണം നല്കുന്ന രീതിയും നടപ്പിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

നഷ്ടവും വന്നു. കച്ചവടത്തിൽ ആകെ ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര ശതമാനം?

- 12000 രൂപയുടെ ഒരു അലക്കുയന്ത്രം വിൽക്കുമ്പോൾ കച്ചവടക്കാരന് 20% ലാഭം കിട്ടുന്നു. അതിന് അയാൾ എത്ര രൂപ മുടക്കിയിട്ടുണ്ടാകും? പുതുവർഷത്തിൽ അത് 1200 രൂപ കുറച്ചു വിൽക്കുന്നു. ഈ വില്പനയിൽ ലാഭമാണോ, നഷ്ടമാണോ? എത്ര ശതമാനം?

വിലക്കിഴിവ്

ഉത്സവകാലങ്ങളിൽ സാധാരണ ഇത്തരം പരസ്യങ്ങൾ കാണാറുണ്ടല്ലോ.

കച്ചവടം വർധിപ്പിക്കാനായി പല സ്ഥാപനങ്ങളും നേരത്തേ വിറ്റിരുന്ന വിലയിൽ ഇളവു നൽകാറുണ്ട്. ഇതിനാണ് വിലക്കിഴിവ് (Discount) എന്നു പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി ഒരു കടയിൽ നിന്ന് 500 രൂപ വില രേഖപ്പെടുത്തിയ ഒരു ഷർട്ട് വാങ്ങുമ്പോൾ 20% വിലക്കിഴിവ് നൽകുന്നു എന്നതിനർഥം ഷർട്ട് വാങ്ങുമ്പോൾ 500 രൂപയുടെ 20% കുറച്ചു കൊടുത്താൽ മതി എന്നാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, 500 രൂയുടെ 80% ആണ് വില.

$$500 \times \frac{80}{100} = 400 \text{ രൂപ}$$

ഷർട്ടിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിരുന്ന 500 രൂപ അതിന്റെ പരസ്യവിലയാണ്. പരസ്യവിലയുടെ ശതമാനമായാണ് സാധാരണയായി വിലക്കിഴിവ് പറയുന്നത്.

കുറച്ചതിന് വീണ്ടും കുറച്ചാൽ

50% വില കുറച്ചു നൽകിയിരുന്ന വസ്ത്രങ്ങൾ വീണ്ടും 50% വില കുറച്ച് വിൽക്കുന്നു.

ഈ വസ്ത്രങ്ങൾ സൗജന്യമായി ലഭിക്കുമോ?

കൂട്ടിയതിനു ശേഷം കുറച്ചാൽ

കച്ചവടക്കാരൻ ഒരു ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ വില 20% വർധിപ്പിച്ചതിനുശേഷം 20% വില കുറച്ചു വിൽക്കുന്നു. അയാൾക്ക് ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര ശതമാനം?

25% വില വർധിപ്പിച്ചതിനുശേഷം 20% ഡിസ്കൗണ്ട് നൽകി വിറ്റാലോ?

- ജോർജ് ഒരു അലമാര വാങ്ങിയപ്പോൾ 8% വിലക്കിഴിവ് കിട്ടി. 960 രൂപയാണ് കുറഞ്ഞത്. ആ അലമാരയുടെ പരസ്യവിലയെത്രയാണ്? എത്ര രൂപയാണ് ജോർജ് കൊടുത്തത്?

  വിലക്കിഴിവ് പരസ്യവിലയുടെ 8% ആണ്. അതായത്,

  $$\text{പരസ്യവില} \times \frac{8}{100} = 960 \text{ രൂപ}$$

  ഇതിൽ നിന്ന് പരസ്യവില, $960 \times \frac{100}{8} = 12000$ രൂപ

  എന്നു കണക്കാക്കാം.

  ഇനി പരസ്യവിലയിൽനിന്ന് കിഴിവ് കുറച്ചാൽ ജോർജ് കൊടുത്ത തുക കിട്ടും.

- ഒരു പവൻ (8 ഗ്രാം) സ്വർണത്തിന്റെ വില 22500 രൂപയാണ്. സ്വർണവിലയുടെ 6% ആണ് ആഭരണങ്ങളുടെ പണിക്കൂലി. ഒരു കട പണിക്കൂലിയിൽ 20% കിഴിവ് നൽകുന്നു. ഇവിടെ നിന്ന് ഒരു പവൻ തൂക്കമുള്ള ഒരു വള വാങ്ങാൻ എത്ര രൂപ കൊടുക്കണം?

  പണിക്കൂലി സ്വർണവിലയുടെ 6% ആണല്ലോ.

  $$\text{പണിക്കൂലി} = 22500 \times \frac{6}{100}$$

  $$= 1350 \text{ രൂപ}$$

ഈ 1350 രൂപയിൽ 20% കിഴിവ് നൽകുന്നതിനാൽ അതിന്റെ 80% കൊടുത്താൽ മതിയല്ലോ.

$$\text{വിലക്കിഴിവ് കഴിച്ചുള്ള പണിക്കൂലി} = 1350 \times \frac{80}{100}$$

ഇനി വളയുടെ വിലകാണാൻ സ്വർണവിലയോടൊപ്പം പണിക്കൂലികൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

- ഗാന്ധിജയന്തിക്ക് 30% വിലക്കിഴിവ് അനുവദിച്ചപ്പോൾ ഒരാൾ 3500 രൂപ കൊടുത്ത് ഖാദിവസ്ത്രങ്ങൾ വാങ്ങി. എത്ര രൂപ വിലയുള്ള വസ്ത്രങ്ങളാണ് അയാൾക്ക് കിട്ടിയത്?

  വിലയുടെ 30% ആണ് കുറച്ചത്. അപ്പോൾ കൊടുത്തത് 70%.

പലതരം കിഴിവുകൾ

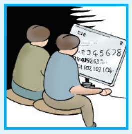
ഇന്ത്യയിൽ, അംഗീകൃത സ്ഥാപനങ്ങളിൽ നിന്ന് ഖാദി അല്ലെങ്കിൽ കൈത്തറി തുണിത്തരങ്ങൾ വാങ്ങുമ്പോൾ 10% വിലക്കിഴിവ് കിട്ടും. ചില വിശേഷ അവസരങ്ങളിൽ ഇത് 30% വരെ ആകാം. ഇതിനുള്ള തുക ഈ സ്ഥാപനങ്ങൾക്ക് സർക്കാർ നൽകും. ഈ വിലക്കിഴിവിന് ഇംഗ്ലീഷിൽ Rebate എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അമേരിക്ക പോലുള്ള രാജ്യങ്ങളിൽ Rebate എന്നതിന് മറ്റൊരു അർത്ഥമാണുള്ളത്. ഒരു സാധനം വാങ്ങിയശേഷം, ചില വിവരങ്ങൾ പൂരിപ്പിച്ച് അയച്ചാൽ വിലയുടെ ഒരു നിശ്ചിത ശതമാനം തിരിച്ചുകൊടുക്കുന്ന ഏർപ്പാടാണിത്.

അതായത്

$$\text{വില} \times \frac{70}{100} = 3500$$

ഇതിൽ നിന്ന് വില കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



- ടി.വി. വിൽക്കുന്ന കടയിലെ രണ്ടു പരസ്യങ്ങൾ നോക്കൂ:

20 ഇഞ്ച്	21 ഇഞ്ച്
11, 900 രൂപ	12900 രൂപ
20% കിഴിവ്	20% കിഴിവ്

- 10,000 രൂപ കൈയിലുള്ള ഒരാൾക്ക് ഇതിൽ ഏതു ടി.വി യാണ് വാങ്ങാൻ കഴിയുക?
- 20% കിഴിവ് ലഭിക്കുമ്പോൾ ഈ രണ്ടു ടി.വി കളുടെയും വിലകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര രൂപയാണ്?

- ഒരു ഫർണിച്ചർ കടയിൽ 15000 രൂപയുടെ കട്ടിലും 25000 രൂപയുടെ അലമാരയും ഒരുമിച്ചുവാങ്ങുന്നവർക്ക് അവ 36000 രൂപയ്ക്ക് നൽകും. എത്ര ശതമാനം കിഴിവാണ് അവർ നൽകുന്നത്?

- സൂസനും ഗായത്രിയും പുസ്തകമേളയിൽനിന്ന് 490 രൂപ വീതം വിലയുള്ള ഓരോ ഇംഗ്ലീഷ്-മലയാളം നിഘണ്ടു വാങ്ങി. 20% കിഴിവ് ലഭിക്കാനായി ഒരുമിച്ച് പണംകൊടുക്കാൻ തീരുമാനിച്ചു. 1000 രൂപയിൽ കൂടുതൽ വിലയ്ക്കുള്ള പുസ്തകം വാങ്ങിയാൽ 30% കിഴിവ് ലഭിക്കുമെന്ന് കച്ചവടക്കാരൻ പറഞ്ഞപ്പോൾ 60 രൂപ വീതം വിലയുള്ള ഓരോ ചിത്രരചനാ പുസ്തകം കൂടി രണ്ടുപേരും വാങ്ങി. ഒരുമിച്ചു പണം കൊടുത്തു.

പുസ്തകമേള

500 രൂപ വരെ
10% കിഴിവ്

500 - 1000 രൂപ
20% കിഴിവ്

1000 രൂപയുടെ
മുകളിൽ 30% കിഴിവ്

കിഴിവ് ശതമാനം

ഒരു കമ്പനി അവരുടെ 4 സോപ്പുകൾ ഒരുമിച്ചു വാങ്ങുമ്പോൾ അതേയിനത്തിലുള്ള ഒരു സോപ്പ് സൗജന്യമായി നൽകുന്നു. ഇത് എത്ര ശതമാനം ഡിസ്കൗണ്ട് നൽകുന്നതിന് തുല്യമാണ്?

ഇവിടെ നാലു സോപ്പിന്റെ വിലയ്ക്ക് അഞ്ചു സോപ്പാണല്ലോ കിട്ടുന്നത്. അതായത് അഞ്ചു സോപ്പിന്റെ വിലയിൽ ഒരു സോപ്പിന്റെ വില യാണ് ഇളവ്. ഇനി ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.

- രണ്ടുപേരും കൂടി എത്ര രൂപ കൊടുത്തു? ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപ ചെലവായി?
- രണ്ടുപേരും നിഘണ്ടു മാത്രം വാങ്ങി, ഒരുമിച്ചു പണം കൊടുത്താൽ ആകെ എത്ര രൂപയാകും? ഓരോരുത്തരുടെയും ചെലവ് എത്രയാകും?
- ഓരോരുത്തരും ഇതേ രണ്ടു പുസ്തകങ്ങൾ വെവ്വേറെ വാങ്ങിയാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര ചെലവാകും?

- ഖാദിവസ്ത്രാലയത്തിൽ നിന്ന് ചുവടെയുള്ള ബില്ലിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന തുണിത്തരങ്ങൾ വാങ്ങിയാൽ എത്ര രൂപ കൊടുക്കണം?

ഖാദിവസ്ത്രങ്ങൾ	
കോട്ടൺ	കിഴിവ് 30%
പോളിഎസ്റ്റർ	കിഴിവ് 20%
സിൽക്ക്	കിഴിവ് 20%

ഖാദി വസ്ത്രാലയം

നം: 777 തീയതി: ....

നമ്പർ	ഇനം	എണ്ണം	വില	രൂപ
1	കോട്ടൺ മുണ്ട്	1	350	
2	കോട്ടൺ ഷർട്ട്	1	550	
3.	പോളിഎസ്റ്റർ ഷർട്ട്	1	450	
4	സിൽക്ക് സാരി	1	1500	

- ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 2500 രൂപകൊടുത്തു വാങ്ങിയ ഫാൻ 40% വില വർധിപ്പിച്ച് 15% കിഴിവ് കൊടുത്തു വിൽക്കുന്നു. അത് എത്ര രൂപയ്ക്കാണ് വിൽക്കുന്നത്?
- 3600 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ ഒരു ഗ്യാസ്സ്റ്റൗ 10% കിഴിവ് അനുവദിച്ചു വിൽക്കുമ്പോൾ 20% ലാഭം ലഭിക്കണമെങ്കിൽ അതിന് എത്ര രൂപ പരസ്യവിലയിടണം?
- ഒരു ഫ്രിഡ്ജ് വാങ്ങുമ്പോൾ കച്ചവടക്കാരൻ ഒരു ഇസ്തിരിപ്പെട്ടി സൗജന്യമായി നൽകുന്നു. ഫ്രിഡ്ജ് 9000 രൂപയ്ക്കും ഇസ്തിരിപ്പെട്ടി 1000 രൂപയ്ക്കുമാണ് അയാൾ വാങ്ങിയത്. രണ്ടും കൂടി കൊടുക്കുമ്പോൾ 20% ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ ഫ്രിഡ്ജ് എത്ര രൂപയ്ക്ക് വിൽക്കണം?

പലിശയുടെ ചരിത്രം

ഏതാണ്ട് അയ്യായിരം കൊല്ലങ്ങൾക്കു മുൻപാണ് മനുഷ്യർ സംഘടിതമായി വിപുലമായ കൃഷി ചെയ്തു തുടങ്ങിയത്. അക്കാലത്ത് വിത്തും കന്നുകാലികളും മറ്റും പരസ്പരം കടം കൊടുത്തിരുന്നു. ഒരു വിത്തിൽ നിന്ന് അനേകം വിത്തുകൾ ഉണ്ടാക്കാമെന്നതിനാൽ, കടം തീർക്കുമ്പോൾ വാങ്ങിച്ചതിൽ കൂടുതൽ തിരികെ കൊടുത്തിരുന്നു.

കാർഷിക ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ തന്നെയായിരുന്നു അന്നത്തെ പണം. ലോഹനാണയങ്ങൾ പണമായി ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയപ്പോഴാണ് പ്രശ്നങ്ങൾ ഉണ്ടായത്. വിത്തിൽ നിന്ന് വിത്തുണ്ടാകുന്നതുപോലെ ലോഹത്തിൽ നിന്ന് ലോഹമുണ്ടാകില്ലല്ലോ?

വിളവുകൾ മോശമാകുന്ന കാലത്ത് സാധനങ്ങൾക്ക് വില കൂടും. കൃഷിക്കാരന് പണം കടം വാങ്ങേണ്ടിവരും. വിളവ് കൂടുതലാകുമ്പോൾ വില കുറയും. കൃഷിക്കാരന് കടം തിരിച്ചടയ്ക്കാനാവശ്യമായ പണം കിട്ടാതെയും വരും.

പലിശ

ബാങ്കുകളുടെ മുന്നിൽ ഇത്തരം പരസ്യങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ടാവും. പണം നിക്ഷേപിക്കുന്നതിനും കടം വാങ്ങുന്നതിനും നാം ബാങ്കുകളെ സമീപിക്കാറുണ്ടല്ലോ.

സഹകരണബാങ്ക്
സ്ഥിരനിക്ഷേപങ്ങൾക്ക്
11% വരെ പലിശ
45 ദിവസം വരെ 6%

ആകർഷകമായ പലിശനിരക്കുകൾ
സ്വർണപ്പണയത്തിന്
9% പലിശ
കാർഷികവായ്പയ്ക്ക് 4% മാത്രം

അമൽ ഒരു ബാങ്കിൽ 15000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 16500 രൂപ തിരികെ ലഭിച്ചു. എത്ര രൂപയാണ് അധികം കിട്ടിയത്?

ഇങ്ങനെ അധികമായി കിട്ടുന്ന രൂപയെ പലിശ (Interest) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ബാങ്കിൽനിന്നു കടം വാങ്ങിയാലോ?

പലിശനിരക്ക്

തോമസ് 50000 രൂപ ബാങ്കിൽനിന്ന് കാർഷികവായ്പയെടുത്തു. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 52000 രൂപയാണ് തിരിച്ചുകൊടുക്കേണ്ടി വന്നത്.

എത്ര രൂപയാണ് പലിശ?

ഇത് കടംവാങ്ങിയ 50000 രൂപയുടെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

$$\frac{2000}{50000} \times 100 = 4\%$$

ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കടം വാങ്ങിയതിന്റെ 4% ആണ് അധികമായി തിരിച്ചുകൊടുത്തത്?

ഇതിനെ പലിശനിരക്ക് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ 15000 രൂപ നിക്ഷേപത്തിന് ഒരു വർഷത്തിന് 1500 രൂപ പലിശ കിട്ടിയാൽ പലിശനിരക്ക്

$$\frac{1500}{15000} \times 100 = 10\%$$

നന്ദിനി ബാങ്ക്
100 രൂപയ്ക്ക് ഒരു
മാസം ഒന്നര രൂപ
പലിശ

കെ.എസ്.ബാങ്ക്
50 രൂപയ്ക്ക് 4
മാസത്തേക്ക്
3 രൂപ പലിശ

ഏതു ബാങ്കാണ് കൂടുതൽ പലിശ നൽകുന്നത്?

നന്ദിനി ബാങ്കിൽ,

100 രൂപയ്ക്ക് ഒരു മാസത്തെ പലിശ $1\frac{1}{2}$ രൂപ

100 രൂപയ്ക്ക് ഒരു വർഷത്തെ പലിശ $12 \times 1\frac{1}{2} = 18$ രൂപ

പലിശനിരക്ക് 18%

കെ.എസ്. ബാങ്കിൽ,

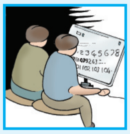
50 രൂപയ്ക്ക് 4 മാസത്തെ പലിശ = 3 രൂപ

100 രൂപയ്ക്ക് 4 മാസത്തെ പലിശ $3 \times 2 = 6$ രൂപ

100 രൂപയ്ക്ക് ഒരു വർഷത്തെ പലിശ $6 \times 3 = 18$ രൂപ

പലിശ നിരക്ക് 18%

രണ്ട് ബാങ്കിലേയും പലിശനിരക്ക് തുല്യമാണല്ലോ.



പട്ടികയിലെ കണക്കുകളിലെല്ലാം പലിശനിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

തുക	കാലാവധി	പലിശ
500 രൂപ	1 വർഷം	30 രൂപ
1000 രൂപ	4 മാസം	40 രൂപ
200 രൂപ	2 മാസം	2 രൂപ
2 രൂപ	1 മാസം	3 പൈസ
5000 രൂപ	2 വർഷം	1200 രൂപ

കാലം മാറുമ്പോൾ

സഹകരണബാങ്കിൽ നിക്ഷേപങ്ങൾക്ക് 9% പലിശയാണ് നൽകുന്നത്. രവി ബാങ്കിൽ 30000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. ഒരു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ എത്ര രൂപ കിട്ടും?

നിക്ഷേപിച്ച തുകയുടെ 9% ആണ് ഒരു വർഷത്തെ പലിശ. അതായത്,

$$30000 \times \frac{9}{100} = 2700 \text{ രൂപ}$$

അപ്പോൾ ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞാൽ 32700 രൂപ തിരിച്ചുകിട്ടും.

രണ്ടുവർഷം കഴിഞ്ഞാണ് തിരിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്കിലോ?

എഴുതിത്തള്ളുന്ന കടങ്ങൾ

കാർഷികകടങ്ങൾ എഴുതിത്തള്ളുന്ന രീതി പ്രാചീനകാലത്തും നിലവിലുണ്ടായിരുന്നു. ഈജിപ്തിലും ബാബിലോണിയയിലുമൊക്കെ അന്ന് നാണയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള പണമിടപാടുകൾ നിലവിലുണ്ടായിരുന്നു. വിളവിന്റെ ഏറ്റക്കുറച്ചിലുകൾ വിലയെ ബാധിക്കാതിരിക്കാൻ അന്നത്തെ രാജാക്കന്മാർ കാർഷിക ഉൽപ്പന്നങ്ങളും നാണയങ്ങളും തമ്മിലുള്ള കൈമാറ്റനിരക്കുകൾ നിശ്ചയിച്ചിരുന്നു. ക്ഷാമകാലങ്ങളിൽ കൃഷിക്കാരുടെ കടങ്ങൾ ഒഴിവാക്കുന്ന രീതിയും ഉണ്ടായിരുന്നു.

സോളോന്റെ പരിഷ്ക്കാരം

പുരാതന ഗ്രീസിൽ കൃഷിക്കാർക്ക് കടം തിരിച്ചടയ്ക്കാൻ കഴിയാതെ വരുമ്പോൾ അവരുടെ ഭൂമി പിടിച്ചെടുക്കുകയും ചിലപ്പോൾ അവരെത്തന്നെ അടിമകളാക്കുകയും ചെയ്യുന്ന രീതി ഉണ്ടായിരുന്നു.

ബി.സി. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഏഥൻസിലെ ഒരു ഭരണാധികാരിയായിരുന്ന സോളോൻ ഇത്തരം നടപടികൾ നിർത്തലാക്കി. അടിമയായി പുറം രാജ്യങ്ങളിൽ വിറ്റ കർഷകരെ മടക്കികൊണ്ടുവന്നു. കാർഷികോൽപ്പന്നങ്ങൾക്ക് നിശ്ചിതവില നടപ്പാക്കി.

ഏഥൻസിൽ ജനാധിപത്യം നടപ്പാക്കിയതും ഇദ്ദേഹം തന്നെയാണെന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു.

രണ്ടുവർഷത്തെ പലിശ കിട്ടും. അതായത്,

$$2 \times 2700 = 5400 \text{ രൂപ}$$

രണ്ടുവർഷത്തെ പലിശ നേരിട്ടു കണക്കാക്കാം.

$$30000 \times \frac{9}{100} \times 2 = 5400 \text{ രൂപ}$$

മൂന്നുവർഷത്തെ പലിശ എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം?

ഇതുപോലെ 20000 രൂപയ്ക്ക് 8% നിരക്കിൽ 4 വർഷത്തേക്കുള്ള പലിശ എത്രയാണ്?

- സുമ ഒരു ബാങ്കിൽ 25000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. പലിശ നിരക്ക് 11% ആണ്. 3 വർഷംകഴിയുമ്പോൾ എത്ര രൂപ തിരികെ ലഭിക്കും?

മൂന്നുവർഷത്തെ പലിശ നേരിട്ടു കണക്കാക്കാം.

$$25000 \times \frac{11}{100} \times 3 = 8250 \text{ രൂപ}$$

തിരികെ ലഭിക്കുന്ന തുക കാണാൻ നിക്ഷേപിച്ചതിനോടൊപ്പം പലിശകൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

അത് എത്രയാണ്?

- ബാങ്കിൽനിന്ന് 12% പലിശ നിരക്കിൽ വിജയൻ 50000 രൂപ കടംവാങ്ങി. രണ്ടുവർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 25000 രൂപ തിരിച്ചടച്ചു. ഒരു വർഷംകൂടി കഴിയുമ്പോൾ കടം തീർക്കാൻ എത്ര രൂപ തിരിച്ചടയ്ക്കണം?

ഇവിടെ രണ്ടുവർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കുറേ പണം തിരിച്ചടച്ചു. അതുകൊണ്ട് 2 വർഷത്തെ പലിശ കാണണം.

രണ്ടുവർഷത്തെ പലിശ

$$50000 \times \frac{12}{100} \times 2 = 12000 \text{ രൂപ}$$

രണ്ടുവർഷം കഴിയുമ്പോൾ തിരിച്ചടയ്ക്കേണ്ടത്

$$50000 + 12000 = 62000 \text{ രൂപ.}$$

ഇതിൽ 25000 രൂപയാണ് തിരിച്ചടച്ചത്. ബാക്കി

$$62000 - 25000 = 37000 \text{ രൂപ.}$$

ഇനി തിരിച്ചടയ്ക്കേണ്ടത് 37000 രൂപയും അതിന്റെ ഒരു വർഷത്തെ പലിശയുമാണ്. കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

- ബാബു 25000 രൂപ ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. ബാങ്ക് 15% നിരക്കിലാണ് പലിശ കണക്കാക്കുന്നത്. 2 വർഷം കഴിയുമ്പോൾ എത്ര രൂപ തിരികെ ലഭിക്കും?
- ദിലീപ് ഒരു ബാങ്കിൽനിന്ന് 36000 രൂപ കടംവാങ്ങി. പലിശനിരക്ക് 10% ആണ്. 2 വർഷത്തേക്കുള്ള പലിശ ഉൾപ്പെടെ ഈ സംഖ്യ 24 മാസത്തവണകളായി തിരിച്ചടയ്ക്കാൻ അയാൾ തീരുമാനിച്ചു. ഓരോ മാസവും എത്ര രൂപ വീതം തിരിച്ചടയ്ക്കണം?
- ജോണി ഒരു ബാങ്കിൽ 60000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. ബാങ്ക് ഒരു രൂപയ്ക്ക് മാസത്തിൽ ഒരു പൈസയാണ് പലിശ നൽകുന്നത്. രണ്ടുവർഷം കഴിയുമ്പോൾ എത്ര രൂപ തിരികെ ലഭിക്കും?
- സുജിത്തും അനീഷും ബാങ്കിൽനിന്ന് 50000 രൂപ വീതം കാർഷികവായ്പയെടുത്തു. 4% ആണ് പലിശ നിരക്ക്. സുജിത്ത് ഒരുവർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കടം തീർത്തു. അന്നുതന്നെ 50000 രൂപ കടംവാങ്ങി. അടുത്തവർഷം മുഴുവൻ തുകയും തിരിച്ചടച്ചു. അനീഷിന് ഒരുവർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കടംതീർക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല. ബാങ്ക് ഓരോ വർഷവും 7% പലിശ ആവശ്യപ്പെട്ടു. ഓരോരുത്തരും പലിശയായി എത്ര രൂപവീതം കൊടുത്തു?
- രാഹുലും രജനിയും ഒരു ബാങ്കിൽ ഒരേ ദിവസം 8000 രൂപ വീതം നിക്ഷേപിച്ചു. ബാങ്ക് 10% നിരക്കിലാണ് പലിശ കണക്കാക്കുന്നത്. ഒരുവർഷം പൂർത്തിയായപ്പോൾ പലിശയുൾപ്പെടെ മുഴുവൻ സംഖ്യയും രാഹുൽ തിരിച്ചുവാങ്ങി അന്നുതന്നെ വീണ്ടും നിക്ഷേപിച്ചു. വീണ്ടും ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ രണ്ടുപേരും മുഴുവൻ സംഖ്യയും പലിശസഹിതം പിൻവലിച്ചു. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപവീതം കിട്ടും? കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ വ്യത്യാസം വരാൻ കാരണം എന്താണ്?

മാറുന്ന കാലം

പ്രാചീനകാലത്ത് പലിശ എന്ന ആശയത്തോടുതന്നെ എതിർപ്പുണ്ടായിരുന്നു. ബി.സി. അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ചില ഭാരതീയ ഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പലിശ വാങ്ങുന്നതിനുള്ള മതപരമായ വിലക്കുകൾ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രസിദ്ധ ഗ്രീക്ക് ചിന്തകനായിരുന്ന അരിസ്റ്റോട്ടിൽ പലിശയെ ശക്തമായി വിമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. "ധനസമ്പാദനത്തിന്റെ ഏറ്റവും വെറുക്കപ്പെടേണ്ട മാർഗം" എന്നാണ് അദ്ദേഹം പലിശയെക്കുറിച്ച് പറയുന്നത്.

കാലം കുറേ കഴിഞ്ഞ് എ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടായപ്പോഴേക്കും മിക്ക സ്ഥലങ്ങളിലും ഈ എതിർപ്പ് **അമിതമായ** പലിശയ്ക്കെതിരായി മാത്രം ചുരുങ്ങി.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• മുടക്കുമുതൽ, വിറ്റവില, ലാഭം, നഷ്ടം, ലാഭനഷ്ട ശതമാനങ്ങൾ എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രായോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് ശതമാനം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിക്കുന്നു.			
• ഡിസ്കൗണ്ട്, റിബേറ്റ് എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ട പ്രയോഗികപ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നു.			
• പരസ്യവില, ഡിസ്കൗണ്ട് തുടങ്ങിയ കച്ചവടതന്ത്രങ്ങളെ വിമർശനാത്മകമായി വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.			
• ഒരു തുകയുടെ നിശ്ചിത വർഷത്തേക്കുള്ള പലിശ കണ്ടെത്തുന്നു.			
• പലിശ, മുതൽ, നിരക്ക്, കാലം, എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുകയും വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• വാർഷികമായി സൂചിപ്പിക്കാത്ത പലിശയെ വാർഷികമായി നിരക്കു കണ്ടെത്തി പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്തുന്നു.			
• പ്രശ്നപരിഹരണത്തിന് യോജ്യമായ വഴി സ്വീകരിക്കുകയും പ്രശ്നപരിഹരണരീതി വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			

11

സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും

KT- 513-3/Maths (M)-7(Vol-2)

ഒറ്റയും ഇരട്ടയും

ഈ തുകകൾ നോക്കൂ:

$1 + 2 \quad = \quad 3$

$2 + 3 \quad = \quad 5$

$3 + 4 \quad = \quad 7$

എല്ലാ തുകകളും ഒറ്റസംഖ്യകളല്ലേ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്നത്?

n ഏതെങ്കിലുമൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയെ $n + 1$ എന്നെഴുതണം. ഇവയുടെ തുക എന്താണ്?

$$n + (n + 1) = 2n + 1$$

$2n + 1$ എന്ന സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം n, ശിഷ്ടം 1

അതായത് n എന്നത് ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും, $2n + 1$ എന്നത് ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

അങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നു കാണാം.

ഇനി ഈ തുകകൾ നോക്കൂ:

$1 + 3 = 4$

$2 + 4 = 6$

$3 + 5 = 8$

ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാമോ?

സംഖ്യാഗോപുരം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

	15	
7		8
4	3	5

സംഖ്യകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ചുവട്ടിലെ മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ അടുത്തടുത്തുള്ളവ കൂട്ടിയതാണ് അതിനു മുകളിലുള്ള വരിയിലെ സംഖ്യകൾ. അവ രണ്ടും കൂട്ടിയതാണ് ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ.

1, 2, 3 എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങി ഇത്തരമൊരു ഗോപുരം ഉണ്ടാക്കിനോക്കാം:

	8	
3		5
1	2	3

തുടങ്ങുന്നത് 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ നിന്നാണെങ്കിലോ?

	12	
5		7
2	3	4

ഇതുപോലെ അടുത്തടുത്ത മറ്റേതെങ്കിലും മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി എഴുതിനോക്കൂ.

അവസാനം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും പറയാമോ?

അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ തുടങ്ങിയാലാണ് അവസാനം 100 കിട്ടുക?

ബീജഗണിതസഹായം

അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയാലും നമ്മുടെ സംഖ്യാഗോപുരം 4 ന്റെ ഗുണിതത്തിൽ അവസാനിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യ x എന്നെടുത്തു നോക്കാം. അപ്പോൾ താഴത്തെ വരിയിൽ $x, x+1, x+2$

x		$x+1$		$x+2$	

മുകളിൽ അടുത്ത വരിയിലെ സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

$$(x + 1) + (x + 2) = 2x + 3$$

	$2x+1$		$2x+3$		
x		$x+1$		$x+2$	

അപ്പോൾ ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയോ?

$$(2x + 1) + (2x + 3) = 4x + 4$$

		$4x+4$			
	$2x+1$		$2x+3$		
x		$x+1$		$x+2$	

ഇതിലെ $4x + 4$ എന്നതിനെ അൽപ്പം മാറ്റി എഴുതാം.

$$4x + 4 = 4(x + 1)$$

അതായത്, അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങിയാലും, അവസാനിക്കുന്നത് അതിലെ നടുക്കുള്ള സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങാണ്. (ഇതു നേരത്തേ ശ്രദ്ധിച്ചിരുന്നോ?)

അപ്പോൾ 100 ൽ അവസാനിക്കണമെങ്കിൽ 24, 25, 26 എന്നീ സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങണം.

ഇനി തുടങ്ങുന്നത് ഒന്നിടവിട്ട മൂന്നു സംഖ്യകളായാലോ?

രണ്ടിടവിട്ട സംഖ്യകളായാൽ?

എഴുതിനോക്കൂ.

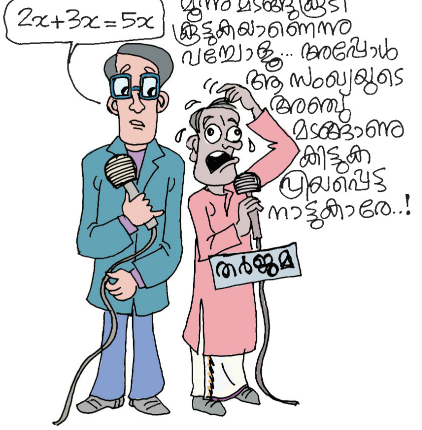
സംഖ്യാതത്ത്വങ്ങൾ

സംഖ്യകളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ചില കാര്യങ്ങൾ എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ് എന്ന് ബോധ്യപ്പെടാൻ ബീജഗണിതം ആവശ്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി, അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയും ഒറ്റസംഖ്യയാണ് എന്ന് സമർഥിക്കാൻ, n എന്ന് ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽ സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ അതിനടുത്തത് $n + 1$ ആണെന്നും അവയുടെ തുക $2n+1$ ആണെന്നും അറിയണം. കൂടാതെ n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നും കാണേണ്ടതുണ്ട്.

മറ്റു പല ശാസ്ത്രങ്ങളിലും, കുറേയേറെ സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒരു വസ്തുത ശരിയാണെന്നു കണ്ടാൽ അതൊരു പൊതുതത്ത്വമായി അംഗീകരിക്കാറുണ്ട്. ഗണിതത്തിൽ ഇതു മതിയാകില്ല. എന്തുകൊണ്ട് അത് ശരിയാകുന്നു എന്നും സമർഥിക്കണം. സംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള കാര്യങ്ങളാണെങ്കിൽ, ഈ കാര്യകാരണബന്ധം ബീജഗണിതത്തിലൂടെയാണ് വെളിവാകുന്നത്.

അനേകം സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകുന്ന കാര്യങ്ങൾ പിന്നീട് ശരിയല്ലാതാകുന്ന പല സന്ദർഭങ്ങളും ഗണിതത്തിലുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, 2^2 നെ 2 കൊണ്ടും, 2^3 നെ 3 കൊണ്ടും 2^4 നെ 4 കൊണ്ടുമെല്ലാം ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്നില്ല. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, 4700063497 നെക്കാൾ ചെറിയ ഏത് സംഖ്യ n ആയി എടുത്താലും 2^n നെ n കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 3 ആകില്ല. എന്നാൽ n ആയി 4700063497 എടുത്താൽ ശിഷ്ടം 3 തന്നെയാവുകയും ചെയ്യും.

ഇവിടെ, നാനൂറ്റി എഴുപത് കോടിയിലധികം സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകുന്ന ഒരു വസ്തുതയാണ് പിന്നീട് തെറ്റുന്നത്!



മൂന്നു സംഖ്യകൾ

അടുത്തടുത്ത ഏത് രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയോ?

$$1+2+3=6$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5=12$$

ഇവയെല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണ്. ഏതു സംഖ്യയിൽനിന്നു തുടങ്ങിയാലും ഇതു ശരിയാണോ?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യയെ n എന്നെഴുതിയാൽ, അടുത്ത രണ്ടു സംഖ്യകൾ $n+1$, $n+2$ എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ. ഇവയുടെ തുക

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3$$

ഇനി

$$3n+3=3(n+1)$$

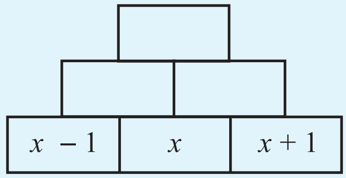
എന്നെഴുതിയാൽ, തുക 3 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്നു കാണാം.

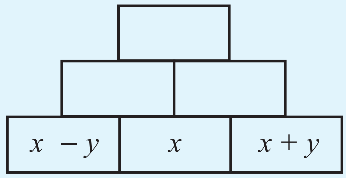
ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യംകൂടി കാണാം. നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണ് തുക. അപ്പോൾ കുറേക്കൂടി കൃത്യമായ ഒരു പൊതു തത്ത്വം കിട്ടുന്നു.

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

അടുത്തടുത്ത നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക നാലിന്റെ ഗുണിതമാണോ?

ഈ ഗോപുരങ്ങൾ മുഴുമിപ്പിക്കൂ:

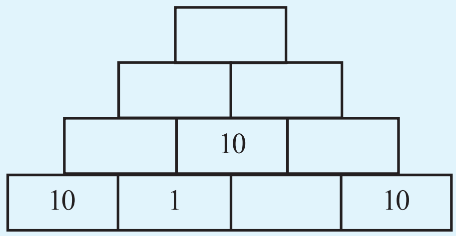




രണ്ടാമതെഴുതിയ തരത്തിലുള്ള ഗോപുരങ്ങളുടെ സവിശേഷത സാധാരണ ഭാഷയിലെഴുതാമോ?

മറ്റൊരു ഗോപുരം

അൽപ്പം കൂടി വലിയ ഗോപുരം:



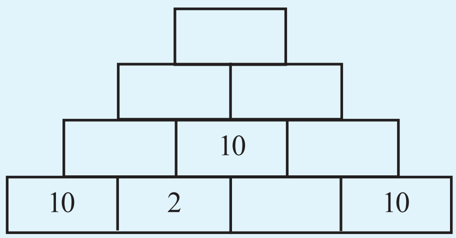
ഇതിലെ മറ്റു സംഖ്യകളെല്ലാം എഴുതാമോ?

താഴത്തെ വരിയിൽ ഇനി ഏതു സംഖ്യകൂടി എഴുതണം?

അതിനോട് 1 കൂട്ടിയാൽ 10 കിട്ടണമല്ലോ.

ഇനിയുള്ള സംഖ്യകളുംകൂടി എഴുതൂ. ഏറ്റവും മുകളിൽ 50 കിട്ടിയില്ലേ?

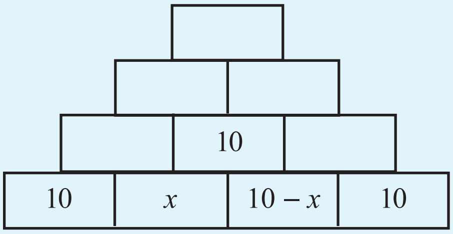
ഇനി ഈ ഗോപുരത്തിലെ സംഖ്യകളെല്ലാം എഴുതൂ.



ഇപ്പോഴും ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ 50 തന്നെയല്ലേ?

2 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എഴുതി ചെയ്തു നോക്കൂ. എപ്പോഴും 50 ൽ അവസാനിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

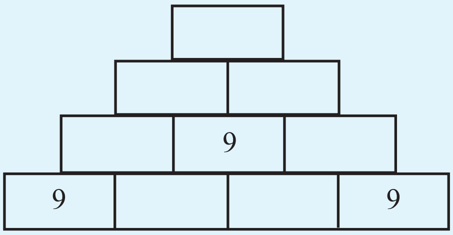
ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുനോക്കാം. ചുവട്ടിലെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ അടുത്ത സംഖ്യ എന്തെഴുതണം?



ഇനി ഇതിനു മുകളിലെ രണ്ടു വരികൾ എഴുതാമല്ലോ? മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ $20 + x$, $30 - x$ എന്നു കിട്ടിയില്ലേ? അപ്പോൾ അവസാനത്തെ സംഖ്യ

$$(20 + x) + (30 - x) = 50$$

ഇനി 10 നു പകരം 9 ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയൊരു ഗോപുരം തുടങ്ങിയാലോ?



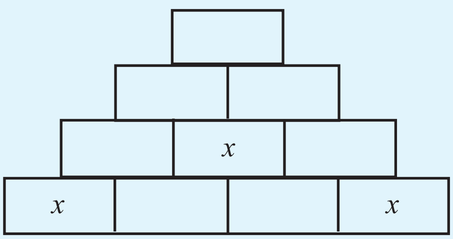
ചുവട്ടിലെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 9 ൽ താഴെയുള്ള ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത് ഗോപുരം മുഴുവനാക്കൂ (എന്തിന് 9 ൽ താഴെയാകണം?)

കൂട്ടുകാർ ചെയ്തതുമായി ഒത്തുനോക്കൂ. എല്ലാവർക്കും കിട്ടിയത് 45 തന്നെയല്ലേ?

ഇനി 9 നു പകരം 11 ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ, തുടർന്ന് (11 നേക്കാൾ ചെറിയ) ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും അവസാനം കിട്ടാൻ പോകുന്നത് എന്താണെന്നു പറയാമോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് എപ്പോഴും തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യയുടെ 5 മടങ്ങുതന്നെ കിട്ടുന്നത്?

തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യ x എന്നെടുക്കാം:



മറ്റൊരു മാർഗം

തുടർച്ചയായ ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയും തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നു കാണാൻ മറ്റൊരു വഴിയുണ്ട്.

നടുവിലെ സംഖ്യ n എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $n - 1$, അവസാനസംഖ്യ $n + 1$. ഇവയുടെ തുക

$$(n-1) + n + (n + 1) = 3n$$

ഇതിൽ $n - 1$, $n + 1$ എന്നിവയുടെ തുക $2n$ ആണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം എന്നതാണ് സൗകര്യം.

ഇനി തുടർച്ചയായ അഞ്ച് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നടുവിലെ (മൂന്നാമത്തെ) സംഖ്യ n എന്നെടുത്താൽ ഈ അഞ്ചു സംഖ്യകളെ

$$n - 2, \quad n - 1, \quad n, \quad n + 1, \quad n + 2$$

എന്നെഴുതാം. ഇവയുടെ തുക കാണാൻ, ആദ്യം

$$(n - 2) + (n + 2) = 2n$$

$$(n - 1) + (n + 1) = 2n$$

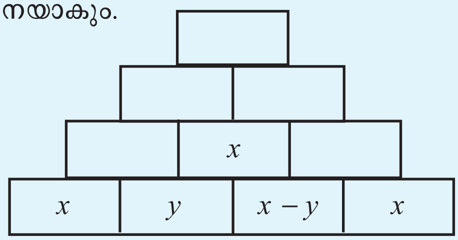
എന്നിങ്ങനെ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned}(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) &= (n - 2) + (n + 2) + (n - 1) + (n + 1) + n \\ &= 2n + 2n + n \\ &= 5n\end{aligned}$$

എന്നു വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാം. തുക നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കുകയും ചെയ്യാം.

തുടർച്ചയായ ഏഴ് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

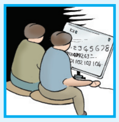
അടുത്ത സംഖ്യ y എന്നുമെടുക്കാം. അപ്പോൾ ആദ്യ വരി ഇങ്ങനെയാകും.



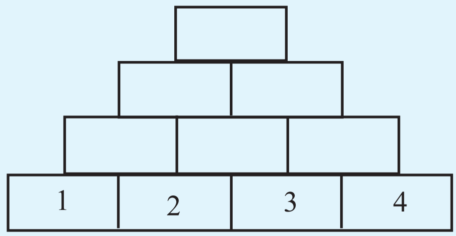
അടുത്ത പടിയിലെ സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

അതിനടുത്ത പടിയിലോ? $2x + y$, $3x - y$ എന്നു കിട്ടിയില്ലേ? അപ്പോൾ അവസാന സംഖ്യയോ?

$$(2x + y) + (3x - y) = 5x$$

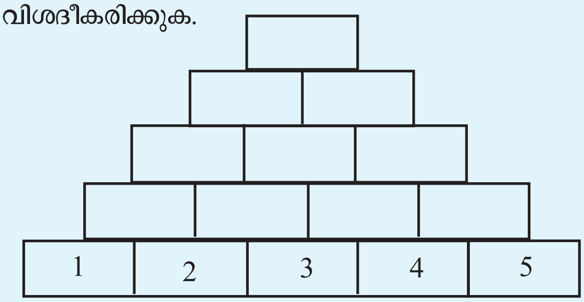


- ചുവടെയുള്ള ഗോപുരം എല്ലാ കളങ്ങളും പൂരിപ്പിക്കുക.



  തുടർച്ചയായ നാലു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇതുപോലെ കുറേയെണ്ണം എഴുതിനോക്കൂ. തുടങ്ങിയ സംഖ്യക്ക് അവസാനം കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുമായുള്ള ബന്ധം എന്താണ്? താഴെ പടിയിലെ നടുവിലുള്ള രണ്ട് സംഖ്യകൾക്ക് ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയുമായി എന്താണ് ബന്ധം? ഈ ബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

- ഇനി സംഖ്യകൾ അഞ്ചായാലോ? ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യക്ക് ഏറ്റവും താഴത്തെ പടിയിലെ നടുവിലുള്ള സംഖ്യയുമായുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.



- മുകളിലെ ഗോപുരങ്ങളിൽ അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകൾക്കു പകരം ഒന്നിടവിട്ട്, രണ്ടിടവിട്ട് എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതി ചെയ്തു നോക്കുക. ബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

പൊതുരൂപങ്ങൾ

2, 4, 6, 8 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളെല്ലാം 2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണല്ലോ. അഥവാ, 1, 2, 3... എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നവയാണ് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ. അപ്പോൾ n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n$ എന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. മറിച്ച് ഏത് ഇരട്ടസംഖ്യയെയും $2n$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം.

2,4,6,8...എന്നീ ഇരട്ടസംഖ്യകളിൽ നിന്നെല്ലാം 1 കുറച്ചാൽ 1, 3, 5, 7... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകൾ കിട്ടും. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളെല്ലാം 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 1 കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നവയാണ് ഒറ്റസംഖ്യകൾ. ബീജഗണിതരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, n എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $2n$ ഉം 1 കുറച്ചാൽ $2n-1$ ഉം ആകും. അതായത് n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n - 1$ ഒറ്റസംഖ്യയാണ്. മറിച്ച് ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും $2n - 1$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുകയും ചെയ്യാം.

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ എന്നതും ഒറ്റസംഖ്യതന്നെ. പക്ഷേ, n ആയി 1, 2, 3... എന്നിങ്ങനെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താൽ $2n + 1$ എന്നതിൽ നിന്ന് 1 കിട്ടില്ല. എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും കിട്ടാൻ n ആയി 0, 1, 2... എന്നിങ്ങനെ എടുക്കണം.

11 ന്റെ കളികൾ

ഈ സംഖ്യകൾ നോക്കൂ:

$$12, 23, 34, ..., ...$$

12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 11 കൂട്ടി, വീണ്ടും 11 കൂട്ടി, അങ്ങനെ പോകുന്നു.

ഇതു തുടർന്നാൽ 100 കിട്ടുമോ?

എഴുതിനോക്കാം:

$$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100$$

ഇനിയും തുടർന്നാൽ എപ്പോഴെങ്കിലും 1000 കിട്ടുമോ?

എല്ലാം എഴുതിനോക്കുക എളുപ്പമാണോ?

സംഖ്യകൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ:

11 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 12

22 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 23

33 നോട് 1 കൂട്ടിയത് 34

ഈ സംഖ്യകളെല്ലാം 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയതാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഇവയെല്ലാം 11 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകളാണ്.

ഇനി ഇക്കൂട്ടത്തിൽ 1000 വരുമോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ.

1000 നെ 11 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 അല്ലാത്തതിനാൽ, ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിൽ 1000 ഉണ്ടാവില്ല.

ഇനി ഇതിൽ 10000 ഉണ്ടാകുമോ എന്നു നോക്കൂ.

100000 ആയാലോ?

ഈ ക്രമം ഉണ്ടാക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ആദ്യം പറഞ്ഞത്,

12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടരെ 11 കൂട്ടുക എന്നാണല്ലോ.

ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യാക്രമം മുഴുവനും ഒരു ക്രിയയായി എഴുതാം:

> എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം 11 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടുക.

ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് പറഞ്ഞാലോ?

> $11n + 1$ എന്നതിൽ n ആയി, 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുക്കുക.

(എണ്ണൽസംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ബീജഗണിതത്തിൽ സാധാരണയായി n, m, p, k എന്നിങ്ങനെയുള്ള അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുകയാണു പതിവ്. നിർബന്ധമൊന്നുമില്ല - ഒരു കീഴ്‌വഴക്കം എന്നു മാത്രം)

വീണ്ടും ചില തുകകൾ

രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം. രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകളെ $2m$, $2n$ എന്നെടുക്കാം. ഇവയുടെ തുക.

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

ഇതിൽനിന്ന് തുകയും 2 ന്റെ ഗുണിതം, അഥവാ ഇരട്ടസംഖ്യ, ആണെന്നു കാണാം.

ഇനി രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടുന്നതെങ്കിലോ? അവയെ $2m - 1$, $2n - 1$ എന്നെടുത്താൽ തുക

$$\begin{aligned}(2m-1)+(2n-1) &= 2m+2n-2\\ &= 2(m+n-1)\end{aligned}$$

ഇത് 2 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ. അതായത് ഇരട്ടസംഖ്യ.

രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്കുപകരം മൂന്ന് ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ് കൂട്ടുന്നതെങ്കിലോ? നാല് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ?

മൂന്ന് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം? നാല് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുകയോ?

സംഖ്യകളും അക്ഷരങ്ങളും

പൊതുവായ തത്ത്വങ്ങൾ പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, അക്ഷരങ്ങൾ ഏതുതരം സംഖ്യകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നു വ്യക്തമാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, $2n - 1$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഒറ്റസംഖ്യകളാണ് എന്നു പറയുമ്പോൾ, ഇതിലെ n എന്നത് എണ്ണൽസംഖ്യകളെ മാത്രമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നുകൂടി പറയണം. $2n - 1$ ൽ n ആയി $1\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ എടുത്താൽ

$$2n - 1 = \left(2 \times 1\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$$

എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യയാണു കിട്ടുന്നത്.

ഇനി 12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നതിനു പകരം 21 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി തുടരെ 11 കൂട്ടിയാലോ?

$$21, 32, 43, \ldots$$

ഈ സംഖ്യകളെയും ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് എഴുതാമോ?

ഇവയെ $11 + 10, \quad 22 + 10, \quad 33 + 10, \ldots$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. അതായത്,

$11n + 10$ എന്നതിൽ n എന്ന സംഖ്യ $1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുക്കുക.

ഈ ക്രമം തുടർന്നാൽ, 100, 1000, 10000, 100000 എന്നിവയിൽ ഏതൊക്കെ കിട്ടുമെന്നു പറയാമോ?

ഈ സംഖ്യകളെ 11 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എന്താണ്?

ഇനി ഈ രണ്ടു സംഖ്യാ ക്രമങ്ങളും ഒരുമിച്ചു നോക്കാം:

12	23	34	45	...
21	32	43	54	...

മുകളിലെയും താഴത്തെയും സംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടിയാലോ?

33 55 77 99 ...

എന്തുകൊണ്ടാണ് 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടുന്നത്? ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു നോക്കാം.

ആദ്യത്തെ ക്രമത്തിലെ ഏതു സംഖ്യയെയും $11n + 1$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. രണ്ടാമത്തെ ക്രമത്തിൽ അതേ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന സംഖ്യ $11n + 10$ ആണ് (ആദ്യത്തെ n ആണ് ഇതിലും).

ഇവയുടെ തുക എന്താണ്?

$$\begin{aligned}(11n + 1) + (11n + 10) &= 22n + 11 \\ &= 11(2n + 1)\end{aligned}$$

11 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം മനസ്സിലായില്ലേ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ തുകകൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ:

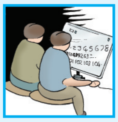
എന്തുകൊണ്ടാണ് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടുന്നത്?

തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതിനോക്കൂ: അതിൽ n ആയി $1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ $2n + 1$ ആയി ഏതുതരം സംഖ്യകളാണ് കിട്ടുന്നത്?

ഇവിടെ $11n + 1$, $11n + 10$, $2n + 1$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള പൊതുരൂപങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാം ഓരോ ക്രിയകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $11n + 1$ എന്നതിന്റെ അർഥം, n എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന

സംഖ്യയെ 11 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 1 കൂട്ടുക എന്നാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രിയകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പൊതുരൂപങ്ങളെ ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ (algebraic expressions) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, 1 നോട് തുടരെ 11 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 12, 23, 34, ... എന്നീ സംഖ്യകളെയെല്ലാം $11n+1$ എന്ന ഒറ്റ ബീജ ഗണിതവാചകത്തിൽ ഒതുക്കാം.



- 1 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 10 കൂട്ടി കിട്ടുന്ന സംഖ്യക ളുടെ ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- 9 നോട് തുടർച്ചയായി 10 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ആദ്യത്തെ രണ്ടു ക്രമങ്ങളിലെയും ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക. 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രം കിട്ടു ന്നതെന്തുകൊണ്ടാണ്? 10 ന്റെ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളും ഇങ്ങനെ കിട്ടുമോ?

രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 10, 20, 30, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ യെല്ലാം പൊതുവായി $10n$ എന്നെഴുതാം; ഇതിൽ n ആയി ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയുമെടുക്കാം.

ഇതിലെ രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയെങ്കിലോ? n ആയി 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം എടു ത്താൽ മതി.

$$10n \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

എന്നെഴുതാം. അൽപ്പംകൂടി ചുരുക്കി

$$10n \quad (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

എന്നുമാകാം.

ഇതുപോലെ 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 11, 21, 31, ... എന്നീ സംഖ്യകളെയെല്ലാം പൊതുവായി $10n+1$ എന്നെഴുതാം; ഇതിൽ n ആയി ഏത് എണ്ണൽസം ഖ്യയുമെടുക്കാം.

ഇവയിലെ രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയെങ്കിൽ

$$10n+1 \quad (n = 1, 2, 3, ..., 9)$$

എന്നുമെഴുതാം.

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 2 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന 12, 22, 32, ... എന്നീ സംഖ്യകളെ എങ്ങനെ ബീജഗണിത വാചകമായി എഴുതും? അവയിലെ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളെയോ?

ഇതുവരെ കിട്ടിയ രണ്ടക്കസംഖ്യകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു

ബീജഗണിതരൂപങ്ങൾ

ഏതു സംഖ്യയേയും 10 കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്; അവസാനം ഒരു പൂജ്യം ചേർത്താൽ മതി:

$$18 \times 10 = 180$$

$$250 \times 10 = 2500$$

എന്നാൽ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചെഴുതു മ്പോൾ

$$10 \times n = 10n$$

എന്നു മാത്രമേ എഴുതാറുള്ളൂ; $n0$ എന്നെഴുതാറില്ല.

ഇതുപോലെ 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടി യാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം അവ സാന അക്കങ്ങൾ 1 ആണ്. എന്നാൽ ഇവയു ടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം $10n+1$ എന്ന ല്ലാതെ $n1$ എന്നെഴുതില്ല.

10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ എന്നതിനുപകരം 10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെന്നും പറയാം. ഇവയെ 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ശിഷ്ടം 1 തന്നെ. കാരണം

$$10n+1 = (5 \times 2n) + 1$$

എന്നെഴുതാം. ഇത്തരം സംഖ്യകളെ $n1$ എന്നെഴുതിയാൽ ഇതുപോലുള്ള വിശക ലനങ്ങൾ സാധിക്കില്ല.

രണ്ടക്കസംഖ്യകൾ

3 നെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 5 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെ ചുരുക്കെഴുത്താണ് 35 എന്ന രണ്ടക്കസംഖ്യ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഒരക്കസംഖ്യകളെടുത്ത്, ആദ്യത്തേതിനെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, രണ്ടാമത്തേത് കൂട്ടിയാൽക്കിട്ടുന്നതിനെയാണ്, ഈ അക്കങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച രണ്ടക്കസംഖ്യയായി എഴുതുന്നത് എന്നു ഭാഷയിൽ പറയാം.

ബീജഗണിതത്തിലാകുമ്പോൾ m എന്ന ഒരക്കസംഖ്യയെ 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് n എന്ന ഒരക്കസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യ $10m + n$ എന്നു മാത്രമേ എഴുതാറുള്ളൂ.

m, n ഇവ ചേർത്തുവച്ച് mn എന്ന് എഴുതില്ല.

എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരക്കസംഖ്യയെ 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ആ സംഖ്യ തന്നെ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതിനെ

$$10\,n + n = 11n$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽനിന്ന് ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം 11 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് കാണുകയും ചെയ്യാം.

നോക്കാം:

$10n$	:	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$10n + 1$	:	11	21	31	41	51	61	71	81	91
$10n + 2$	:	12	22	32	42	52	62	72	82	92

ഇങ്ങനെ എല്ലാ രണ്ടക്കസംഖ്യകളും വേണമെങ്കിൽ ഏതെല്ലാം ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ എടുക്കണം?

$10n$, $10n + 1$, $10n + 2$ എന്നിങ്ങനെ $10n + 9$ വരെയുള്ള ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ രൂപമെന്താണ്?

$10n$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തോട് പല സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നു (ആദ്യം കൂട്ടിയത് 0).

ഈ കൂട്ടുന്ന സംഖ്യകളെയും ഒരു അക്ഷരംകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഇവയെല്ലാം $10n + m$ എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ m ആയി 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകളാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, എല്ലാ രണ്ടക്കസംഖ്യകളും

$$10n + m \ (n = 1, 2, 3, ..., 9;\ m = 0, 1, 2, ..., 9)$$

എന്ന രൂപത്തിലാണ്. ഉദാഹരണമായി $n = 5$, $m = 3$ എന്നെടുത്താൽ

$$10n + m = (10 \times 5) + 3 = 53$$

എന്നു കിട്ടും.

$n = 3$, $m = 5$ എന്നായാലോ?

അപ്പോൾ, രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപമായ $10n + m$ ൽ ആദ്യത്തെ (പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത്) അക്കമാണ് n; രണ്ടാമത്തെ (ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ) അക്കമാണ് m.

ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ എടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി 25. ഇത് തിരിച്ചെഴുതിയാൽ 52; അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ 77.

36 ഉം 63 ഉം കൂട്ടിയാലോ?

എപ്പോഴും അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുമോ?

28 ഉം 82 ഉം ആയാലോ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളിലെല്ലാം പൊതുവായി എന്തെങ്കിലും കാണുന്നുണ്ടോ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് എപ്പോഴും 11 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്?

പൊതുവായ കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ ബീജഗണിതമാണ് സഹായം.

ഏത് രണ്ടക്കസംഖ്യയെയും $10m + n$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാമല്ലോ. ഇത് തിരിച്ചെഴുതുകയെന്നാൽ, അക്കങ്ങളുടെ

സ്ഥാനം പരസ്പരം മാറ്റുക; അതായത് $10n + m$.

ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned}(10m + n) + (10n + m) &= (10m + m) + (10n + n)\\ &= 11m + 11n\\ &= 11(m + n)\end{aligned}$$

ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ തിരിച്ചെഴുതി കൂട്ടുന്നതിനു പകരം വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറച്ചുനോക്കൂ. കുറേ രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഇത് ചെയ്തുനോക്കൂ.

കുറച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം ഒരു സംഖ്യയുടെതന്നെ ഗുണിതങ്ങളാണോ?

എന്താണു കാരണം?

$$\begin{aligned}(10m + n) - (10n + m) &= 10m + n - 10n - m\\ &= 9m - 9n\\ &= 9(m - n)\end{aligned}$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഏതെങ്കിലും രണ്ടക്കസംഖ്യ എടുത്ത് അതിലെ അക്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുക. ഈ തുക സംഖ്യയിൽനിന്നു കുറയ്ക്കുക. ഇത് കുറേ സംഖ്യകളിൽ ചെയ്തുനോക്കുക. ഇങ്ങനെ കുറച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും സ്വഭാവം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഏതു രണ്ടക്കസംഖ്യയിൽനിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ 9 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

- മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.
- ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യയുടെ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും അവസാനത്തെയും (നൂറിന്റെയും പത്തിന്റെയും ഒന്നിന്റെയും സ്ഥാനത്തുള്ള) അക്കങ്ങളെ m, n, p എന്നെടുത്താൽ, സംഖ്യയെ എങ്ങനെ എഴുതാം? ഈ സംഖ്യയെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ എങ്ങനെ എഴുതാം?
- ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയെയും തിരിച്ചെഴുതി, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 99 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.
- ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയിൽനിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ 9 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുമെന്ന് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

വീണ്ടും മൂന്നു സംഖ്യകൾ

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്ത് ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക. ഈ തുകയ്ക്ക് നടുവിലെ സംഖ്യയുമായി എന്താണു ബന്ധം?

ഇങ്ങനെ അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്തു ചെയ്താലും തുക, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് സമർഥിക്കുക.

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ (ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6) എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ? ഒറ്റസംഖ്യകളായാലോ?

ഇനി 3 ന്റെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു ഗുണിതങ്ങൾ (ഉദാഹരണമായി 3, 6, 9) എടുത്താൽ ഇതു ശരിയാകുമോ?

3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളോട് 1 കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ (ഉദാഹരണമായി 4, 7, 10) ആയാലോ?

3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾക്കു പകരം 4 ന്റെയോ മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെയോ ഗുണിതമായാലോ?

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നിഗമനങ്ങളെല്ലാം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

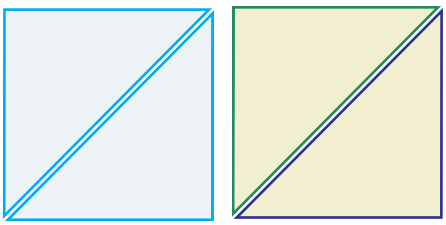
പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• സംഖ്യാബന്ധങ്ങളെ ബീജഗണിത സഹായത്തോടെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ക്രിയകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപങ്ങൾ ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• സംഖ്യാ പ്രത്യേകതകൾ ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സമർഥിക്കുന്നു.			

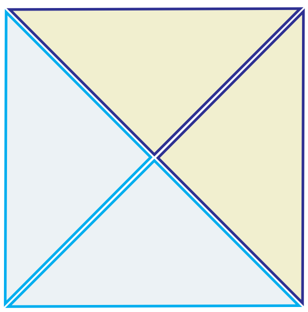
12

സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും

മറ്റൊരു മാർഗം

ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചടുക്കി ഒറ്റ സമചതുരമാക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

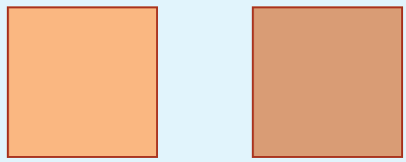




ഈ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും അളവിന് തുല്യമാണോ?

ഇരട്ടിവലുപ്പം

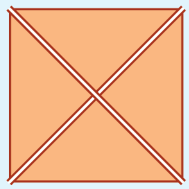
ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക.



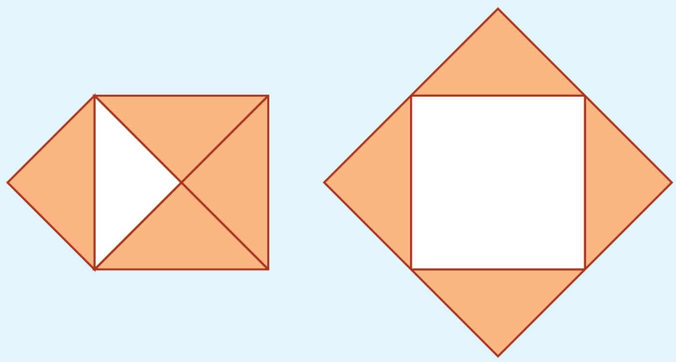
ഇവ മുറിച്ച് കഷണങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കി വലിയൊരു സമചതുരമാക്കണം.

അതിനൊരു സൂത്രമുണ്ട്.

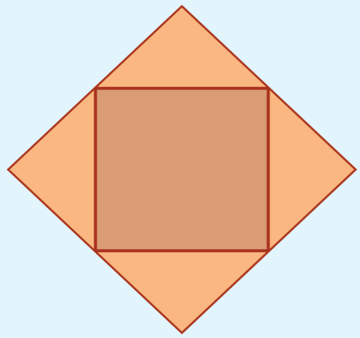
ആദ്യം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വികർണങ്ങളിലൂടെയും മുറിച്ച് നാലു ത്രികോണങ്ങളാക്കുക.



ഈ ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം പുറത്തേക്ക് മലർത്തിവയ്ക്കുക.



ഇനി മുറിക്കാത്ത സമചതുരം നടുവിലെ ഒഴിഞ്ഞസ്ഥലത്ത് വച്ചു നോക്കൂ.



എന്തുകൊണ്ടാണ് രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം ഇതിനകത്ത് കൃത്യമായി ചേരുന്നത്?

ആദ്യം മുറിച്ച ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കരുതുക; അവയുടെ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ അവസാനമുണ്ടാക്കിയ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

ഇനി 9 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചു ചേർത്ത് വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കാം. 9 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാൻ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായി എടുക്കണം?

ഇത്തരം രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ മുറിച്ചടുക്കി വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കുക. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

50 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

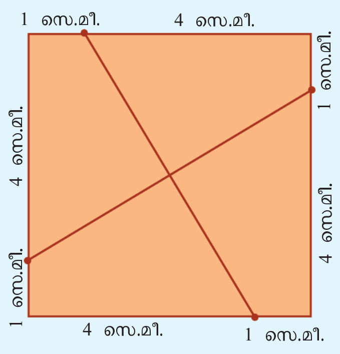
32 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമായാലോ?

വലുപ്പം കൂട്ടാം

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണങ്ങളിലൂടെ മുറിച്ച്, അതേ വലുപ്പത്തിലുള്ള മറ്റൊരു സമചതുരവും ചേർത്ത്, ഇരട്ടി വലുപ്പമുള്ള സമചതുരമുണ്ടാക്കാമെന്നു കണ്ടു.

ഇനി വേറൊരു തരത്തിൽ മുറിച്ചു നോക്കാം: 5 സെന്റിമീറ്റർ വശമായ ഒരു സമചതുരം കട്ടിക്കടലാസിൽ മുറിച്ചെടുക്കുക.

എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിച്ച് വികർണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതിനുപകരം, മൂലകളിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ മാറ്റി കുത്തുകളിട്ട് യോജിപ്പിക്കുക.



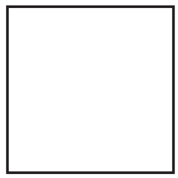
ഈ വരകളിലൂടെ മുറിച്ച്, കിട്ടുന്ന നാലു കഷണങ്ങളെയും

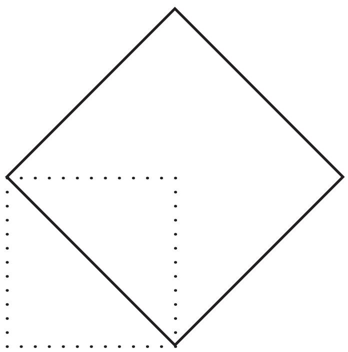
വരയ്ക്കാനൊരു വഴി

ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചടുക്കി ഒറ്റ സമചതുരമാക്കുമ്പോൾ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ ഒരു സമചതുരം വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ അതിന്റെ ഇരട്ടി പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ എളുപ്പമാണ്.

അതിന്റെ വികർണം വശമായി സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.





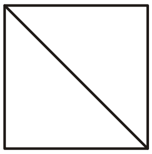
ഇതനുസരിച്ച് 50 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാമോ?

32 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

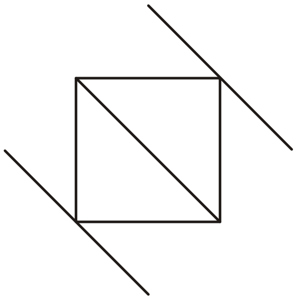
സമാന്തര മാർഗം

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

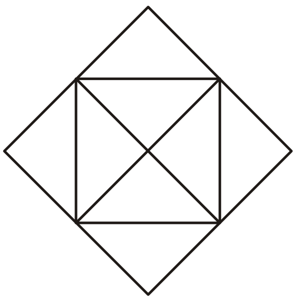
ആദ്യം സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വികർണം വരയ്ക്കുക:

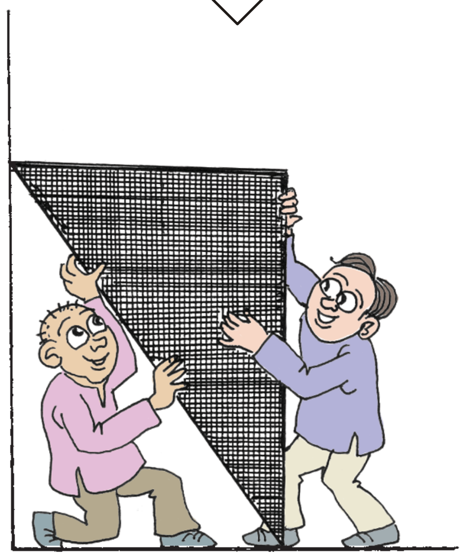


ഇനി സമചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലൂടെ ഈ വികർണത്തിന് സമാന്തരമായ വരകൾ വരയ്ക്കുക:

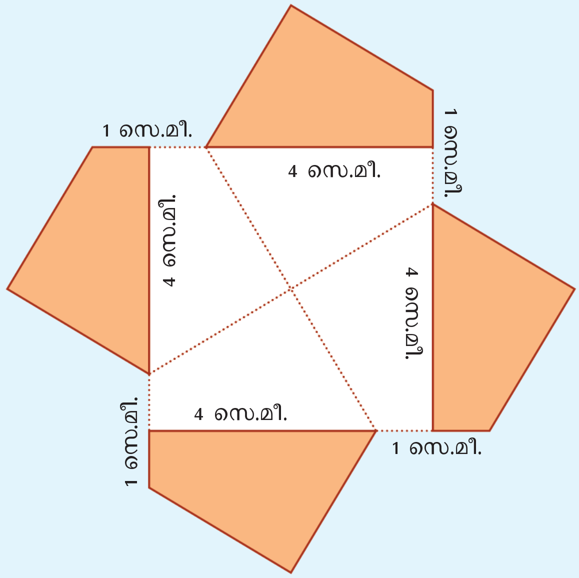


മറ്റേ വികർണവും വരച്ച് അതിനു സമാന്തരമായും ഇതുപോലെ വരകൾ വരയ്ക്കുക:

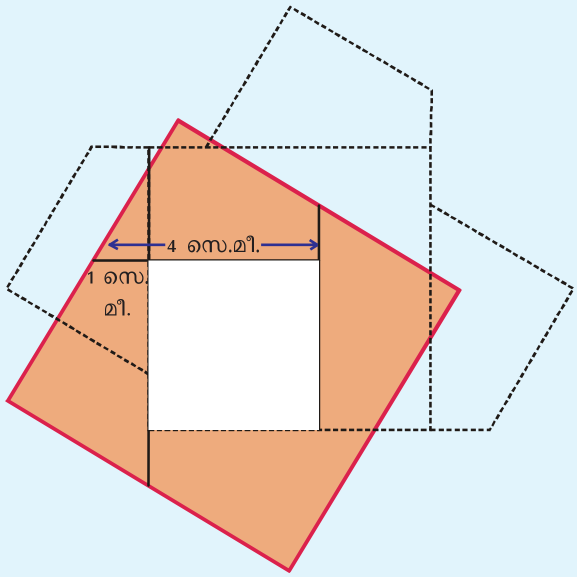




മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ പുറത്തേക്ക് മലർത്തി വയ്ക്കുക.

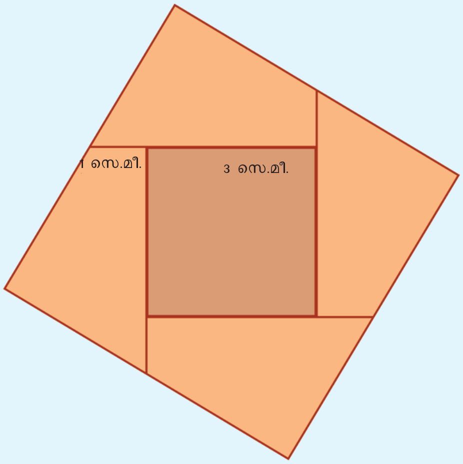


ഇടത്തേ കഷണത്തെ അൽപ്പം താഴോട്ടും, വലത്തേ കഷണത്തെ അൽപ്പം ഇടത്തോട്ടും, മുകളിലെ കഷണത്തെ അൽപ്പം ഇടത്തോട്ടും താഴോട്ടും, നിരക്കി നീക്കിയാൽ, പുറത്തൊരു വലിയ സമചതുരവും അകത്തൊരു ചെറിയ സമചതുരദ്വാരവും കിട്ടും.



ഉള്ളിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ 3 സെന്റിമീറ്റർ വശമായ മറ്റൊരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുത്താൽ, ഇതിനുള്ളിൽ കൃത്യമായി വയ്ക്കാം.



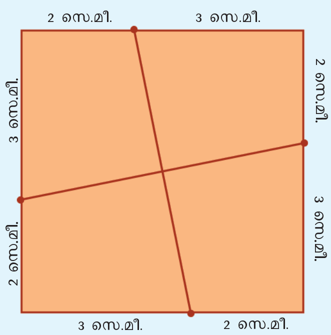
ആദ്യം വെട്ടിയെടുത്ത സമചതുരത്തെയാണ് നാലു കഷണങ്ങളാക്കി അടുക്കിയത്. അപ്പോൾ ഈ നാലു കഷണങ്ങളുടെയും ആകെ പരപ്പളവ്, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയാണ്. അതായത് $5^2 = 25$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ.

പിന്നീട് മുറിച്ചെടുത്ത്, അകത്തു ചേർത്തുവച്ച സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

അപ്പോൾ അവസാനമുണ്ടാക്കിയ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$5^2 + 3^2 = 34 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

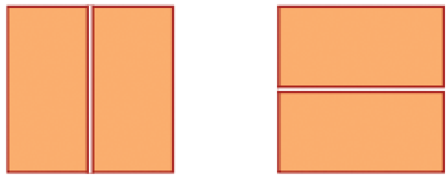
ഇനി 5 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ വശമായ മറ്റൊരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, മൂലകളിൽ നിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ കുത്തുകളിട്ട് വരയ്ക്കുക.



ഈ വരകളിലൂടെ മുറിച്ച്, നാലു കഷണങ്ങളും പുറത്തേക്ക് നിവർത്തിവച്ചാൽ ഇങ്ങനെയാകും.

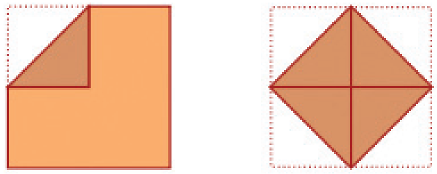
പകുതിയാക്കാൻ

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പകുതി പരപ്പളവുള്ള ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കാൻ നടുവിലൂടെ നെടുകെയോ കുറുകെയോ മുറിച്ചാൽ മതി:

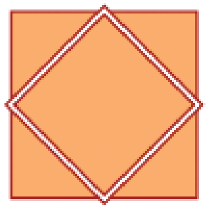


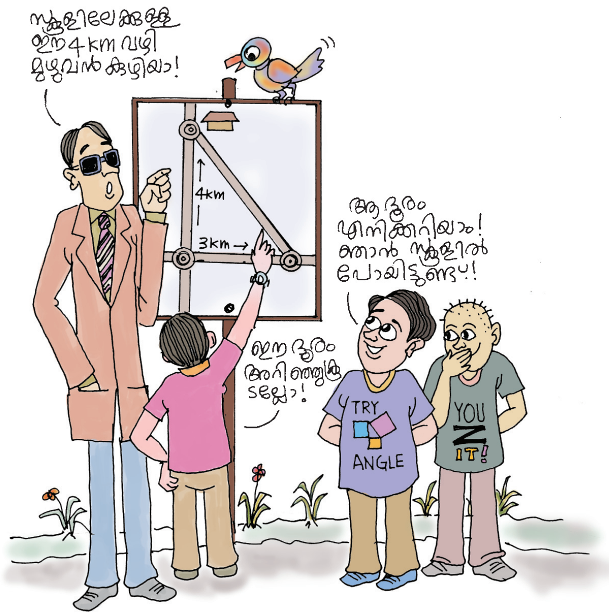
പകുതി പരപ്പളവുള്ള സമചതുരംതന്നെ വേണമെങ്കിലോ?

സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം നടുവിലേക്ക് മടക്കുക:



വീണ്ടും നിവർത്തി, മടക്കുകളിലൂടെ മുറിച്ചെടുത്താൽ പകുതി സമചതുരമായി:

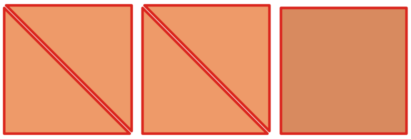




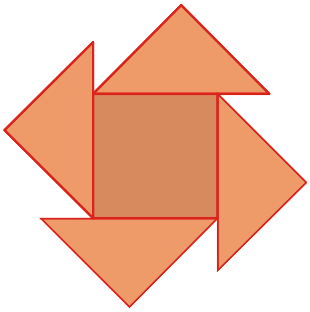
മൂന്നു സമചതുരങ്ങൾ

ഒരേ വലുപ്പമുള്ള മൂന്നു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചടുക്കി ഒറ്റ സമചതുരമാക്കാം.

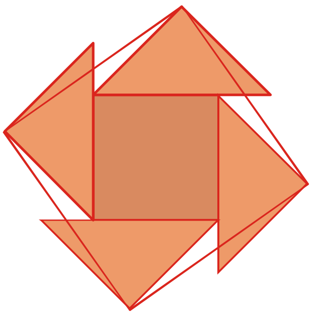
അതിന് ആദ്യം രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിക്കുക:



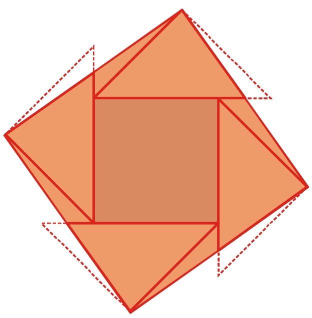
മുറിച്ചു കിട്ടിയ ത്രികോണങ്ങൾ മുറിക്കാത്ത സമചതുരത്തിന് ചുറ്റുമായി ഇങ്ങനെ അടുക്കുക:

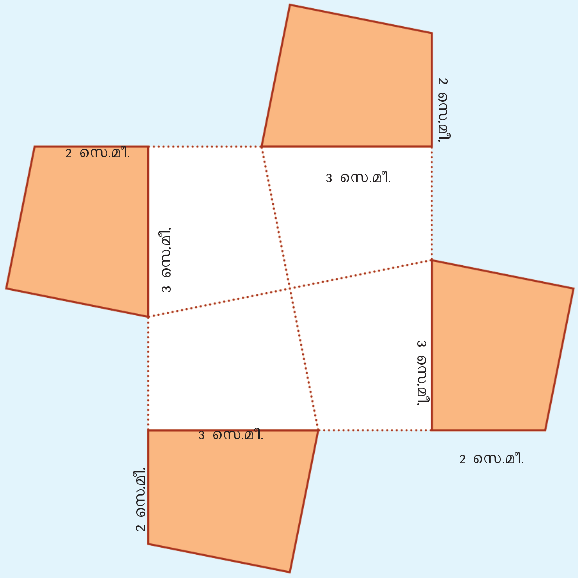


ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂലകൾ ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക:

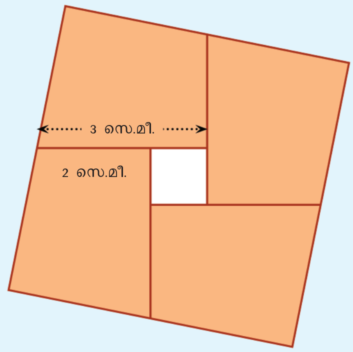


സമചതുരത്തിന്റെ പുറത്തേക്കു തള്ളി നിൽക്കുന്ന നാലു നേർത്ത ത്രികോണങ്ങളും മുറിച്ചെടുത്ത് അകത്തെ വിടവുകൾ അടയ്ക്കുക:

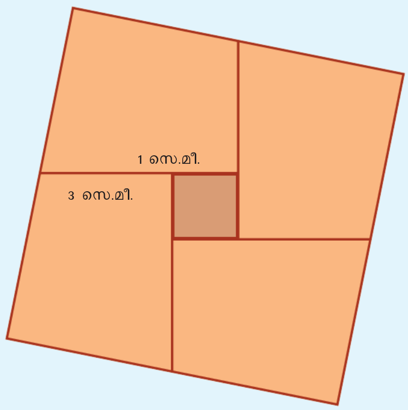




ഇനി കഷണങ്ങൾ നിരക്കിനീക്കി, സമചതുരമുണ്ടാക്കിയാലോ?



നടുവിലെ ദ്വാരമടയ്ക്കാൻ, വശം എത്രയായ സമചതുരം വേണം?



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

$5^2 + 1^2 = 26$ ച.സെ.മീ.

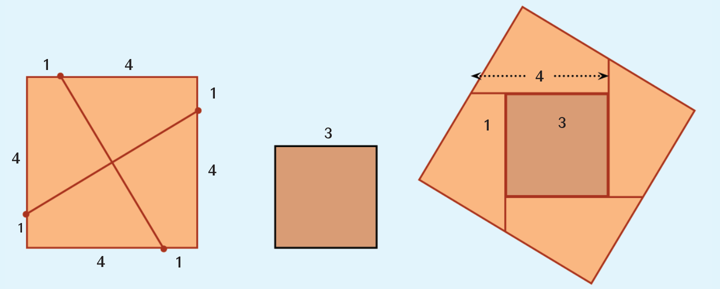
ഇതുപോലെ 5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരം കട്ടി ക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, മൂലകളിൽനിന്ന് 1.5 സെന്റി മീറ്റർ അകലത്തിൽ കുത്തുകളിട്ടു വരച്ച്, മുറിച്ചടുക്കി നോക്കൂ.

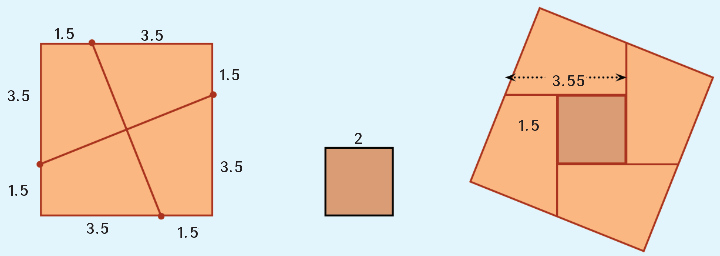
നടുവിൽ വയ്ക്കാൻ എത്ര സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമച തുരം വെട്ടിയെടുക്കണം?

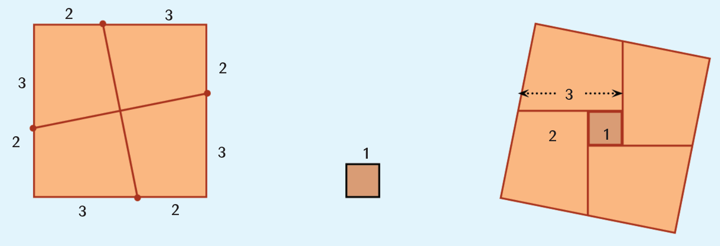
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര യാണ്?

രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ

5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തെ പലവിധത്തിൽ മുറിച്ച്, മറ്റൊരു സമചതുരവും ചേർത്ത് പല വലുപ്പമുള്ള സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കിയല്ലോ:





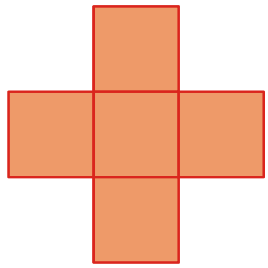


ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തെ മുറിക്കാൻ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിൽ കുത്തിടുന്നു; ഈ അകലവും അവസാനം ദ്വാരമടയ്ക്കാൻ വെട്ടിയെടുക്കുന്ന സമചതുര ത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?

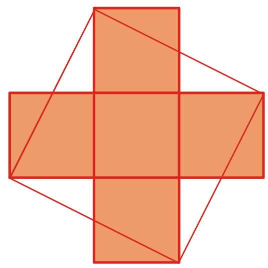
വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കിയ രീതി ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ.

അഞ്ചു സമചതുരങ്ങൾ

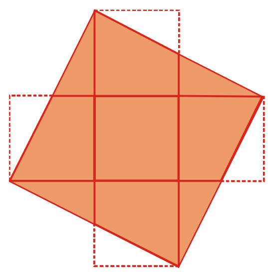
ഒരേ വലുപ്പമുള്ള അഞ്ചു സമചതുരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തതുപോലെ അടുക്കുക:



മൂലകൾ താഴത്തെ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ യോജിപ്പിച്ച് സമചതുരം വരയ്ക്കുക:



ഇനി സമചതുരത്തിന് പുറത്തുള്ള ത്രികോ ണങ്ങൾ വെട്ടിയെടുത്ത് അകത്തെ വിടവു കൾ അടയ്ക്കുക:

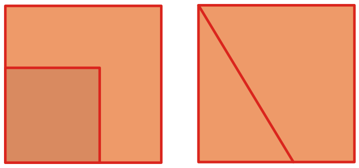


ഇതേ ചിത്രം മറ്റേതെങ്കിലും പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടോ?

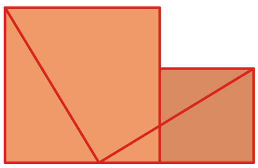
അങ്ങനെയും മുറിക്കാം

രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചടുക്കി വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കാൻ വേറെയും വഴികളുണ്ട്.

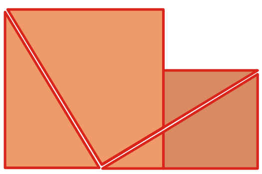
വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ അടയാളവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു മൂലയും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ യോജിപ്പിക്കുക:



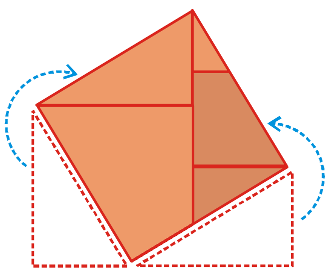
ഇനി സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച് ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വര വരയ്ക്കുക:



ഈ വരകളിലൂടെ മുറിക്കുക:

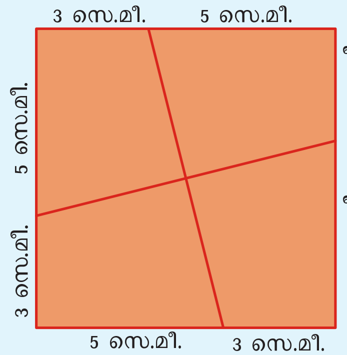


താഴെയുള്ള കഷണങ്ങൾ മുകളിലേക്കു മാറ്റി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമചതുരമുണ്ടാക്കുക:



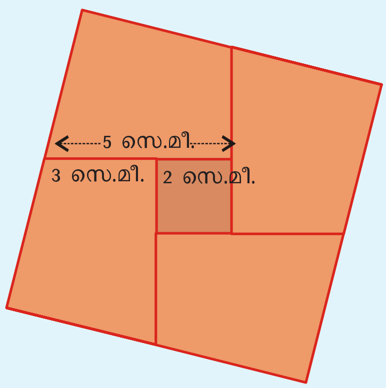
കുത്തുകളിടുമ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിൽനിന്ന് ഈ അകലം കുറയ്ക്കുന്നു; നിരക്കിനീക്കുമ്പോൾ ഇതേ അകലം വീണ്ടും കുറയ്ക്കുന്നു. അങ്ങനെ ആദ്യ സമചതുരത്തിന്റെ നീളത്തിൽനിന്ന്, കുത്തുകളിലേക്കുള്ള അകലം രണ്ടു തവണ കുറച്ചതാണ് നടുവിലത്തെ സമചതുരദ്വാരത്തിന്റെ വശം.

അപ്പോൾ 8 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളിൽനിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ കുത്തുകളിട്ട് മുറിച്ചാലോ?



ഈ വരകളിലൂടെ മുറിച്ച് മാറ്റിയടുക്കിയാൽ, അകത്തു ചേർത്തുവയ്ക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശം

$$8 - (2 \times 3) = 2 \text{ സെ.മീ.}$$



ഈ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

മറ്റൊരു ചോദ്യം

8 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരത്തെ മുറിച്ചടുക്കി അതിനുള്ളിൽ 6 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരവും ചേർത്തു

വച്ച് വലിയൊരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തെ എങ്ങനെ മുറിക്കണം?

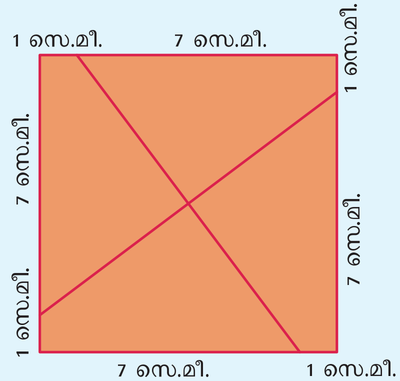
മുറിക്കാനായിടുന്ന കുത്തുകൾക്ക് മൂലകളിൽനിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 8 ൽനിന്നു കുറച്ചതാണ്, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശമായ 6 സെന്റിമീറ്റർ.

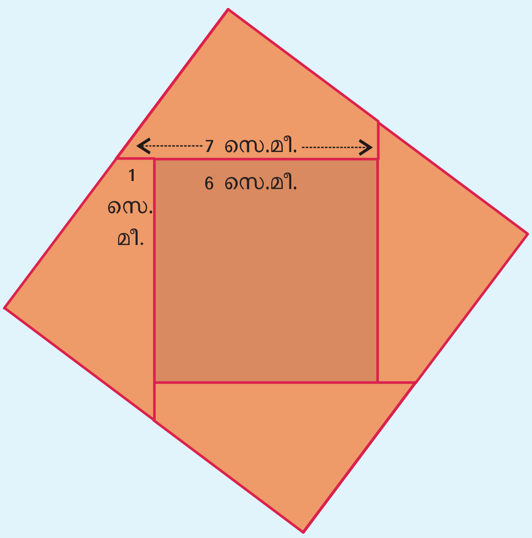
അപ്പോൾ, ഈ അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്

$$8 - 6 = 2 \text{ സെ.മീ.}$$

അതായത്, ഈ അകലം 2 സെന്റിമീറ്ററിന്റെ പകുതി അഥവാ 1 സെന്റിമീറ്റർ.

8 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇങ്ങനെ മുറിച്ച് നേരത്തേ ചെയ്തതുപോലെ കഷണങ്ങൾ മുറിച്ചുവച്ച് അടുക്കി നോക്കൂ; നടുവിൽ കിട്ടുന്നത് 6 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരം തന്നെയല്ലേ?





ഈ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

$$8^2 + 6^2 = 100 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

അൽപം ചരിത്രം

എ.ഡി. പത്താം നൂറ്റാണ്ടിൽ ബാഗ്ദാദിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പ്രസിദ്ധ ഗണിതകാരനും വാനശാസ്ത്രജ്ഞനുമായിരുന്നു അബൂ അൽ വാഫെ.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഒരു കൃതി 'കൈത്തൊഴിൽ ചെയ്യുന്നവർക്കാവശ്യമായ ജ്യാമിതീയ നിർമിതികൾ' എന്നതാണ്. ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്ത് വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കുകയും വലിയ സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ച് ചെറിയ സമചതുരങ്ങളാക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനുള്ള പല മാർഗങ്ങളും ഈ പുസ്തകത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്.

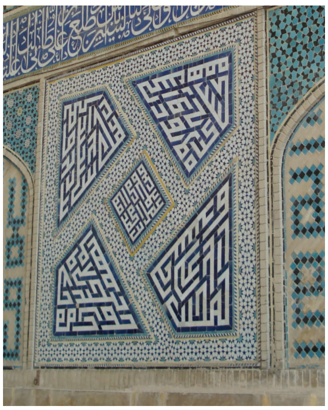
ഇതിൽ ഒരു ഭാഗത്ത് മൂന്നു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചു ചേർത്ത് വലിയൊരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാൻ അക്കാലത്തെ ശിൽപ്പികൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന മാർഗം കൃത്യമല്ലെന്ന് സമർഥിക്കുകയും ശരിയായ ഒരു മാർഗം നിർദേശിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുണ്ട്. ഇതാണ് ഈ പാഠത്തിലെ **മൂന്നു സമചതുരങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് വിവരിച്ചിരിക്കുന്നത്.

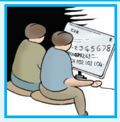
കലയും ജ്യാമിതിയും

അബൂ അൽ വാഫെയുടെ കാലത്തിനു മുമ്പുതന്നെ ഇസ്‌ലാമിക ദേവാലയങ്ങളിലെ ചുവരുകളിലും തറകളിലും അലങ്കാരപ്പണി ചെയ്ത സമചതുരങ്ങൾ പതിപ്പിക്കാറുണ്ടായിരുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള സമചതുരങ്ങൾ കൃത്യമായി മുറിച്ച് വലുതും ചെറുതുമായ മറ്റു സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതിനുള്ള ജ്യാമിതീയ മാർഗങ്ങളാണ് അബൂ അൽ വാഫെ വിവരിക്കുന്നത്.

മനോഹരമായ അനേകം ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളും ഇത്തരം ചതുരങ്ങളിൽ കാണാം.

എ.ഡി. പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പണി ചെയ്ത ഇറാനിലെ പ്രസിദ്ധമായ ജാമെ അബ്ബാസി പള്ളിയിൽ ഇത്തരത്തിൽ അലങ്കരിച്ച ഒരു ചുവരാണ് ചുവടെയുള്ള ചിത്രം.





- 7 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരവും 3 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള മറ്റൊരു സമചതുരവും മുറിച്ചെടുക്കുക; വലിയ സമചതുരം വേണ്ടവിധം മുറിച്ച്, ചെറിയ സമചതുരവും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരമുണ്ടാക്കുക.

  ഈ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

- 8 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക. ഇത് മുറിച്ച്, മറ്റൊരു സമചതുരവും ചേർത്തുവച്ച്, 80 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുക.

- 117 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് 9 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ കൂടെ എത്ര സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരം ചേർക്കണം? വലിയ സമചതുരം മുറിക്കുന്നതിന് മൂലകളിൽനിന്ന് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ അകലെ കുത്തുകളിടണം?

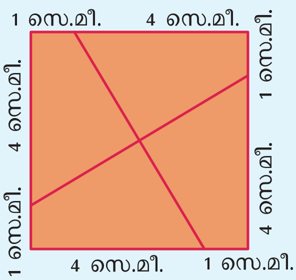
സമചതുരം വരയ്ക്കാം

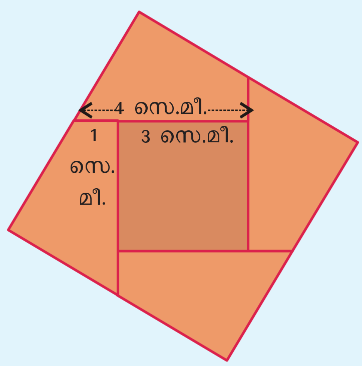
5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരവും, 3 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരവും ചേർത്ത് വലിയ സമചതുരമുണ്ടാക്കിയത് ഓർമയില്ലേ?

ആദ്യം വശങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതി കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$(5 - 3) \div 2 = 1$$

ഇനി വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ കുത്തുകളിട്ട്, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലൂടെ മുറിച്ച്, നാലു കഷണങ്ങളാക്കണം: അവ മാറ്റിയടുക്കി, നടുവിൽ ചെറിയ സമചതുരവും വച്ചാൽ $25 + 9 = 34$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം കിട്ടും.

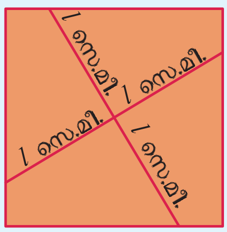


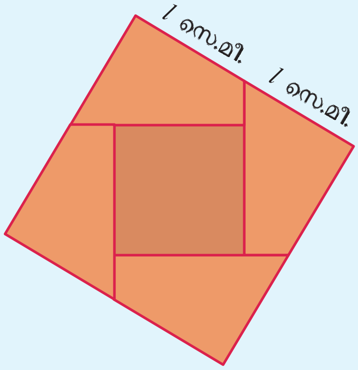


ഈ പരപ്പളവിൽ സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുകയല്ല, വരച്ചാൽ മാത്രം മതിയെങ്കിൽ, സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമുള്ള വര മാത്രം വരച്ചാൽ മതി. അത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

5 സെന്റിമീറ്റർ വശമായ സമചതുരത്തെ മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന നാലു കഷണങ്ങളുടേയും രണ്ടു വശങ്ങൾ 4 സെന്റിമീറ്ററും 1 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഈ കഷണങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചു പരിശോധിച്ചാൽ അവയുടെ മറ്റു വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണാം.

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ.

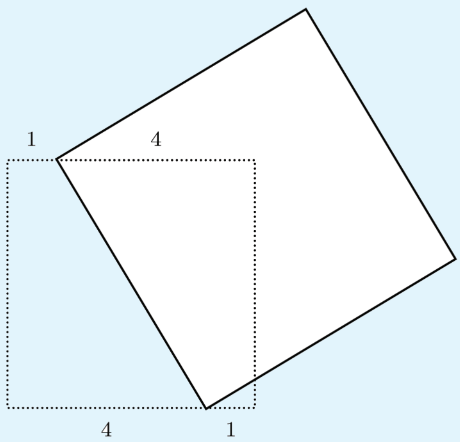




ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തെ മുറിക്കാനായി വരച്ച വരകളുടെ നീളം തന്നെയാണ് അവസാനത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും.

അപ്പോൾ 34 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ വശം വരയ്ക്കാൻ ഒരെളുപ്പവഴി കിട്ടിയല്ലോ?

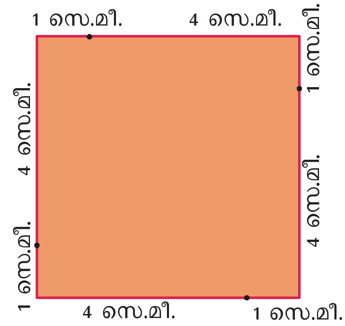
ആദ്യം 5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ട് എതിർമൂലകളിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ ഓരോ കുത്തിട്ട് യോജിപ്പിക്കുക;



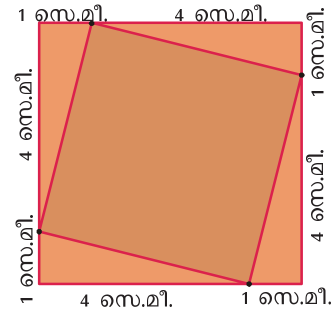
ഈ വര വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 34 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ചെറുതാകുന്ന സമചതുരം

വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു സമചതുരം വരച്ച്, മൂലകളിൽ നിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ കുത്തുകളിടുക:



ഈ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ അല്പം ചെറിയ മറ്റൊരു സമചതുരം കിട്ടും.

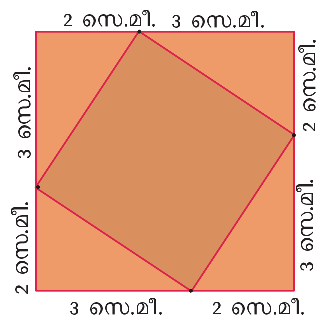


ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിൽനിന്ന് നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കുറച്ചാൽപ്പോരേ?

$$25 - 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 25 - 8 = 17 \text{ ച.സെ.മീ.}$$

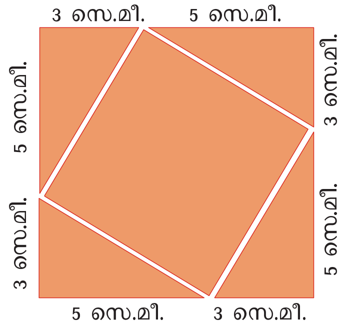
മൂലകളിൽ നിന്ന് 2 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ കുത്തുകളിട്ട് യോജിപ്പിച്ചാലോ?



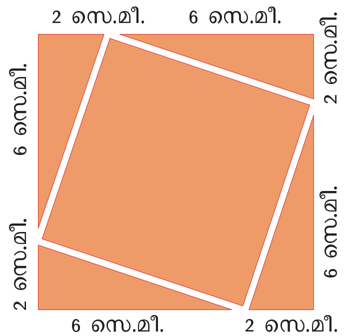
ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

മുറിച്ചു മാറ്റിയാൽ

വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റി 34 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമുണ്ടാക്കാം.



ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മുറിച്ചു മാറ്റിയാലോ?

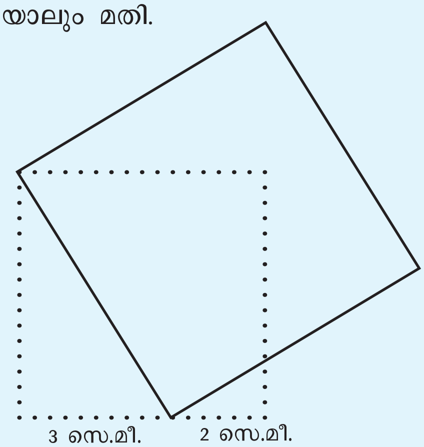


മിച്ചമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

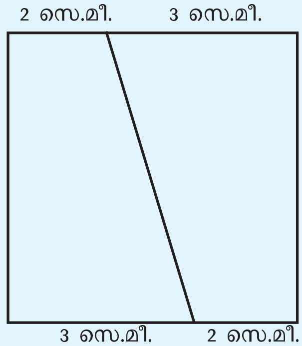
ഇതുപോലെ വലിയ സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 50 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം മുറിച്ചെടുക്കാമോ?

$44\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമായാലോ?

എതിർമൂലകൾ ഓരോന്നിൽ നിന്നും 1 സെന്റിമീറ്റർ നീക്കുന്നതിനു പകരം ഒരു മൂലയിൽ നിന്ന് $2 \times 1 = 2$ സെന്റിമീറ്റർ നീക്കിയാലും മതി.

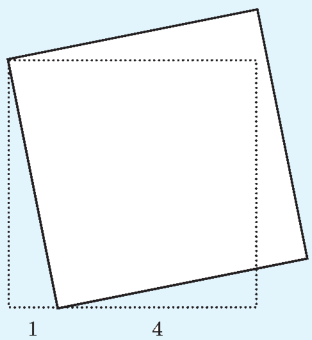


ഇതുപോലെ 5 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരവും 1 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമചതുരവും യോജിപ്പിച്ച് $25 + 1 = 26$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളിൽ നിന്ന് $(5 - 1) \div 2 = 2$ സെന്റിമീറ്റർ അകലത്തിൽ കുത്തുകളിട്ട് യോജിപ്പിക്കണം.

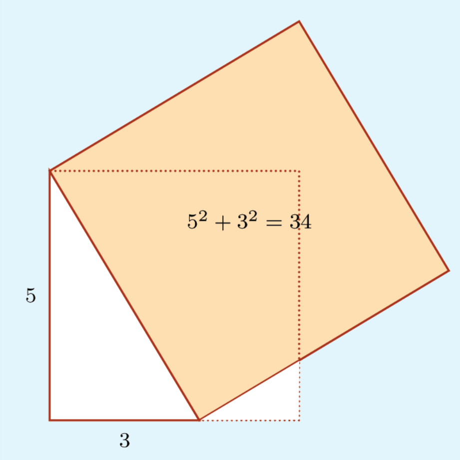


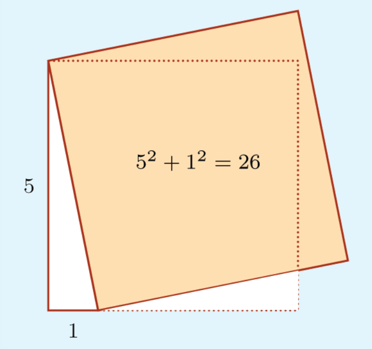
ഇനി ഈ വര വശമായി സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.

$5 - 1 = 4$ ന്റെ പകുതിയെടുക്കാതെയും സമചതുരം വരയ്ക്കാം. ഓരോ വശത്തും 2 സെന്റിമീറ്റർ എടുക്കുന്നതിനു പകരം ഒരു വശത്ത് 4 സെന്റിമീറ്റർ എടുത്താൽ മതി.



ഇപ്പോൾ വരച്ച രണ്ടു സമചതുരങ്ങളും ഒന്നുകൂടി നോക്കുക.

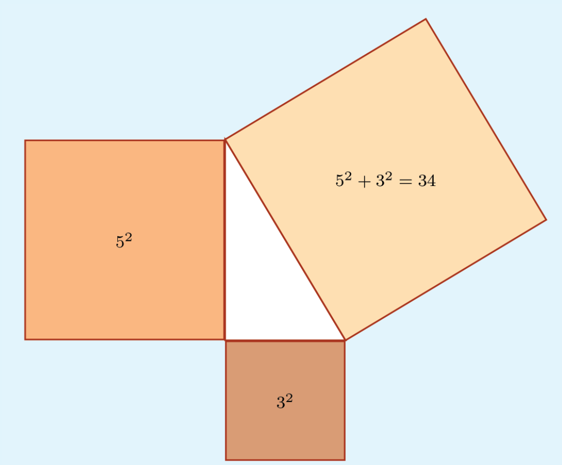




രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലും സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളംകൂടിയ വശമാണ്.

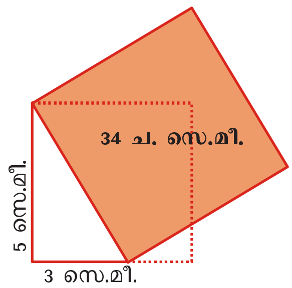
അതിന്റെ പരപ്പളവോ?

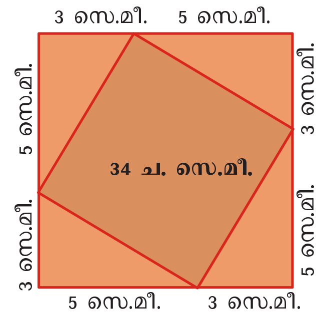
മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയും.



മട്ടത്രികോണങ്ങൾ

34 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ രണ്ടു മാർഗങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ:



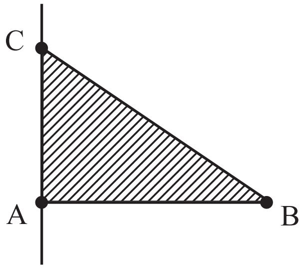


രണ്ടു ചിത്രത്തിലും ഈ സമചതുരത്തിന്റെ വശം, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശമാണ്.

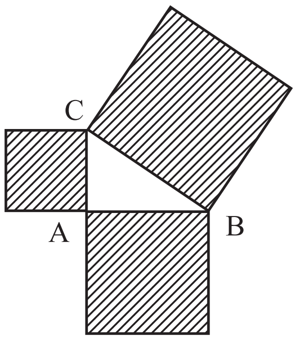
ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളും സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ AB എന്ന വരയും അതിനു ലംബമായി A യിലൂടെ മറ്റൊരു വരയും വരയ്ക്കുക.

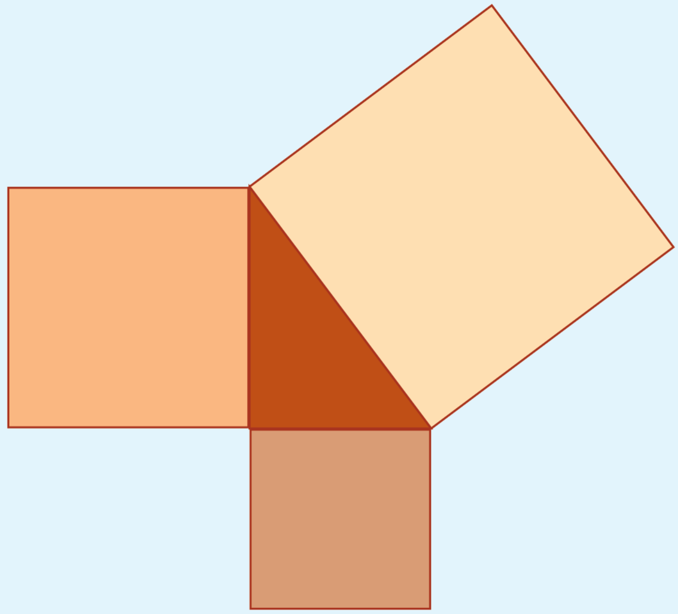


ലംബ വരയിൽ C എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി AC എന്ന വര മറച്ചുവയ്ക്കാം. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. Regular Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB, BC, AC എന്നീ വശങ്ങളിൽ ഓരോ സമചതുരം വരയ്ക്കുക. Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സമചതുരങ്ങൾക്കുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ അവയുടെ പരപ്പളവ് കാണാൻ കഴിയും.

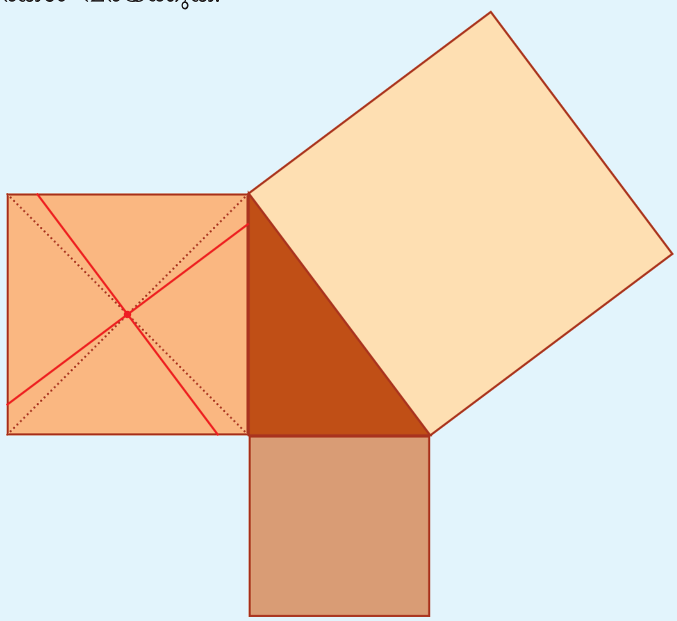


മൂന്നു സമചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റിനോക്കൂ, പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന് മാറ്റം വരുന്നുണ്ടോ? ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 25 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആകണമെങ്കിൽ ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ എത്രവീതമാക്കണം? വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 41 ചതുരശ്രയൂണിറ്റ് ആകണമെങ്കിലോ:

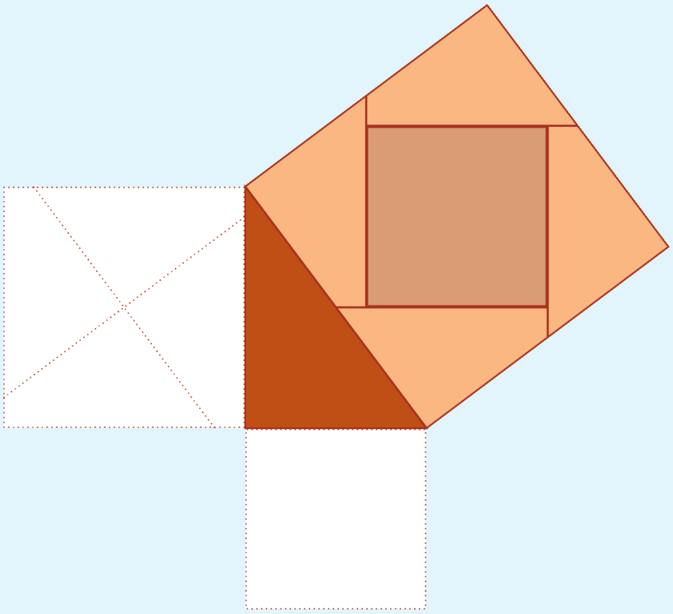
ഇനി കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണവും, അതിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളിലും സമചതുരങ്ങളും വരയ്ക്കുക.



ഇടത്തരം സമചതുരത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്ത് ഒരു കുത്തിട്ട്, അതിലൂടെ ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി രണ്ടു വരകൾ വരയ്ക്കുക:



ഇനി ഈ വരകളിലൂടെ മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന നാലു കഷണങ്ങളും ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരവും വെട്ടിയെടുത്ത്, ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ അടുക്കിവയ്ക്കുക.



ഇതിൽ നിന്നെല്ലാം എന്തു മനസ്സിലായി?

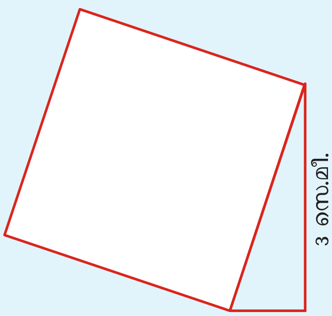
> ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്മേൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളിന്മേൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ്.

ഗ്രീസിൽ വളരെ പണ്ടു ജീവിച്ചിരുന്ന പൈഥാഗറസ് എന്ന തത്ത്വചിന്തകന്റെ പേരിൽ ഈ തത്ത്വം പൈഥാഗറസ് പ്രമാണം എന്നാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

ഇതുപയോഗിച്ച്, 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാം.

$$10 = 3^2 + 1^2$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് പ്രമാണമനുസരിച്ച് ലംബവശങ്ങൾ 3 സെന്റിമീറ്ററും 1 സെന്റിമീറ്ററുമായ മട്ടത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്മേൽ സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.



7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരമായാലോ?

പൈഥാഗറസ്

പ്രാചീനഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ പ്രമുഖനായ പൈഥാഗറസിനെക്കുറിച്ച് ഏറെയൊന്നും നമുക്കറിയില്ല. ബി.സി. 570 നോടടുത്ത് ഗ്രീസിലെ സമോസ് ദ്വീപിലാണ് അദ്ദേഹം ജനിച്ചത്.

യുവാവായിരിക്കുമ്പോൾ ഈജിപ്തിൽ പോയി പഠിച്ചുവെന്നും നാട്ടിൽ മടങ്ങിയെത്തി വിദ്യാലയം സ്ഥാപിച്ചുവെന്നുമാണ് ചരിത്രം.

“വസ്തുക്കളുടെ യഥാർഥ അവസ്ഥ ഗണിതത്തിലൂടെ മാത്രമേ അറിയാൻ കഴിയൂ” എന്നാണ് അദ്ദേഹം പഠിപ്പിച്ചത്.

ജന്മനാടായ സമോസിൽ സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്ന പൈഥാഗറസിന്റെ പ്രതിമയാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നത്.

ഭാരതഗണിതം

പ്രാചീനഭാരതത്തിലെ ചില ജ്യാമിതീയ ഗ്രന്ഥങ്ങളാണ് - ശുല്വസൂത്രങ്ങൾ.

വ്യത്യസ്ത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ പല കാലങ്ങളിലായി എഴുതിയവയാണ് ഇവ.

ബി.സി. 800 ൽ എഴുതിയതെന്നു കരുതപ്പെടുന്ന ബൗധായന ശുല്വസൂത്രത്തിൽ, സമചതുരം ഇരട്ടിക്കുന്ന രീതി പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

> സമചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വലിച്ചു പിടിക്കുന്ന ചരടുകൊണ്ട് ഇരട്ടിവലുപ്പമുള്ള സമചതുരമുണ്ടാക്കാം.

ബി.സി. 200 ൽ എഴുതിയതെന്നു കണക്കാക്കപ്പെടുന്ന കാത്യായന ശുല്വസൂത്രത്തിൽ കുറേക്കൂടി പൊതുവായ രീതി പറത്തിട്ടുണ്ട്:

ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിൽ വലിച്ചു പിടിക്കുന്ന കയറുകൊണ്ട് വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയുമുള്ള വശങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക ഉണ്ടാക്കാം.

ശുല്വ എന്ന സംസ്കൃത പദത്തിന് ചരട്, കയറ് എന്നൊക്കെയാണ് അർത്ഥം. സൂത്ര എന്ന വാക്കിന് തത്വങ്ങളുടെ ചുരുക്കെഴുത്ത് എന്നും അർത്ഥമുണ്ട്.

7 നെ രണ്ടു പൂർണവർഗങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

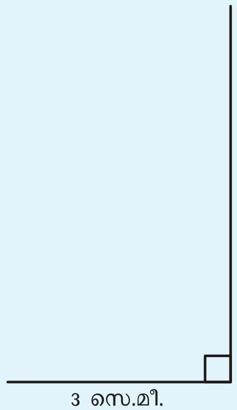
പക്ഷേ,

$$7 = 4^2 - 3^2$$

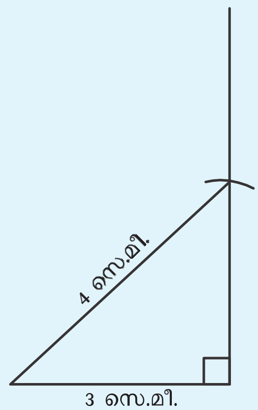
എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് പ്രമാണമനുസരിച്ച് ഇത്തരമൊരു സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, ഏറ്റവും വലിയ വശം 4 സെന്റിമീറ്ററും മറ്റൊരു വശം 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണം വരച്ചാൽ മതി.

അതെങ്ങനെ വരയ്ക്കും?

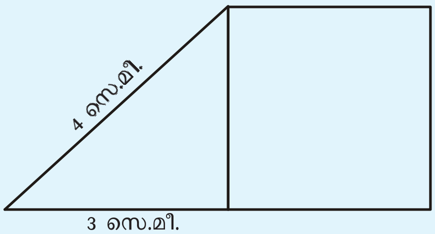
ആദ്യം 3 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയും അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അതിന് ലംബവും വരയ്ക്കുക:



ഇനി കോമ്പസ് ഉപയോഗിച്ച്, വരയുടെ മറ്റേ അറ്റത്തുനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദു ലംബത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി യോജിപ്പിക്കുക:



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വശത്തിന്മേൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, പൈഥാഗറസ് പ്രമാണമനുസരിച്ച് $4^2 - 3^2 = 7$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ.



ഇതുപോലെ ചുവടെപ്പറയുന്ന പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

- 20 ച.സെന്റിമീറ്റർ
- 39 ച.സെന്റിമീറ്റർ
- 40 ച.സെന്റിമീറ്റർ
- 65ച.സെന്റിമീറ്റർ

വർഗബന്ധം

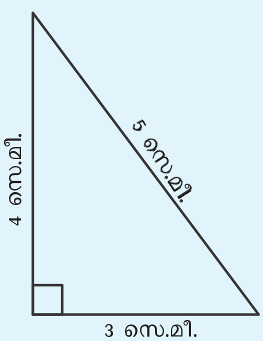
പൈഥാഗറസ് പ്രമാണം, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള ബന്ധമായി പറയാം. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശത്തിനെ അതിന്റെ കർണം (hypotenuse) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

> ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ വർഗം അതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

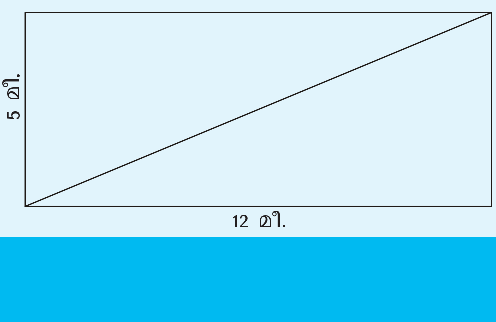
ഉദാഹരണമായി, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റിമീറ്ററും ആണെങ്കിൽ, കർണത്തിന്റെ വർഗം.

$$3^2 + 4^2 = 25$$

ആണ്. അപ്പോൾ കർണത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ.



ഈ കണക്കു നോക്കൂ. ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?



പൈഥാഗറസ് ബന്ധം

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശത്തിന്റെ വർഗം, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ വർഗം മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗത്തിന്റെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, അതൊരു മട്ടത്രികോണമാണ്.

അതായത് ഒരു വശത്തിന്റെ വർഗം മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാവുക എന്നത് മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മാത്രം പ്രത്യേകതയാണ്.

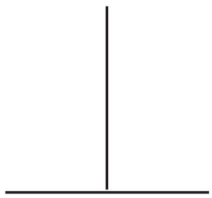
ഉദാഹരണമായി, $3^2 + 4^2 = 5^2$ ആയതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 ആയ ത്രികോണം ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം 6, 8, 10 ആയാലോ?

വ്യത്യസ്ത ഉപയോഗങ്ങൾ

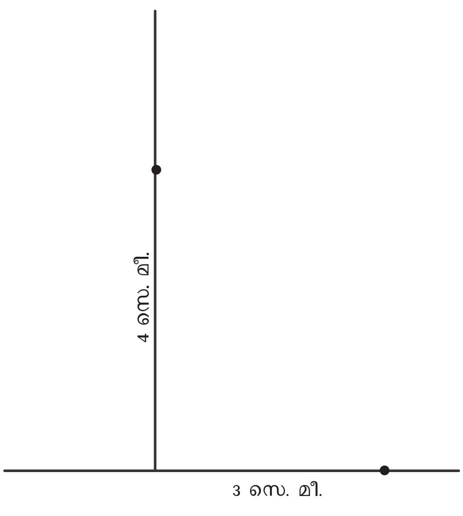
രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്ത് വലിയൊരു സമചതുരമുണ്ടാക്കാനും നിശ്ചിതപരപ്പളവുള്ള സമചതുരമുണ്ടാക്കാനുമെല്ലാം പൈഥാഗറസ് പ്രമാണം ഉപയോഗിക്കാം.

ലംബങ്ങൾ നിർമിക്കാനും ലംബമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാനും ഈ പ്രമാണംതന്നെ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ വരകൾ നോക്കുക:

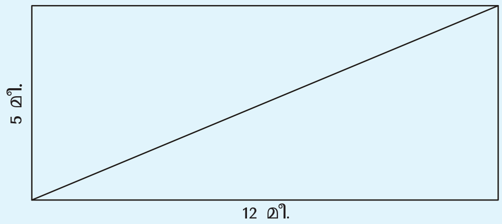


ഇവ പരസ്പരം ലംബമാണോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ ഒരു കുത്തിടുക; 4 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ മേലോട്ടുള്ള വരയിലും ഒരു കുത്തിടുക.



ഈ രണ്ടു കുത്തുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 5 സെന്റിമീറ്ററാണെങ്കിൽ വരകൾ ലംബമാണ്; കൂടുതലോ കുറവോ ആണെങ്കിൽ ലംബമല്ല.

ചതുരത്തിന്റെ വികർണം, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമാണല്ലോ.



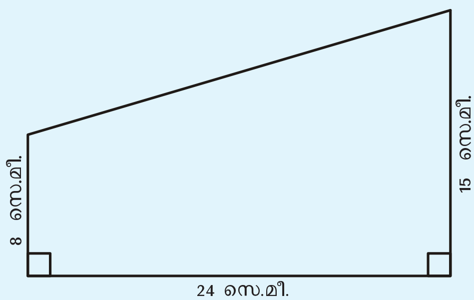
വികർണത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ വർഗം

$$5^2 + 12^2 = 169$$

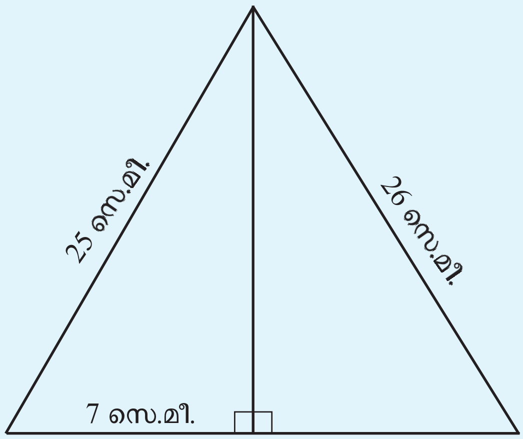
അപ്പോൾ വികർണത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{169} = 13 \text{ മീ.}$$

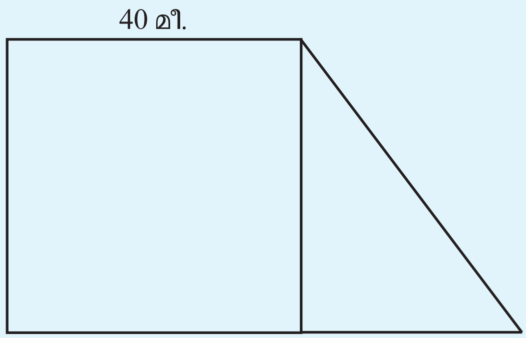
- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?



- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



- ഒരു സമചതുരവും മട്ടത്രികോണവും ചേർന്ന പുരയിടത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.



പുരയിടത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 2200 ചതുരശ്ര മീറ്ററാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

പൈഥാഗരസ്ത്രയങ്ങൾ

രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, മറ്റൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ വർഗമാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി,

$$1^2 + 2^2 = 5$$

എന്നാൽ,

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$$

$$8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$$

എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം കാണാം.

ഇങ്ങനെ മൂന്ന് എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തേതിന്റെ വർഗത്തിനു തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ മൂന്നു സംഖ്യകളെ ഒരു പൈഥാഗരസ്ത്രയം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

$$3, 4, 5$$

$$5, 12, 13$$

$$8, 15, 17$$

ഇവയെല്ലാം പൈഥാഗരസ്ത്രയങ്ങളാണ്. ഇത്തരം മറ്റു ചില പൈഥാഗരസ്ത്രയങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾക്ക് തുല്യ പരപ്പളവുള്ള മറ്റൊരു വലിയ സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നു.			
• ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന് തുല്യമാണെന്ന് യുക്തിപൂർവം സമർഥിക്കുന്നു.			
• ഒരു നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം നിർമിക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം യുക്തിപൂർവം സമർഥിക്കുന്നു.			
• പൈഥാഗറസ്പ്രമാണം തെളിവുസഹിതം സമർഥിക്കുന്നു.			
• പ്രശ്നപരിഹരണത്തിന് പൈഥാഗറസ് പ്രമാണം ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു.			
• ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതിലും നിർമിക്കുന്നതിലും കൃത്യതയും സൂക്ഷ്മതയും പാലിക്കുന്നു.			

13

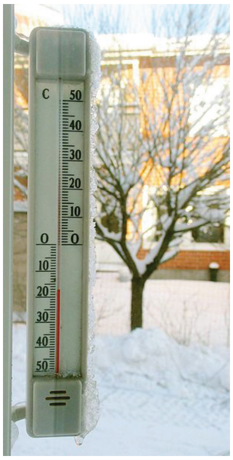
പുതിയ സംഖ്യകൾ

ന്യൂനതാപം

പത്രങ്ങളിലും ടെലിവിഷനിലും മറ്റും ഓരോ ദിവസവും വിവിധ സ്ഥലങ്ങളിലെ താപനിലകൾ പറയുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടാവുമല്ലോ. ഉത്തരേന്ത്യയിലെ പല പ്രദേശങ്ങളിലേയും താപനില തണുപ്പുകാലത്ത് –1°C, –2°C എന്നെല്ലാം പറയാറുണ്ട്. എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

വെള്ളം ഉറഞ്ഞ് കട്ടിയാകുന്ന താപനിലയെയാണ് പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസ് (0°C) എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇതിലും താഴെയുള്ള താപനിലകളെയാണ് ന്യൂനം ചേർത്തു പറയുന്നത്.

ഒരു കണ്ണാടിക്കുഴലിനുള്ളിലെ രസനാളം താപം കൂടുമ്പോൾ വികസിച്ച് ഉയരുകയും താപം കുറയുമ്പോൾ സങ്കോചിച്ച് താഴുകയും ചെയ്യും. ഇതുപയോഗിച്ചാണ് സാധാരണയായി താപം അളക്കുന്നത്. തണുപ്പേറിയ പ്രദേശങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഇത്തരം താപമാപിനികളിൽ പൂജ്യത്തിൽത്താഴെയും സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടാകും. ചിത്രത്തിലെ താപമാപിനിയിൽ കാണിക്കുന്നത്, –20°C നും –15°C നും ഇടയ്ക്കുള്ള താപനിലയാണ്.



നിറമുള്ള സംഖ്യകൾ

നീതുവും ഹരിയും അൻവറും ഒരു കളിയിലാണ്; സംഖ്യകൾകൊണ്ടൊരു ചീട്ടുകളി. 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയ 50 ചീട്ടുകൾ, ഓരോ സംഖ്യയും 10 എണ്ണം വീതം; പകുതി ചീട്ടുകളിൽ കറുത്ത സംഖ്യകളും ബാക്കി പകുതിയിൽ ചുവന്ന സംഖ്യകളും.

ആദ്യം ഓരോരുത്തരും ഒരു കറുത്ത 5 എടുക്കുന്നു. ബാക്കി ചീട്ടുകളെല്ലാം ഇടകലർത്തി അട്ടിയായി നടുക്കു കമഴ്ത്തി വയ്ക്കുന്നു. ഇനി ഓരോരുത്തരും ഊഴംവച്ച് ഓരോ ചീട്ട് അട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നു. കിട്ടുന്നത് കറുത്ത സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അത് കൂട്ടാം. ചുവന്ന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ കുറയ്ക്കണം. ഇങ്ങനെ കൂട്ടിയും കുറച്ചും കളി തുടരുന്നു. ആദ്യം 10 നേക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നയാൾ ജയിക്കും.

ആദ്യം കിട്ടിയത് ഇങ്ങനെയാണ്:

നീതു $\boxed{2}$ അൻവർ $\boxed{1}$ ഹരി $\boxed{3}$

അപ്പോൾ കളിയുടെ നിയമമനുസരിച്ച്, ഓരോരുത്തരുടെയും ഇപ്പോഴത്തെ സംഖ്യ എഴുതാം:

നീതു	5	7
അൻവർ	5	6
ഹരി	5	2

രണ്ടാംവട്ടം കിട്ടിയത് ഇങ്ങനെ:

നീതു $\boxed{1}$ അൻവർ $\boxed{3}$ ഹരി $\boxed{3}$

ഇപ്പോൾ ഓരോരുത്തരുടെയും നില എങ്ങനെയെഴുതും?

നീതു	5	7	8
അൻവർ	5	6	3
ഹരി	5	2	

ഹരിയുടെ കാര്യത്തിൽ തർക്കമായി.

2 ൽ നിന്ന് 3 കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല; അതിനാൽ തന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ സംഖ്യ 0 എന്നെഴുതാം എന്നു ഹരി പറഞ്ഞു.

അങ്ങനെയല്ല, ഹരി കളിയിൽ തോറ്റു, ഇനി നീതുവും താനും മാത്രം കളിച്ചാൽ മതി എന്ന് അൻവർ.

അതുവേണ്ട, ഹരി ഇനിയും കളിക്കട്ടെ; അടുത്ത വട്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചാൽ മതി എന്നായിരുന്നു നീതുവിന്റെ അഭിപ്രായം.

ഇതെല്ലാവരും സമ്മതിച്ചു. ഹരിയുടെ കളത്തിൽ “1 കുറയ്ക്കണം” എന്നെഴുതാമെന്നു തീരുമാനിച്ചു.

എന്നാൽപ്പിന്നെ അൽപ്പംകൂടി ചുരുക്കി −1 എന്നെഴുതിയാൽപ്പോരേ എന്നായി അൻവർ. അതും എല്ലാവരും സമ്മതിച്ചു.

നീതു	5	7	8
അൻവർ	5	6	3
ഹരി	5	2	−1

അടുത്ത വട്ടം ഹരി രക്ഷപ്പെട്ടു.

നീതു **4** അൻവർ **5** ഹരി **3**

കളിക്കാരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ നില എഴുതാമോ?

നീതു	5	7	8	4
അൻവർ	5	6	3	
ഹരി	5	2	−1	

ഹരിക്ക് ഇപ്പോൾ കിട്ടിയത് 3; നേരത്തേ ഉണ്ടായിരുന്ന 1 ന്റെ കടം കുറച്ചാൽ 2.

അൻവറിന്റെ കാര്യമോ?

3 ൽ നിന്ന് 5 കുറയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. മുമ്പു ഹരിയുടെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ അടുത്തതായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്ന് കുറച്ചാൽ മതി എന്നു തീരുമാനിച്ചു.

എത്ര കുറയ്ക്കണം?

2 കുറയ്ക്കണം എന്നതിനെ മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ −2 എന്നെഴുതാം.

നീതു	5	7	8	4
അൻവർ	5	6	3	−2
ഹരി	5	2	−1	2

നാലാം വട്ടം കിട്ടിയ ചീട്ടുകൾ ഇവയാണ്:

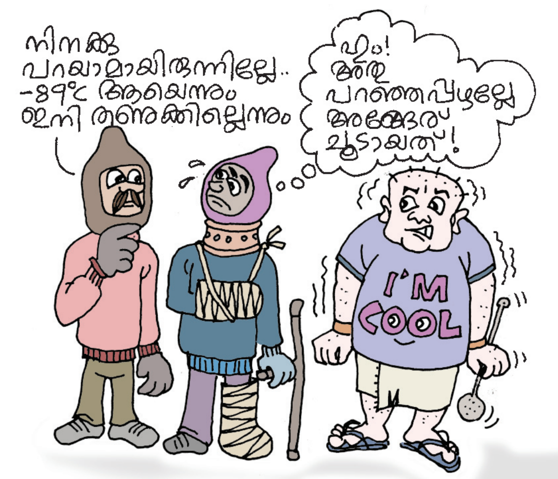
നീതു **1** അൻവർ **3** ഹരി **3**

ശൈത്യം,അതിശൈത്യം

ഇന്ത്യയിൽ ഏറ്റവും തണുപ്പനുഭവപ്പെടുന്ന പ്രദേശം കശ്മീരിലെ കാർഗിൽ ജില്ലയിലുള്ള ദ്രാസ് എന്ന പട്ടണമാണ്. ഇവിടെ താപനില −60 °C വരെ താഴ്ന്നതായി രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ഭൂമിയിൽ ഏറ്റവും തണുപ്പനുഭവപ്പെടുന്നത് അന്റാർട്ടിക്കാ ഭൂഖണ്ഡത്തിലാണ്.

ഇവിടെയാണ് ഭൂമിയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനിലയായ −89 °C രേഖപ്പെടുത്തിയത്.



ശൈത്യപരിധി

നമുക്കറിയാവുന്ന പ്രപഞ്ചം മുഴുവനായി എടുത്താൽ, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത് ഭൂമിയിൽനിന്ന് അഞ്ഞൂറുകോടിക്കോടി (5×10^{16}) കിലോമീറ്റർ അകലെയുള്ള 'ബൂമറാങ് നെബുല' എന്നു പേരിട്ടിട്ടുള്ള ഒരു നക്ഷത്രപടലത്തിലാണ്. അത് $-272.15°C$ ആണ്.

പ്രകൃതിയിൽ സ്വാഭാവികമായുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപനില ഇതാണെങ്കിലും ഇതിലും കുറഞ്ഞ താപനില പരീക്ഷണശാലകളിൽ കൃത്രിമമായി ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

എന്നാൽ, ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ താപത്തെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങളനുസരിച്ച്, $-273.15°C$ ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസോ അതിൽക്കുറവോ ആയ താപനില ഉണ്ടാവാനോ ഉണ്ടാക്കാനോ സാധ്യമല്ല.

ഇപ്പോഴത്തെ നില എഴുതാമോ?

നീതു	5	7	8	4	
അൻവർ	5	6	3	–2	
ഹരി	5	2	–1	2	

പൂജ്യത്തിൽ താഴെ

ചീട്ടുകളിയിൽ 2 ൽ നിന്ന് 3 കുറയ്ക്കേണ്ടിവന്നപ്പോൾ അത് –1 എന്നെഴുതിയല്ലോ. ഇക്കാര്യം

$$2 - 3 = -1$$

എന്നെഴുതാം. എന്താണിതിന്റെ അർഥം?

2 ൽ നിന്ന് 2 കുറച്ചാൽ 0 ആയി. ഇവിടെ കുറയ്ക്കേണ്ടത് 3 ആയതിനാൽ 1 കൂടി കുറയ്ക്കണം; ഇത് –1 എന്നെഴുതാം:

$$0 - 1 = -1$$

ഇതുപോലെ 3 ൽ നിന്ന് 5 കുറച്ചതെങ്ങനെയാണ്?

3 ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ 0; ഇനിയെത്ര കുറയ്ക്കണം?

$$0 - 2 = -2$$

ഇങ്ങനെ ന്യൂനചിഹ്നം ചേർത്തെഴുതുന്ന സംഖ്യകളെ ന്യൂനസംഖ്യകൾ (negative numbers) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു പരീക്ഷയിൽ 25 ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 2 മാർക്ക് വീതം കിട്ടും; തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങളോരോന്നിനും 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കും.

ഉദാഹരണമായി, 19 ഉത്തരം ശരിയും 6 ഉത്തരം തെറ്റുമാണെങ്കിൽ, ആകെ കിട്ടുന്ന മാർക്ക്

$$(19 \times 2) - 6 = 32$$

മറിച്ചായാലോ?

ശരിയായ 6 ഉത്തരത്തിന് $(6 \times 2) = 12$ മാർക്ക് കിട്ടും. തെറ്റിപ്പോയ 19 ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 19 മാർക്ക് കുറയും.

മാർക്ക് $12 - 19$

ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

12 ൽ നിന്ന് 12 കുറയ്ക്കുമ്പോൾ 0 ആകും; ഇനിയെത്ര കുറയ്ക്കണം?

$$19 - 12 = 7$$

അപ്പോൾ

$$12 - 19 = 0 - 7 = -7$$

ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ന്യൂനവും ചിലപ്പോൾ വേണ്ടിവരും. ഈ കണക്കു നോക്കൂ.

ഒരു പരീക്ഷയിൽ 10 ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ശരിയായ ഓരോ ഉത്തരത്തിനും 1 മാർക്ക്; തെറ്റായ ഓരോ ഉത്തരത്തിനും $\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയ്ക്കും.

3 ഉത്തരം മാത്രം ശരിയായ ഒരാൾക്ക് എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും?

ശരിയായ 3 ഉത്തരത്തിന് 3 മാർക്ക് കിട്ടും. തെറ്റായ 7 ഉത്തരങ്ങൾക്ക്, 7 ന്റെ പകുതി $3\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയും. 3 ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ 0. ഇനിയും $\frac{1}{2}$ കൂടി കുറയ്ക്കണം. അപ്പോൾ ആകെ മാർക്ക്

$$3 - 3\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ഈ പരീക്ഷയിൽ ഒരു ഉത്തരം മാത്രം ശരിയായ ആൾക്ക് എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും?

$$1 - 4\frac{1}{2}$$

ഇതെങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

$$1 - 1 = 0$$

ഇനിയും കുറയ്ക്കേണ്ടത്

$$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$$

അപ്പോൾ

$$1 - 4\frac{1}{2} = 0 - 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$$

ന്യൂനസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങുമ്പോൾ $1, 2, 1\frac{1}{2}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള (ന്യൂനമല്ലാത്ത) സംഖ്യകളെ അധിസംഖ്യകൾ (positive numbers) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ 0 എന്ന സംഖ്യയോ? അത് അധിസംഖ്യയുമല്ല, ന്യൂനസംഖ്യയുമല്ല.

ചെറിയ അധിസംഖ്യയിൽനിന്നു വലിയ അധിസംഖ്യ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ന്യൂനസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ആദ്യം പൂജ്യത്തിലെത്തിക്കുകയും പിന്നീട് പൂജ്യത്തിൽനിന്നു കുറ

ന്യൂനധനം

എ.ഡി. ഏഴാംനൂറ്റാണ്ടു മുതൽതന്നെ ഇന്ത്യയിൽ പണമിടപാടുകളിലെ കടം സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ഇക്കാലത്തും ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

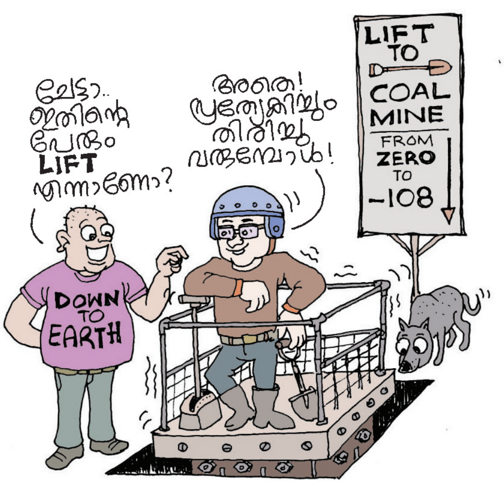
ഉദാഹരണമായി, പലരും മൊബൈൽ ഫോൺ ഉപയോഗിക്കുന്നത് മുൻകൂറായി ഒരു നിശ്ചിത തുക അടച്ചിട്ടാണ്. ഉപയോഗത്തിനനുസരിച്ച് ഇത് കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കും. ഏതവസരത്തിലും മിച്ചം എത്രയുണ്ടെന്ന് കാണാനുള്ള സംവിധാനവുമുണ്ട്. അടച്ച തുക തീർന്നാലും കുറച്ചുകൂടി ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയും. ഈ സമയത്ത് മിച്ചം തുക കാണിക്കുന്നത് -2 രൂപ, -3 രൂപ എന്നിങ്ങനെയെല്ലാമായിരിക്കും. തുടർന്ന് പണംഅടയ്ക്കുമ്പോൾ ഈ തുക കുറയ്ക്കും എന്നാണ് ഇതിനർഥം.

ന്യൂന നിലകൾ

ഉയരം കൂടിയ കെട്ടിടങ്ങളിൽ ഒരു നിലയിൽ നിന്നു മറ്റൊന്നിലേക്കു പോകാൻ ലിഫ്റ്റ് എന്ന യന്ത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇതിൽ വിവിധ നിലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതിയ ബട്ടനുകൾ ഉണ്ടാകും. ഇതമർത്തിയാൽ ഉദ്ദേശിക്കുന്ന നിലയിൽ എത്താം. ഒരു ലിഫ്റ്റിലെ ഇത്തരം ചില ബട്ടനുകളാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

ഇതിൽ $-1, -2$ എന്നീ ന്യൂനസംഖ്യകൾ എന്തിനാണ്?

ഈ കെട്ടിടത്തിൽ തറനിരപ്പിനു താഴെ ചില നിലകളുണ്ട്. അവയിൽ ആദ്യത്തേതിനെ -1 എന്നും, അതിലും താഴെയുള്ള നിലയെ -2 എന്നും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



യ്ക്കുകയുമാണ് ചെയ്തത്. ഇതിനുപകരം നേരിട്ടു കണക്കാക്കിക്കൂടേ?

മുകളിൽ എഴുതിയ കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ.

$2-3 = -1$	$3-2 = 1$
$3-5 = -2$	$5-3 = 2$
$12-19 = -7$	$19-12 = 7$
$3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$
$1 - 4\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2} - 1 = 3\frac{1}{2}$

ഇവയിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി?

അധിസംഖ്യകളിൽ ചെറുതിൽനിന്ന് വലുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, വലുതിൽനിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നതിന്റെ ന്യൂനമാണ്.

ഇതു ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

x, y എന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അധിസംഖ്യകളിൽ $x < y$ ആണെങ്കിൽ

$$x - y = -(y - x)$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- $4-9$
- $14-29$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
- $5-10$
- $25-65$
- $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

സംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ചീട്ടുകളിയിൽ ഒരാളുടെ സംഖ്യ -2 ആണ് എന്നതിന്റെ അർഥം, ഇനി കിട്ടുന്നതിൽ നിന്ന് 2 കുറയ്ക്കണം എന്നാണല്ലോ. തുടർന്ന് അട്ടിയിൽനിന്ന് കറുത്ത 2 കിട്ടിയാൽ അയാളുടെ സംഖ്യ

$$2 - 2 = 0$$

സംഖ്യ -2 ആയിരിക്കുമ്പോൾ 2 കൂട്ടുന്നതിനെ

$$-2 + 2$$

എന്നുമെഴുതാം. അതായത്,

$$-2 + 2 = 2 - 2 = 0$$

10 ചോദ്യങ്ങളുള്ള പരീക്ഷയിൽ, ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 1 മാർക്ക് കൊടുക്കുകയും തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്കെല്ലാം 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ആദ്യത്തെ 5 ഉത്തരം തെറ്റുകയും അടുത്ത 5 ഉത്തരം ശരിയാവുകയും ചെയ്താൽ എത്ര മാർക്ക് കിട്ടും?

ശരിയായ 5 ഉത്തരത്തിന്റെ 5 മാർക്കിൽനിന്ന് തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങളുടെ 5 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ, ആകെ മാർക്ക് 0.

ഉത്തരമെഴുതിയ മുറയ്ക്ക് കണക്കാക്കിയാൽ, ആകെ മാർക്ക് $-5+5$ എന്നെഴുതാം. അതായത്.

$$-5+5=5-5=0$$

ആദ്യത്തെ 4 ഉത്തരം തെറ്റും, അടുത്ത 6 എണ്ണം ശരിയുമാണെങ്കിലോ?

അത് $-4+6$ എന്നെഴുതാം. ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കു കിട്ടിയ 6 മാർക്കിൽനിന്ന് തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് നഷ്ടപ്പെടുന്ന 4 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ $6-4=2$. അപ്പോൾ

$$-4+6=6-4=2$$

ആദ്യത്തെ 6 എണ്ണം തെറ്റും, അടുത്ത 4 എണ്ണം ശരിയുമാണെങ്കിലോ?

ആകെ മാർക്ക് $-6+4$ എന്നെഴുതാം.

ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്കു കിട്ടിയ 4 മാർക്കിൽനിന്ന്, തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് നഷ്ടപ്പെടുന്ന 6 മാർക്ക് കുറച്ചാൽ $4-6=-2$ അപ്പോൾ

$$-6+4=4-6=-2$$

10 ചോദ്യങ്ങളിൽ ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 1 മാർക്ക് കൊടുക്കുകയും തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് $\frac{1}{2}$ മാർക്ക് കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്ന പരീക്ഷയിൽ, അവസാനത്തെ 3 ഉത്തരം മാത്രമാണ് ശരിയായതെങ്കിൽ ആകെ മാർക്ക് എത്രയാണ്?

ആകെ മാർക്ക് $3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ എന്നു നേരത്തേ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഉത്തരങ്ങളുടെ മുറയ്ക്ക് മാർക്ക് കണക്കാക്കിയാൽ, ആകെ മാർക്ക് $-3\frac{1}{2}+3$ എന്നും പറയാം. അതായത്

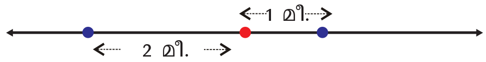
$$-3\frac{1}{2}+3=3-3\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ഈ കണക്കുകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കാം.

$$-2+2 = 2-2=0$$
$$-5+5 = 5-5=0$$
$$-4+6 = 6-4=2$$

ദിശാമാറ്റം

ഒരു നേർവരയിലൂടെയുള്ള ചലനത്തെക്കുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ, വരയിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ഒരു ദിശയിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളെ അധിസംഖ്യകൾകൊണ്ടും എതിർദിശയിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യകൾകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.



ചിത്രത്തിൽ, ചുവന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വലത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ അധിസംഖ്യകളായും ഇടത്തോട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഈ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ആദ്യം 3 മീറ്റർ വലത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചശേഷം, 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചാൽ എത്തിച്ചേരുന്നത് ബിന്ദുവിന്റെ ഇടത്തോ വലത്തോ? എത്ര അകലെ? ഇക്കാര്യം

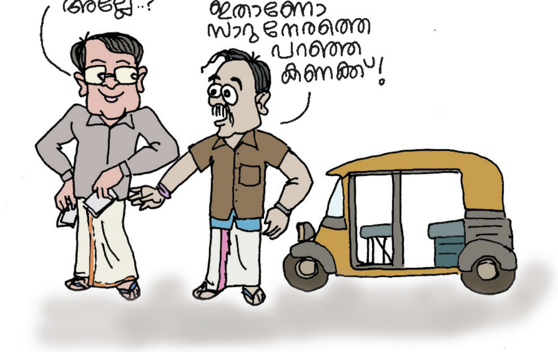
$$3-5=-2$$

എന്നെഴുതാം.

ആദ്യം 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചശേഷം, 3 മീറ്റർ വലത്തോട്ടു സഞ്ചരിച്ചാലോ?

$$-5+3=-2$$

ആദ്യം 5 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ട് സഞ്ചരിച്ചശേഷം വീണ്ടും 3 മീറ്റർ ഇടത്തോട്ടുതന്നെ സഞ്ചരിച്ചാലോ?



വേഗത്തിന്റെ ഗണിതം

ഭൂമിയിൽ നിന്ന് മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു ഉയർന്നുയർന്നു പോകുമ്പോൾ ഓരോ ക്ഷണത്തിലും വേഗം കുറയും; കുറഞ്ഞുകുറഞ്ഞ് വേഗം പൂജ്യമാകുമ്പോൾ താഴോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങും. ഈ മടക്കയാത്രയിൽ വേഗം കൂടിക്കൂടിവരും. അവസാനം നിലത്തു വീഴും.

നേരെ മേൽപ്പോട്ടാണ് എറിയുന്നതെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിലാണ് വേഗം കുറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ നേരെ മേൽപ്പോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം 1 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ $49 - 9.8 = 39.2$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകും; 2 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ $49 - (2 \times 9.8) = 29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകും.

5 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വേഗം

$$49 - (5 \times 9.8) = 0$$

ആകും. തുടർന്ന് ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ട് വീഴാൻ തുടങ്ങും.

എറിഞ്ഞതിനുശേഷം 7 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴോ?

വീഴ്ച തുടങ്ങി $7 - 5 = 2$ സെക്കന്റ് ആയി. അപ്പോൾ വേഗം പൂജ്യത്തിൽനിന്ന് 2×9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് കൂടി. അതായത് 19.6 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് ചുരുക്കിയെഴുതാം: എറിഞ്ഞുകഴിഞ്ഞ് t സെക്കന്റ് ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗം എത്രയാണ്?

$t < 5$ ആണെങ്കിൽ, വേഗം

$49 - 9.8t$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

$t > 5$ ആയാലോ? താഴേക്കുള്ള യാത്ര തുടങ്ങി $t - 5$ സെക്കന്റ് ആയി. അപ്പോൾ വേഗം

$(t-5) \times 9.8 = 9.8t - 49$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്.

$$-6 + 4 = 4 - 6 = -2$$

$$-3\frac{1}{2} + 3 = 3 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിനോട് ഒരു അധിസംഖ്യ കൂട്ടുക എന്നതിന്റെ അർഥം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആദ്യസംഖ്യ കുറയ്ക്കുക എന്നാണ്.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

x, y എന്ന ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$-x + y = y - x$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

- $-4 + 9$
- $-15 + 8$
- $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
- $-9 + 4$
- $-8 + 15$
- $-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

വീണ്ടും കുറയ്ക്കാം

തെറ്റായ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് 1 മാർക്ക് കുറയ്ക്കുന്ന പരീക്ഷയിൽ ആദ്യത്തെ 2 ഉത്തരങ്ങളും തെറ്റിയാൽ, ആകെ മാർക്ക് എത്രയായി?

അടുത്ത ഉത്തരവും തെറ്റാണെങ്കിലോ?

3 ഉത്തരങ്ങൾ തെറ്റിയതിനാൽ മാർക്ക് -3 അല്ലേ?

ഇത് മറ്റൊരു വിധത്തിലും പറയാം. ആദ്യത്തെ രണ്ട് ഉത്തരം തെറ്റിയപ്പോൾ മാർക്ക് -2. അടുത്തതും തെറ്റിയതിനാൽ ഇനി 1 മാർക്ക് കൂടി കുറയ്ക്കണം, അതായത് $-2 - 1$. അതായത്

$$-2 - 1 = -3$$

അടുത്ത രണ്ട് ഉത്തരവും തെറ്റാണെങ്കിലോ?

5 ഉത്തരം തെറ്റി; മാർക്ക് -5. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ നോക്കിയാൽ,

-3 ൽ നിന്ന് വീണ്ടും 2 കുറഞ്ഞു. അതായത് $-3 - 2$

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$-3 - 2 = -5$$

അപ്പോൾ $-5 - 3$ എത്രയാണ്?

-5 എന്നാൽ 0 നെക്കാൾ 5 കുറവ്; വീണ്ടും 3 കുറഞ്ഞാലോ? ആകെ എത്ര കുറയും?

അതായത്

$$-5-3=-(5+3)=-8$$

ഇതുപോലെ $-5-7$ കണക്കാക്കിക്കൂടേ?

$$-5-7=-(5+7)=-12$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

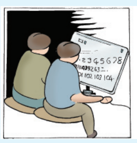
ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു അധിസംഖ്യ കുറച്ചാൽ, ഈ അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ന്യൂനം കിട്ടും.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാലോ?

x, y എന്ന ഏത് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$-x-y=-(x+y)$$

ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.



- $-1-1$
- $-7-8$
- $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$
- $-2-2$
- $-8-7$
- $-2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}$
- $8-12$
- $-10-4$
- $1\frac{1}{2}-7\frac{1}{2}$
- $-25-3\frac{1}{2}$
- $-8+8$
- $-10+20$
- $-3\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$
- $-20+40$
- $-7+4$
- $-4\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}$
- $-12\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

ന്യൂനവേഗം

49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേൽപ്പോട്ട് എറിഞ്ഞ വസ്തുവിന്റെ വേഗം എഴുതിയത് രണ്ടു ബീജഗണിതവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ.

$t<5$ ആണെങ്കിൽ $v=49-9.8\,t$

$t>5$ ആണെങ്കിൽ $v=9.8\,t-49$

മേലോട്ടുള്ള വേഗത്തെ അധിസംഖ്യകൊണ്ടും താഴോട്ടുള്ള വേഗത്തെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഏതു സമയത്തെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കാനും

$$v=49-9.8t$$

എന്ന ഒറ്റ ബീജഗണിതവാക്യം മതിയാകും. ഉദാഹരണമായി, എറിഞ്ഞ് 8 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ വേഗം

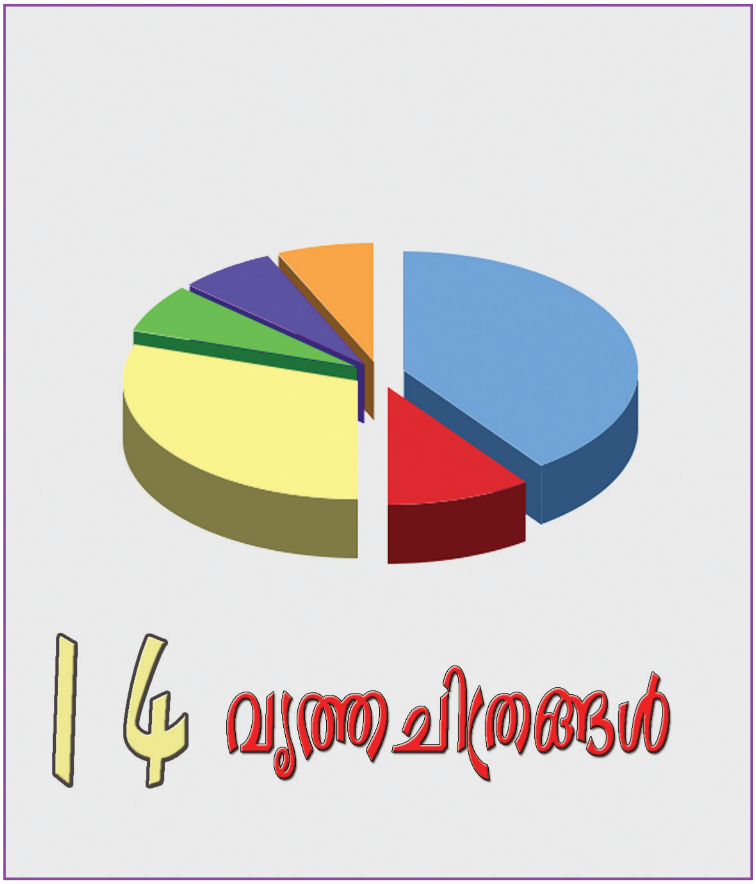
$49-(9.8\times 8)=-29.4$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• ചെറിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കേണ്ടിവരുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെ ന്യൂനസംഖ്യയെ വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ കണ്ടെത്തി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയോട് ഒരു അധിസംഖ്യ കൂട്ടുന്നതിനും ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്ന് ഒരു അധിസംഖ്യ കുറയ്ക്കുന്നതിനുമുള്ള ക്രിയാരീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• കളികളിലും സ്കോർ രേഖപ്പെടുത്തേണ്ടിവരുന്ന മറ്റു സന്ദർഭങ്ങളിലും ന്യൂനസംഖ്യ ഉപയോഗിക്കുന്നു.			

14

വൃത്തചിത്രങ്ങൾ

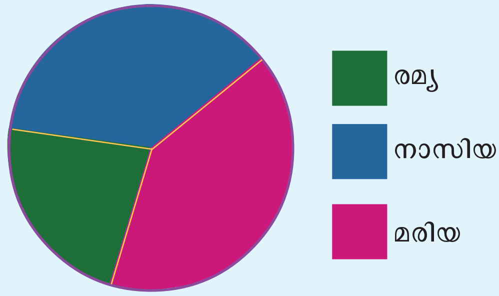


വൃത്തചിത്രങ്ങൾ (Pie diagrams)

സംഖ്യാപരമായ ഏതെങ്കിലും ഒരു വസ്തുതയെ പലഭാഗങ്ങളായി തരംതിരിക്കുകയും ഇവ തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം വേണ്ടിവരുകയും ചെയ്യുമ്പോഴാണ് വൃത്തചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇതിൽ ഓരോ വൃത്തഭാഗത്തിന്റെയും വലുപ്പം അതു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യക്കനുസരിച്ചാണ് വരയ്ക്കുന്നത്.

തിരഞ്ഞെടുപ്പ്

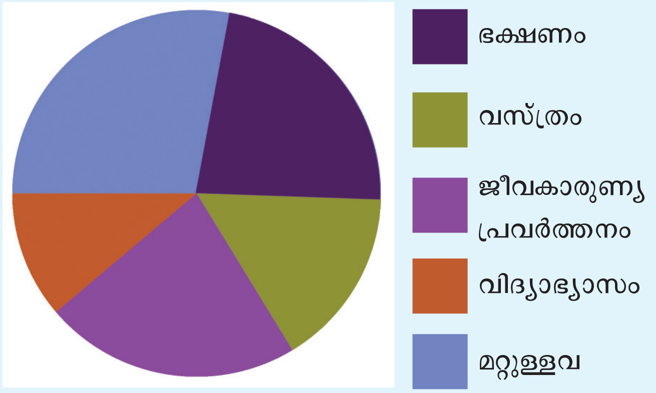
സ്കൂൾ തിരഞ്ഞെടുപ്പിലെ സ്ഥാനാർഥികൾക്കു കിട്ടിയ വോട്ടുകൾ ചിത്രരൂപത്തിൽ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.



- ആരാണ് വിജയിച്ചത്?
- മറ്റെന്തെല്ലാം വിവരങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും?

വീട്ടിലെ ചെലവുകൾ

ഫാത്തിമയുടെ വീട്ടിലെ വിവിധ ചെലവുകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കൂ.



ഏറ്റവും കൂടുതൽ ചെലവ് ഏതിനാണ്?

ഏറ്റവും കുറവോ?

ഒരേ തുക ചെലവായത് ഏതിനൊക്കെ?

ഒരേ ചെലവാണെന്ന് എങ്ങനെ മനസ്സിലായി?

-
-

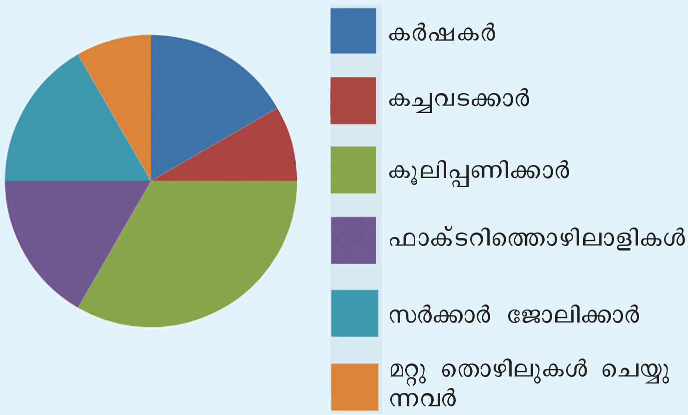
ചിത്രത്തിൽനിന്നു മറ്റെന്തെല്ലാം കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലായി?

-
-
-

ഇത്തരത്തിൽ വിവരങ്ങളെ വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങളായി സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളെ വൃത്തചിത്രങ്ങൾ (pie diagrams) എന്നു പറയുന്നു.

തൊഴിലുകൾ

ഒരു പഞ്ചായത്തിൽ വിവിധ തൊഴിലുകളിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവരെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രമാണ് ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നത്.



- ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആളുകളുടെ തൊഴിൽ എന്താണ്?
- കർഷകരുടെ ഏകദേശം എത്ര മടങ്ങാണ് കൂലിപ്പണിക്കാർ?
- ഫാക്ടറിത്തൊഴിലാളികൾ ആകെയുള്ളവരുടെ ഏകദേശം ഏത്ര ഭാഗമാണ്?
- ഓരോ തൊഴിലും ചെയ്യുന്നവരെ അവരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ക്രമമായി എഴുതുക.

ഈ ചിത്രത്തെ സംബന്ധിക്കുന്ന കുറച്ചു ചോദ്യങ്ങൾ കൂടി തയാറാക്കുക.

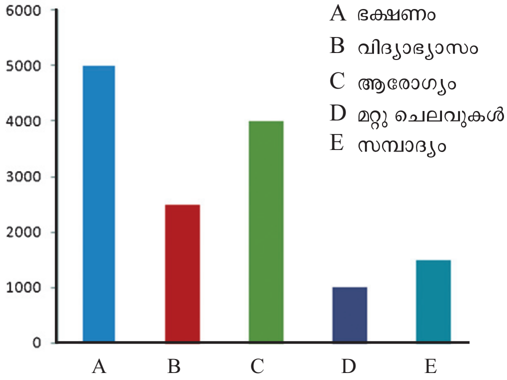
പലഹാരച്ചിത്രം

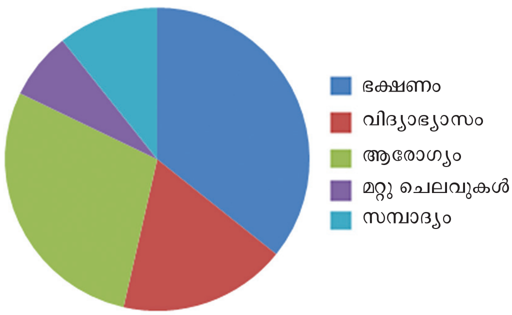
ഇംഗ്ലീഷുകാർക്കും അമേരിക്കക്കാർക്കും വളരെ പ്രിയപ്പെട്ട ഒരു പലഹാരത്തിന്റെ പേരാണ് പൈ (pie)

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ കഷണങ്ങളാക്കിയാണ് ഇത് സാധാരണ വീതിക്കുന്നത്. അതിൽനിന്നാണ് വൃത്തചിത്രങ്ങൾക്ക് പൈഡയഗ്രം എന്ന പേരുവന്നത്.

ചതുരചിത്രവും വൃത്തചിത്രവും

രേണുവിന്റെ കുടുംബത്തിൽ വിവിധ ആവശ്യങ്ങൾക്കുള്ള ചെലവുകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചതുരചിത്രവും വൃത്തചിത്രവും ആണ് ചുവടെ.

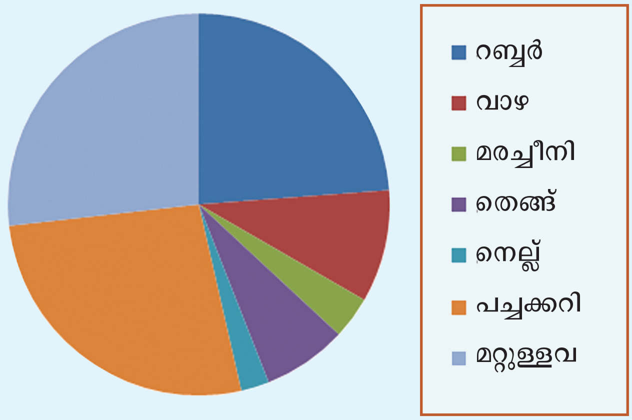




ചതുരചിത്രം നോക്കൂ, ഓരോ ഇനത്തിലുമുള്ള ചെലവുകൾ എത്ര രൂപ വീതമെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ പറയാനും താരതമ്യം ചെയ്യാനും കഴിയുന്നില്ലേ. എന്നാൽ ഓരോ ഇനത്തിലെയും ചെലവുകൾ ആകെ ചെലവിന്റെ എത്രഭാഗം എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ പറയാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? വൃത്തചിത്രത്തിൽ, ഓരോ ഇനത്തിലുമുള്ള ചെലവുകൾ ആകെയുള്ളതിന്റെ എത്ര ഭാഗമെന്ന് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പമാണ്. എന്നാൽ ചെലവുകൾ എത്രയെന്ന് പറയുക എളുപ്പമല്ല. ഇങ്ങനെ ഓരോ രീതിയിലുമുള്ള ചിത്രീകരണങ്ങൾക്ക് അതിന്റേതായ ഗുണവും ദോഷവുമുണ്ട്. നമ്മൾ ചിത്രീകരിക്കുന്ന വസ്തുതകളുടെ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് ഉചിതമായ രീതി തിരഞ്ഞെടുക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

കൃഷി

ഒരു പഞ്ചായത്തിലെ ആകെ കൃഷിസ്ഥലം വിവിധ കൃഷികൾക്കായി എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രമാണ് ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. ചിത്രത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരമെഴുതുക.



- ഏതു കൃഷിക്കാണ് ഏറ്റവും കുറച്ചു സ്ഥലം ഉപയോഗിക്കുന്നത്?
- ഏതു കൃഷിക്കാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ സ്ഥലം ഉപയോഗിക്കുന്നത്?
- പച്ചക്കറിക്കൃഷി ആകെയുള്ള കൃഷിയുടെ ഏതാണ്ട് എത്ര ഭാഗമാണ്?

വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാം

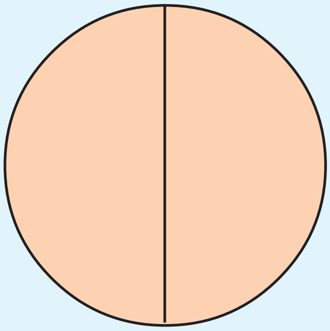
ഒരു സ്കൂളിൽ പച്ചക്കറിക്കൃഷി ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ചു. ആകെയുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ പകുതി ചീരക്കൃഷിയും, ബാക്കിഭാഗത്ത് തുല്യമായി പയറും വഴുതനയും കൃഷി ചെയ്യാൻ തീരുമാനിച്ചു. ഓരോന്നും കൃഷിചെയ്യുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കാം.

ആദ്യം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ആകെ സ്ഥലത്തിന്റെ പകുതി ഭാഗമാണ് ചീരക്കൃഷി ചെയ്യുന്നതിനായി നീക്കിവച്ചത്.

ഇത് എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം?

വൃത്തത്തിന്റെ പകുതി എങ്ങനെ വരയ്ക്കാം?



ഇനി മറ്റു രണ്ടു കൃഷിക്കുള്ള സ്ഥലം എങ്ങനെ കാണിക്കും?

വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയെ വീണ്ടും പകുതിയാക്കണം. ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഓരോ ഭാഗവും തിരിച്ചറിയാനായി വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

യാത്രക്കണക്ക്

ഒരു യു.പി. സ്കൂളിലെ 7 എ യിൽ 40 കുട്ടികളുണ്ട്. ഇതിൽ 20 പേർ സ്കൂൾ ബസ്സിൽ വരുന്നവരാണ്. 15 പേർ നടന്നും 5 പേർ സൈക്കിളിലും വരുന്നു. ഇക്കാര്യങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം വരച്ചുനോക്കാം.

ആകെ കുട്ടികളുടെ എത്ര ഭാഗമാണ് സ്കൂൾബസ്സിൽ വരുന്നത്?

ഇത് നേരത്തേ ചെയ്തപോലെ വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.

സൈക്കിളിൽ വരുന്നത് ആകെ കുട്ടികളുടെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

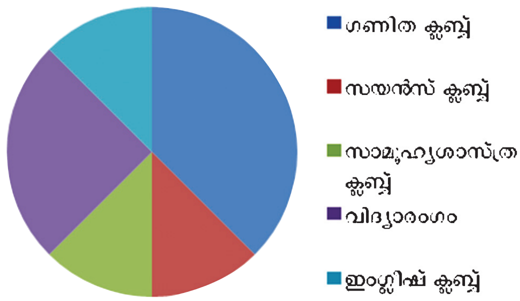
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തും?

അതിന് എത്ര ഡിഗ്രി കോൺ വരയ്ക്കണം?

$$360° \text{ യുടെ } \frac{1}{8} \text{ ഭാഗം} = 45°$$

പട്ടികയാക്കാം

ഒരു സ്കൂളിലെ ഏഴാം ക്ലാസ്സിലെ എല്ലാ കുട്ടികളും ഏതെങ്കിലും ഒരു ക്ലബ്ബിൽ അംഗമാണ്. ഓരോ ക്ലബ്ബിലേയും അംഗങ്ങളുടെ വിവരം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.



വിദ്യാരംഗത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം 50 ആണ്. ഓരോ ക്ലബ്ബിലേയും കുട്ടികളുടെ എണ്ണം ഒരു പട്ടികയായി എഴുതൂ.

വൃത്തചിത്രങ്ങൾ കമ്പ്യൂട്ടറിൽ

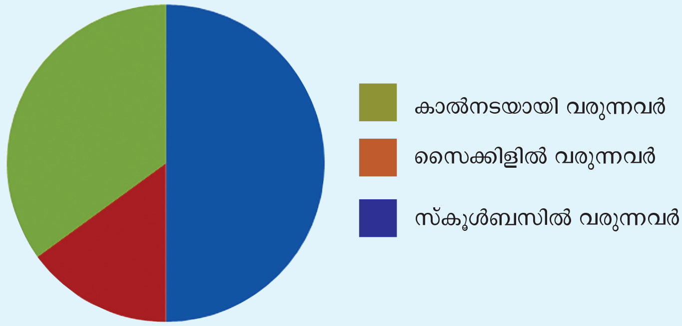
കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ സഹായത്താൽ വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

Libre Office Calc തുറന്ന്, വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കേണ്ട വിവരങ്ങൾ താഴെക്കാണുന്നതു പോലെ നൽകുക.

Maths Club	30
Science Club	20
Social Science Club	25
Vidhyarangam	15
English Club	10

ഇതിലെ ഏതെങ്കിലും കളത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത്

Insert → Chart → Pie എന്ന രീതിയിൽ വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കാം. ഓരോ വിഭാഗത്തിലുമുള്ള എണ്ണം മാറ്റി നൽകി നോക്കൂ. ചിത്രത്തിന് എന്താണു സംഭവിക്കുന്നത്?



വൃത്തത്തിന്റെ ബാക്കിയുള്ള ഭാഗം നടന്നു വരുന്നവരെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

- ഇത് വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?
- ഈ ഭാഗത്തിലെ കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

സ്കൂൾ ക്ലബ്ബുകൾ

ഒരു യു.പി സ്കൂളിലെ ഏഴാം ക്ലാസിലെ 100 കുട്ടികളും ഏതെങ്കിലും ഒരു ക്ലബ്ബിൽ അംഗമാണ്. ഓരോ ക്ലബ്ബിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

ക്ലബ്ബ്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
ഗണിതം	30
സയൻസ്	20
സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം	25
ഇംഗ്ലീഷ്	10
വിദ്യാരംഗം	15

ഈ വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കണം.

ഓരോ ക്ലബ്ബിലെയും അംഗങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം വീതം അടയാളപ്പെടുത്താം?

ആകെ 100 കുട്ടികളാണല്ലോ ഉള്ളത്.

ഗണിത ക്ലബ്ബിൽ അംഗങ്ങളായത് 30 പേരാണ്.

ഇവരുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കാൻ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{30}{100}$ ഭാഗം.

അതിന് അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട കോണിന്റെ അളവ് എന്താണ്?

$$360^\circ \times \frac{30}{100} = 108^\circ$$

ഇതുപോലെ ഓരോ ക്ലബ്ബിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഏതൊക്കെ അളവിൽ കോൺ വരയ്ക്കണം?

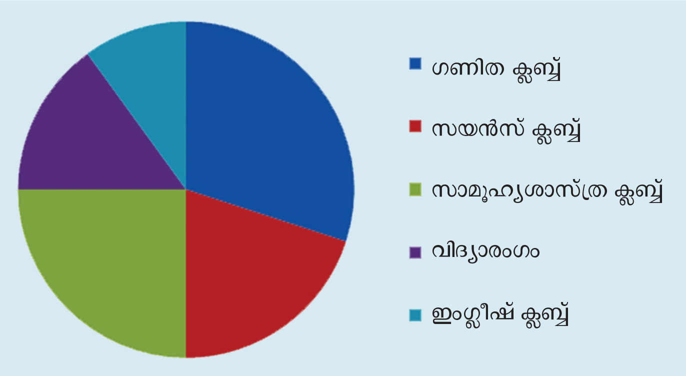
സയൻസ് ക്ലബ്ബ് : $360^\circ \times \frac{20}{100} \quad = \quad 72^\circ$

സാമൂഹ്യശാസ്ത്ര ക്ലബ്ബ് :

ഇംഗ്ലീഷ്ക്ലബ്ബ് :

വിദ്യാരംഗം :

ഇനി ചിത്രം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഗ്രേഡിന്റെ കണക്ക്

ഒരു യു.പി. സ്കൂളിലെ ഏഴാം ക്ലാസിൽ കുട്ടികളിൽ 25% പേർക്ക് എ ഗ്രേഡും 45% പേർക്ക് ബി ഗ്രേഡും 20% പേർക്ക് സി ഗ്രേഡും ബാക്കിയുള്ളവർക്ക് ഡി ഗ്രേഡും ലഭിച്ചു. ഇക്കാര്യങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കണം.

ഓരോ ഗ്രേഡും നേടിയവരെ സൂചിപ്പിക്കാൻ വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്തണമെന്നും അതിന് ഏതെല്ലാം അളവുകളിൽ കോണുകൾ വരയ്ക്കണമെന്നും കണക്കാക്കാം.

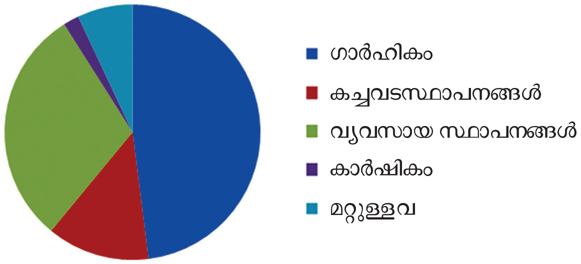
എ ഗ്രേഡ് നേടിയവർ 25% ആണ്.

ഇവരെ സൂചിപ്പിക്കാൻ വൃത്തത്തിന്റെ 25% ഉപയോഗിക്കണം.

$$360^\circ \times \frac{25}{100} = 90^\circ$$

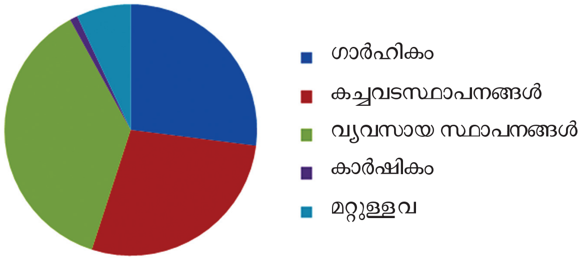
വൈദ്യുതി വിതരണം

കേരള സംസ്ഥാന വൈദ്യുതിബോർഡ് 2011-12-ൽ വിതരണം നടത്തിയ വൈദ്യുതിയെ സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങളാണ് ഈ വൃത്തചിത്രത്തിൽ.



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും എന്തെല്ലാം മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും?

2011-12ലെ വൈദ്യുതി വിതരണത്തിലൂടെയുള്ള വരുമാനത്തെ സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങളാണ് ഈ വൃത്തചിത്രത്തിൽ.

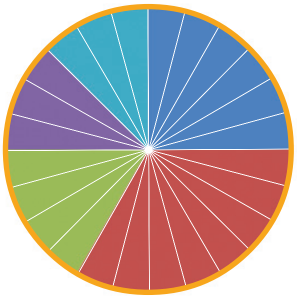


ഇതിൽ നിന്നും എന്തെല്ലാം കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും?

രണ്ടു വൃത്തചിത്രങ്ങളേയും താരതമ്യം ചെയ്യുക?

അരവിന്ദിന്റെ ഒരു ദിവസം

ഏഴാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന അരവിന്ദ് ഒരു ദിവസം വിവിധ കാര്യങ്ങൾക്കായി വിനിയോഗിക്കുന്ന സമയം സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.



വൃത്തത്തെ 24 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഒരു ഭാഗം = 1 മണിക്കൂർ.

വിവിധ നിറങ്ങളിലുള്ള ഭാഗങ്ങൾ എന്തൊക്കെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

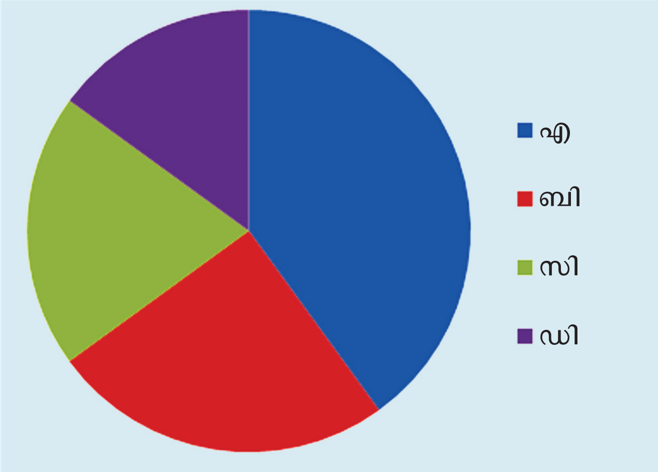
- സ്കൂളിൽ
- ഉറക്കം
- പഠനം
- കളി/ വ്യായാമം
- മറ്റുള്ളവ

ഈ വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ചതുരചിത്രം വരയ്ക്കാമോ?

ബി ഗ്രേഡ് നേടിയവർ 45%

കോണിന്റെ അളവ് $= 360 \times \frac{45}{100} = 162°$

ഇതുപോലെ സി, ഡി ഗ്രേഡുകാരെ സൂചിപ്പിക്കാൻ വരയ്ക്കേണ്ട കോണിന്റെ അളവു കണക്കാക്കി വൃത്തചിത്രം പൂർത്തിയാക്കാമല്ലോ.



നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെയും ക്ലാസിലെയും ഇത്തരം വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരച്ച് ഗണിതലാബിൽ പ്രദർശിപ്പിക്കൂ.

ചുവടെയുള്ള വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

- സ്കൂൾ ക്രിക്കറ്റ് മത്സരത്തിന്റെ ഫൈനലിൽ രാമാനുജൻ ഹൗസും സി.വി. രാമൻ ഹൗസും തമ്മിലാണ് മത്സരിച്ചത്. ഓരോ ഹൗസും നേടിയ റൺസിന്റെ വിശദാംശങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ ഹൗസിലെയും ഓരോരുത്തരും നേടിയ റൺസിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

സി.വി. രാമൻ ഹൗസ്

ബാറ്റ്സ്മാൻ	റൺസ്
ജിഷ്ണു	56
എബിൻ	35
സച്ചു	7
അജ്മൽ	21
മറ്റുള്ളവർ	21
ആകെ	**140**

രാമാനുജൻ ഹൗസ്

ബാറ്റ്സ്മാൻ	റൺസ്
അനന്തു	72
തൗഫീഖ്	36
അഭിലാഷ്	18
മറ്റുള്ളവർ	18
ആകെ	**144**

- സ്കൂൾ ലൈബ്രറിയിൽ ആകെ 1600 പുസ്തകങ്ങളുണ്ട്. അവയെ തരംതിരിച്ചത് ഇപ്രകാരമാണ്.

കഥ	-	320
കവിത	-	192
നോവൽ	-	384
വിജ്ഞാനപ്രദമായവ	-	544
ജീവചരിത്രം	-	160

ഓരോ ഇനം പുസ്തകത്തിന്റെയും എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കുക.

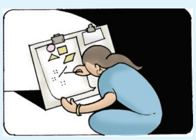
സ്കൂളിലെ 240 കുട്ടികളിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവേയിൽ ഓരോ ഇനം പുസ്തകങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തി.

കഥ	-	84
കവിത	-	36
നോവൽ	-	48
വിജ്ഞാനപ്രദമായവ	-	60
ജീവചരിത്രം	-	12

ഇതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കുക.

മുകളിലെ രണ്ടു വൃത്തചിത്രങ്ങളും താരതമ്യം ചെയ്യൂ.

കുട്ടികളുടെ താൽപ്പര്യത്തിനനുസരിച്ചാണോ ലൈബ്രറിയിൽ പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങിയിരിക്കുന്നത്?

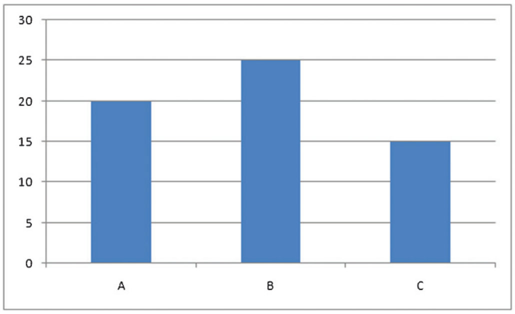


പ്രോജക്ട്

- പത്രങ്ങളിലും മാസികകളിലും കാണുന്ന പിക്ടോഗ്രാഫ്, ബാർഗ്രാഫ്, വൃത്തചിത്രങ്ങൾ എന്നിവ ശേഖരിക്കുക. അവ വിശകലനം ചെയ്ത് ഒരു താരതമ്യ പഠനം നടത്തൂ.
- നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ ഓരോ ക്ലാസിലെയും കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം കമ്പ്യൂട്ടറിൽ തയ്യാറാക്കുക.

വൃത്തചിത്രമാക്കാം

ഒരു സ്കൂളിലെ ഏഴാം ക്ലാസിൽ മൂന്നു ഡിവിഷനുകളിലായി പഠിക്കുന്ന പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചതുരചിത്രമാണ് ചുവടെ.



ഈ വിവരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കുക.

തിരിഞ്ഞുനോക്കുമ്പോൾ

പഠനനേട്ടങ്ങൾ	എനിക്ക് കഴിയും	ടീച്ചറുടെ സഹായത്തോടെ കഴിയും	ഇനിയും മെച്ചപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്
• വൃത്തചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ വിശദീകരിക്കുകയും വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.			
• തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.			
• വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതിന് തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് വൃത്തത്തെ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിനുള്ള രീതി വിശദീകരിക്കുന്നു.			
• വൃത്തചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതിന് ഐ.ടി സാധ്യതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.			

പദസൂചിക (Glossary)

രേഖീയജോടി (Linear pair)

സമാന്തരവരകൾ (Parallel lines)

സാമാന്തരികം (Parallelogram)

സമാനകോണുകൾ (Corresponding angles)

മറുകോണുകൾ (Alternate angles)

ആന്തരസഹകോണുകൾ Co-interior angles)

ബാഹ്യസഹകോണുകൾ (Co-exterior angles)

ചതുരം (Rectangle)

ത്രികോണം (Triangle)

ലംബം (Perpendicular)

കോൺ (Angle)

ലംബകം (Trapezium)

ബീജഗണിതം (Algebra)

കൃതീകരണം (Exponentiation)

അനഘസംഖ്യകൾ (Perfect numbers)

ഘടകങ്ങൾ (Factors)

പരപ്പളവ് (Area)

മട്ടത്രികോണം (Right angled triangle)

വർഗം (Square)

വർഗമൂലം (Square root)

പൂർണവർഗങ്ങൾ (Perfect squares)

സമചതുരസംഖ്യകൾ (Square numbers)

ത്രികോണസംഖ്യകൾ (Triangular numbers)

അക്കത്തുക (Digital root)

വേഗം (Speed)

ശരാശരിവേഗം (Average speed)

വൃത്തം (Circle)

അംശബന്ധം (Ratio)

ലാഭം (Profit)

നഷ്ടം (Loss)

പലിശ (Interest)

കർണം (Hypotenuse)

ന്യൂനസംഖ്യകൾ (Negative numbers)

അധിസംഖ്യകൾ (Positive numbers)

വൃത്തചിത്രം (Pie diagram)

വര (Line)

ബിന്ദു (Point)

വശം (Side)

മട്ടകോൺ (Right angle)

സമചതുരം (Square)

മട്ടം (Set square)

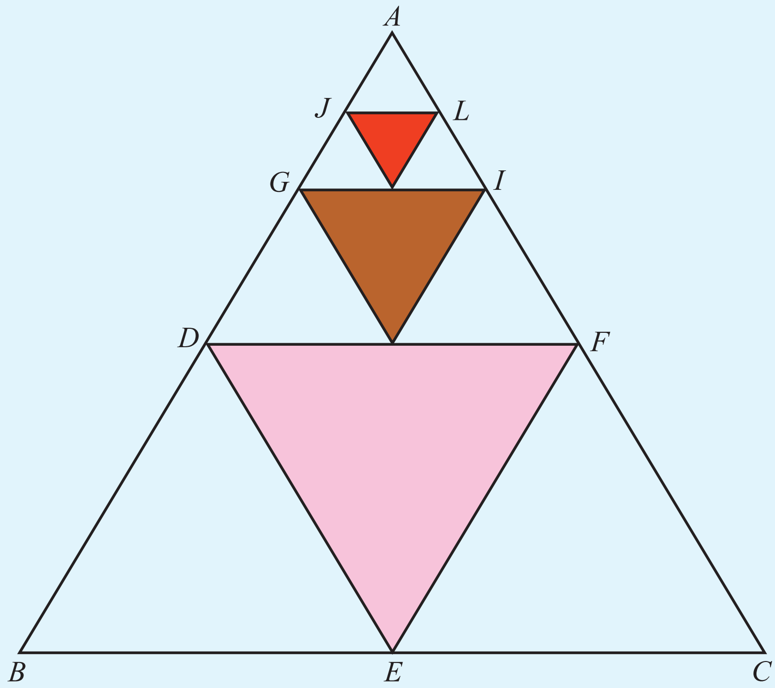
അൽപ്പം ചിന്തിക്കാം

1. ചിത്രത്തിൽ AB, BC, AC ഇവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ് D, E, F.

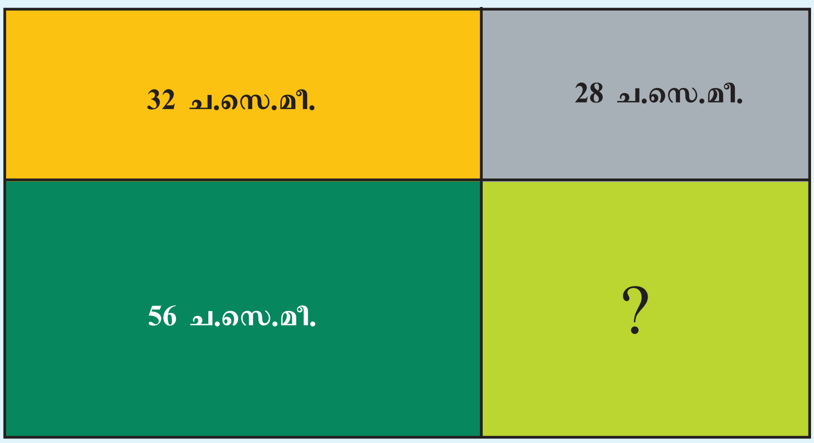
   AD, DF, AF എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ് G, H, I.

   AG, GI, AI എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ് J, K, L.

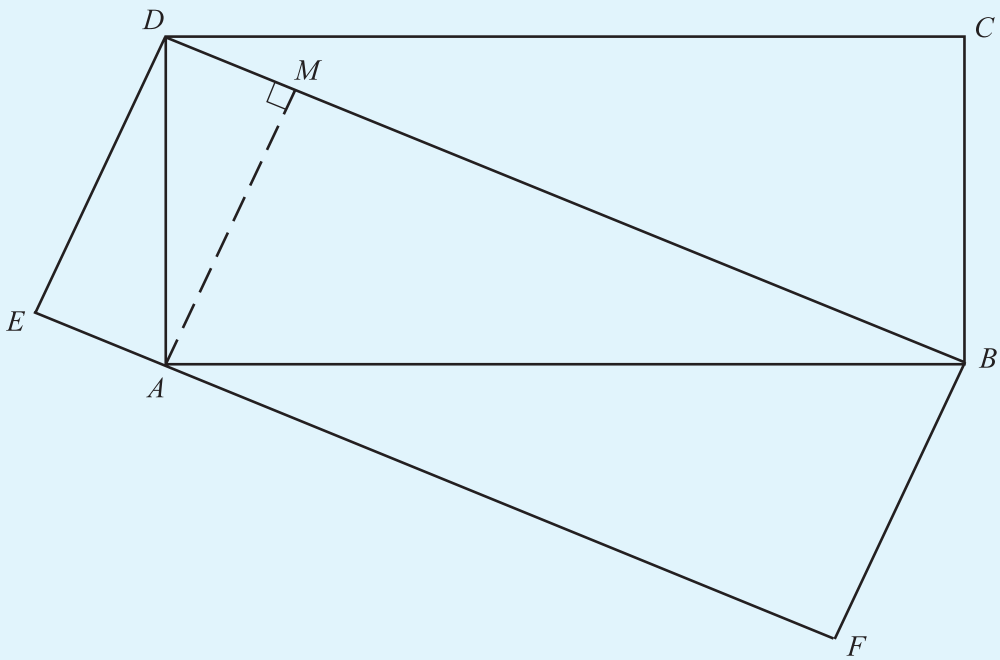
   ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിട്ടുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 21 ച.സെ.മീ. ആയാൽ ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് എത്ര?



2. ചിത്രത്തിൽ ഒരു വലിയ ചതുരത്തെ നാല് ചെറിയ ചതുരങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് അതാത് ചതുരങ്ങളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. നാലാമത് ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?



3. ചിത്രത്തിൽ $ABCD$; $BDEF$ എന്നിവ രണ്ട് ചതുരങ്ങളാണ്. $ABCD$ എന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 50 ച.സെ.മീ. ആണ്. $BDEF$ എന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്ര?



4. ചിത്രത്തിൽ A, B, C, D എന്നിവ സമചതുരങ്ങളാണ്. A യുടെ ഒരു വശം 3 സെന്റിമീറ്ററും, $MN = 20$ സെന്റിമീറ്ററും ആയാൽ ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?